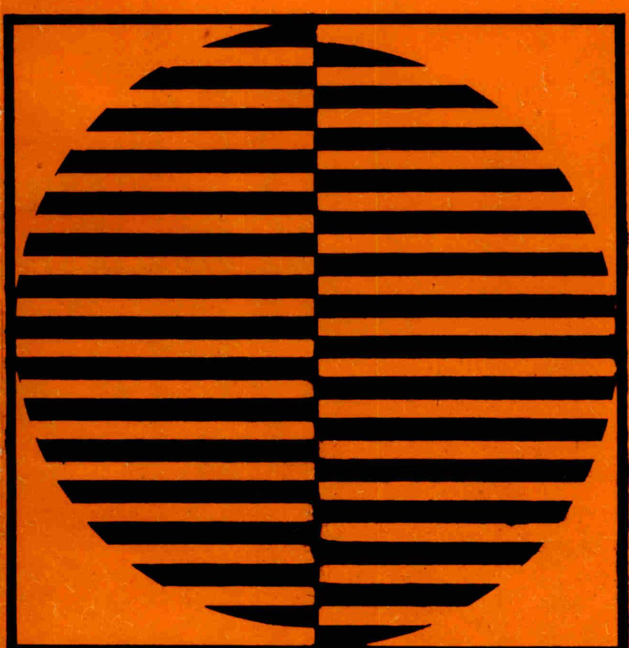
Ю. Князихин А. Маршак

# МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА



Тартуский государственный университет
Институт астрофизики и физики атмосферы
АН Эстонской ССР

Ю.Князихин, А.Маршак

# МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

(алгебраическая модель, скорость сходимости)

Таллин „Валгус" 1987

530.I
К54

УДК 539.I25.523.348+5I9.642.2+5I9.644

Художник-оформитель Х.Пузанов

Монография посвящена исследованию метода дискретных ординат (МДО) для решения плоскопараллельных задач теории переноса излучения. Основное внимание уделено математической постановке метода, изучению алгебраических свойств систем (МДО), а также сходимости и скорости сходимости метода. Рассмотрены вопросы выбора квадратурных формул и итерационных процессов с учетом особенностей задачи. В монографии изложены исследования авторов в этих направлениях.

Для специалистов в области прикладной математики, геофизики и астрофизики.

Библ. 9I назв. Ил. 2.

Рецензент: доктор физико-математических наук О.М.Покровский

Тартуский государственный университет. Институт астрофизики и физики атмосферы АН ЭССР. Ю. Князихин, А. Маршак. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА (алгебраическая модель, скорость сходимости). Редакторы Х.Тераль и У. Алас. Художественный редактор Х.Пузанов. Подписано к печати 05.05.87. МВ-0432I. Формат 60х90/I6. Офсетная бумага № 2. Гарнитура шрифта машинописная. Офсетная печать. Усл. печ. л. I0,00. Усл. кр.-отт. I0,26. Уч.-изд.л. 7,44. Тираж 600 экз.Заказ № 503. Цена I р. 20 к.Заказное. Издательство "Валгус", 200090, Таллин, Пярнуское шоссе,I0. Типография ТГУ, 202400, Тарту, ул. Тийги, 78.

К $\frac{1704020000 - 248}{902(15) - 87}$ Заказное

© Тартуский государственный университет, I987

Выпущено по заказу Тартуского государственного университета

## СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Необходимость в численном решении уравнения переноса излучения возникает во многих задачах астрофизики, атмосферной оптики, физики реакторов и защиты от излучений. Метод дискретных ординат (МДО), предложенный в 40-х годах в работах Г.Вика и С.Чандрасекара для полуаналитического решения задач об однородных плоскопараллельных слоях, развивался далее в работах многих авторов. К настоящему времени различные его модификации составляют основную группу сеточных методов решения задач теории переноса. Хотя проблемам использования, развития и обоснования МДО посвящена обширная литература, полной теории этого класса методов еще нет.

Исследование вопросов точности аппроксимации, алгебраической структуры аппроксимирующих задач, скорости сходимости различных итерационных процессов необходимы для оптимального выбора формы аппроксимирующей задачи в каждой конкретной проблеме.

В предлагаемой монографии систематизируются и развиваются работы авторов в этих направлениях применительно к задачам о переносе излучения в плоскопараллельных слоях при существенной анизотропии рассеяния. Традиционно являясь основными в атмосферной оптике, эти задачи используются сейчас и как элементы более сложных проблем для неодномерных геометрических моделей. В этих задачах обычно используются разложения индикатрисы по полиномам Лежандра, а решения - в ряд Фурье по азимутальной переменной. При сильной анизотропии рассеяния эти ряды сходятся медленно и при замене их частными суммами невысокого порядка, как это обычно делается, нарушается важное требование положительности аппроксимирующих схем.

Принципиальным моментом является отказ авторов от использования таких разложений, что позволяет построить положительные консервативные схемы. Эти схемы обладают замечательным свойством: при дискретизации на равномерной сетке по азимутальной переменной исходная трехмерная задача распадается на ряд двумерных так же, как в классическом подходе с представлением решения рядом Фурье. Существенный интерес представляет исследование сходимости итерационного метода построенного по типу метода Зейделя. Несмотря на то, что каждый шаг здесь "дороже", чем в "итерациях по столкновениям", такой процесс может быть выгоднее в атмосферных задачах с преимущественным рассеянием вперед.

Значительное продвижение достигнуто в оценке точности аппроксимации по угловым переменным. Указаны, в частности, способы построения квадратурных формул с очень высокой скоростью сходимости в задачах о плоскопараллельном слое.

Результаты, собранные в книге несомненно будут способствовать более глубокому пониманию характера аппроксимаций, используемых в численном анализе задач теории переноса излучений. Они также могут служить основой создания эффективных расчетных алгоритмов и отправной точкой исследований для более сложных математических моделей в этой области.

Т.А.Гермогенова.

# ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы будем рассматривать метод дискретных ординат (МДО) применительно к решению уравнения переноса в плоскопараллельной анизотропно рассеивающей среде. В настоящее время он является основным и наиболее популярным алгоритмом решения задач переноса излучения т.к. в рамках этого метода относительно просто строить вычислительные схемы, удовлетворяющие требованиям консервативности, устойчивости, однородности и т.д.

Основными моментами в МДО являются следующие:

I) дискретизация задачи по угловым переменным, например, путем замены интеграла столкновений квадратурными (кубатурными) формулами.

2) Решение полученной системы дифференциальных уравнений, например, итерационным методом.

3) Дискретизация по пространственной переменной, что равносильно приближенному обращению дифференциального оператора на каждом шаге итерационного процесса.

Мы коснемся лишь первых двух этапов. Вопросам дискретизации по пространственной переменной с построением схем высокого порядка точности посвящена недавно вышедшая монография [4]. Очевидно, что выбор сетки по угловой и пространственной переменной тесно связаны между собой. Поэтому, как нам кажется, данная работа в определенном смысле дополняет монографию [4].

Остановимся теперь на содержании работы. Отправным пунктом нашей модели переноса является отказ от представления индикатрисы рассеяния в виде суммы по полиномам Лежандра. Рассмотрим перенос излучения в "дискретной" среде: после столкновения частица может продолжать движение только по одному из конечного числа наперед заданных направлений. Этот процесс описывается краевой задачей для системы дифференциальных уравнений, вывод которой осуществлен на основе закона сохранения энергии (консервативность схемы). Полученную систему мы будем называть линейно-алгебраической моделью переноса (ЛАМ). Отметим, что ЛАМ всегда имеет положительное решение независимо от количества выбранных направлений (т.е.

от размерности задачи). Это существенно отличает ее от метода, основанного на представлении индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра, который дает физически непротиворечивое решение лишь при достаточно большом количестве членов в разложении индикатрисы.

Перейдем ко второму моменту МДО. Для решения ЛАМ строим итерационный метод Зейделя. Благодаря этому, исходная краевая задача сводится к решению задачи Коши на каждом итерационном шаге. Доказывается, что сходимость метода улучшается с вытянутостью индикатрисы рассеяния "вперед", что весьма полезно при решении реальных задач атмосферной оптики.

Несмотря на то, что построенная ЛАМ консервативна и устойчива, она еще непригодна для практической реализации на ЭВМ ввиду ее слишком большой размерности. Однако, при специальном способе дискретизации по азимуту ЛАМ естественным образом разбивается на блоки-циркулянты. Благодаря этому исходная задача распадается на ряд более простых подзадач, т.е. выполняется требование однородности схемы.

Итак, мы построили устойчивые однородные, хорошо адаптированные к решению широко класса реальных задач переноса излучения вычислительные схемы. Однако, основным критерием качества алгоритма является его точность. Вопросам исследования быстроты сходимости предлагаемого метода посвящена заключительная глава работы.

Хорошо известно [I4], что решение исходного уравнения переноса имеет особенности у границы раздела сред. В работе показывается, что эти особенности имеют сходную структуру с особенностями интегральных экспонент $E_p(\tau), p = 1,2, \ldots, \tau > 0$. Поэтому скорость сходимости метода зависит от того, а в некоторых случаях и только от того, насколько хорошо мы можем аппроксимировать интегральные экспоненты при помощи квадратурных формул. Изучая поведение в окрестности особенностей подынтегральных функций в определении $E_p(\tau)$ удалось указать зависимость величины погрешности МДО от выбора первого узла квадратурной формулы, что соответствует выбору первого дискретного направления ЛАМ.

Изложение материала ведется для уравнения переноса в котором индикатриса $g(\gamma)$ и альбедо однократного рассеяния $\lambda$ не зависят от $\tau$. Однако, все приведенные в работе результаты (за исключением гл. У) остаются в силе и в том случае, когда эти величины достаточно "гладко" зависят от оптического расстояния $\tau$ .

В каждой главе формулы нумеруются независимо двумя цифрами, первая из которых обозначает номер параграфа, а вторая - номер цитируемой формулы в этом параграфе. При ссылках на формулы из другой главы добавляется еще цифра, соответствующая номеру этой главы. Нумерация лемм и теорем в каждой главе самостоятельная, а при ссылке на теорему из другой главы добавляется номер этой главы.

Авторы пользуются случаем выразить искреннюю благодарность Г.М. Вайникко за советы и обсуждения в течении всего периода работы по данной тематике, а также Т.А. Гермогеновой, прочитавшей рукопись и сделавшей ряд полезных замечаний.

# ГЛАВА I

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Изучение проблемы переноса излучения в плоскопараллельной анизотропно рассеивающей среде может быть сведено к решению одного из двух видов уравнений. Первое является интегро-дифференциальным и определяет интенсивность многократно рассеянного излучения. Второе - интегральным уравнением второго рода и определяет функцию источников.

В настоящей главе сначала приводится вид этих уравнений. Затем описывается связь между ними. Далее интегральное уравнение переноса излучения рассматривается как операторное уравнение второго рода в пространстве непрерывных функций. Доказываются некоторые его свойства. В конце главы установленные свойства для интегрального уравнения переносятся на интегро-дифференциальное.

### §I. Интегро-дифференциальное и интегральное уравнения переноса

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения в однородном плоском анизотропно рассеивающем слое конечной оптической толщины

$$\mu \frac{\partial J(\tau,\mu,\varphi)}{\partial \tau} + J(\tau,\mu,\varphi) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} g(\gamma')J(\tau,\mu',\varphi')\,d\mu'\,d\varphi' +$$

$$+ f(\tau,\mu,\varphi),\quad 0\le\tau\le H,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ -1\le\mu\le 1, \tag{I.I}$$

с краевыми условиями

$$J(0,\mu,\varphi)=0,\ \mu>0,\quad J(H,\mu,\varphi)=0,\ \mu<0. \tag{I.2}$$

Здесь $\lambda\in[0,1]$ - вероятность выживания частицы при элементарном акте рассеяния; $H$ - оптическая толщина слоя;

$g(\gamma)\geqslant 0$ — индикатриса рассеяния[I], нормированная условием

$$(4\pi)^{-1}\int_{\Omega} g(\gamma')\,d\omega=(4\pi)^{-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} g(\gamma')\,d\varphi'\,d\mu'=1, \tag{I.3}$$

$$\cos\gamma'=\mu\mu'+\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}\,\cos(\varphi-\varphi'), \tag{I.4}$$

$f(\tau,\mu,\varphi)$ - свободный член, учитывающий наличие внутренних источников, падающее излучение и т.д.

Решение этого уравнения $\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)$ дает интенсивность рассеянного излучения на оптической глубине $\tau$ в направлении, которое определяется полярным расстоянием $\arccos\mu$ и азимутом $\varphi$.

Кроме интегро-дифференциального уравнения мы будем рассматривать интегральную форму уравнения переноса

$$y(\tau,\mu,\varphi)=\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{\tau}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{g(\gamma')}{\mu'}\exp(-(\tau-\tau')/\mu')\,y(\tau',\mu',\varphi')\,d\varphi'\,d\mu'\,d\tau'-$$

$$-\frac{\lambda}{4\pi}\int_{\tau}^{H}\int_{-1}^{0}\int_0^{2\pi}\frac{g(\gamma')}{\mu'}\exp(-(\tau-\tau')/\mu')\,y(\tau',\mu',\varphi')\,d\varphi'\,d\mu'\,d\tau'+$$

$$+f(\tau,\mu,\varphi). \tag{I.5}$$

## §2. Связь между решением интегро-дифференциального и интегрального уравнений

Связь между решением краевой задачи $\{(I.1)-(I.2)\}$ и интегрального уравнения (I.5) дает следующая теорема эквивалентности решений.

**Теорема I.** Пусть $\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)$ есть решение краевой задачи $\{(I.1)-(I.2)\}$. Тогда функция, определенная равенством

$$y(\tau,\mu,\varphi)=\frac{\lambda}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} g(\gamma')\,\mathcal{J}(\tau,\mu',\varphi')\,d\varphi'\,d\mu' \tag{2.I}$$

---

[I] Всюду в работе предполагается, что функция $g(\gamma)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$

удовлетворяет уравнению (I.5) и наоборот, пусть $y(\tau,\mu,\varphi)$ есть решение уравнения (I.5). Тогда функция $\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)$, определенная по правилу

$$\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int\limits_{\hat{a}}^{\tau} y(\tau',\mu,\varphi)\exp\left(-\dfrac{\tau-\tau'}{\mu}\right)d\tau', & \mu\neq 0\\ y(\tau,\mu,\varphi), & \mu=0,\end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$\hat{a}(\mu)=\begin{cases}0, & \mu>0,\\ H, & \mu<0,\end{cases} \tag{2.3}$$

удовлетворяет краевой задаче (I.I)-(I.2) .

Доказательство. Перепишем уравнение (I.I) в виде

$$\mu\frac{\partial\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)}{\partial\tau}+\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)=y(\tau,\mu,\varphi). \tag{2.4}$$

Здесь через $y(\tau,\mu,\varphi)$ обозначена правая часть интегро-дифференциального уравнения (I.I). Решая относительно $\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)$ дифференциальное уравнение (2.4) с краевыми условиями (I.2) мы получим, что функция $\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)$ представима в виде (2.2) Подстановка этого выражения в определение функции $y(\tau,\mu,\varphi)$ приводит нас к интегральному уравнению (I.5).

Пусть $y(\tau,\mu,\varphi)$ - решение уравнения (I.5). Рассмотрим функцию $\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)$ , определенную соотношением (2.2). Очевидно, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.4) с краевыми условиями (I.2). Заменим теперь функцию $y(\tau,\mu,\varphi)$ в уравнении (2.4) правой частью уравнения (I.5). Анализ полученного соотношения приводит нас к краевой задаче (I.I)-(I.2) .

Теорема доказана.

## §3. Интегральное уравнение переноса как операторное уравнение второго рода в пространстве непрерывных функций

Запишем интегральное уравнение переноса излучения в операторном виде

$$y = Ty + f. \tag{3.1}$$

Здесь символом $T$ обозначена сумма интегральных членов уравнения (I.6), $f$ – свободный член.

Пусть $B = \{(\tau,\mu,\varphi):\ 0 \le \tau \le H, -1 \le \mu \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Рассмотрим пространство $C(B)$ непрерывных на $B$ функций с нормой

$$\|y\|_C = \max_{\xi\in B}|y(\xi)| = \max_{0\le\tau\le H}\ \max_{-1\le\mu\le 1}\ \max_{0\le\varphi\le 2\pi}|y(\tau,\mu,\varphi)|.$$

Определим телесный конус $K$ в пространстве $C$ как

$$K = \{y \in C(B):\ y(\tau,\mu,\varphi) \ge 0,\ (\tau,\mu,\varphi) \in B\}.$$

Теорема 2. Оператор $T$ является вполне непрерывным, положительным относительно конуса $K$ оператором, действующим из $C(B) \to C(B)$. Если $g(\gamma) > 0,\ \gamma \in [0,2\pi]$, то $T$ – сильно положителен.

Доказательство. Рассмотрим на $C(B)$ оператор

$$T_\varepsilon y = \frac{\lambda}{4\pi}\int_0^\tau\int_\varepsilon^1\int_0^{2\pi}\frac{g(\gamma')}{\mu'}\exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu'}\right)y(\tau',\mu',\varphi')\,d\varphi'\,d\mu'\,d\tau' -$$

$$-\frac{\lambda}{4\pi}\int_\tau^H\int_{-1}^{-\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{g(\gamma')}{\mu'}\exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu'}\right)y(\tau',\mu',\varphi')\,d\varphi'\,d\mu'\,d\tau'.$$

Очевидно, что $T_\varepsilon$ – вполне непрерывен (ядро непрерывно, особенность при $\mu'=0$ отсутствует). Следующая цепочка неравенств

$$|Ty - T_\varepsilon y| \le \frac{\lambda}{4\pi}\int_0^\tau\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{g(\gamma')}{\mu'}\exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu'}\right)|y(\tau',\mu',\varphi')|\,d\varphi'\,d\mu'\,d\tau' +$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int_\tau^H\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{g(\gamma')}{\mu'}\exp\left(-\frac{\tau'-\tau}{\mu'}\right)|y(\tau',\mu',\varphi')|\,d\varphi'\,d\mu'\,d\tau' \le$$

$$\le \frac{\lambda}{2}g_{max}\|y\|_C\int_0^\varepsilon\left(1-\exp\left(-\frac{H}{\mu}\right)\right)d\mu' \le \frac{\lambda}{2}g_{max}\|y\|_C\,\varepsilon$$

доказывает равномерную сходимость $T_\varepsilon \to T$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, оператор $T$ ограничен и вполне непрерывен [19].

Из положительности ядра оператора $T$ следует $TK \subset K$, что по существу, является определением положительного оператора Для сильной положительности $T$ достаточно потребовать $g(\gamma) > 0$, т.к. при этом для любого $y \in K$ следует, что $Ty \in \operatorname{int} K$.

Теорема доказана.

## §4. Единственность, положительность и непрерывная зависимость решения интегрального уравнения от начальных данных

Для дальнейших исследований нам понадобится

Лемма I. Имеет место неравенство

$$\|T\|_{C\to C} \leqslant \lambda\,(1-\exp(-\theta H)),\quad \theta=\theta(H),\ 1<\theta<\infty \tag{4.I}$$

Доказательство. Имеем

$$\|Ty\|_C \leqslant \|y\|_C \left\{ \max_{\xi\in B} \frac{\lambda}{4\pi}\left[ \int_0^{2\pi}\int_0^1 g(\gamma')(1-\exp(-\frac{H}{\mu'}))\,d\mu' d\varphi' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{2\pi}\int_{-1}^0 g(\gamma')(1-\exp(\frac{H}{\mu'}))\,d\mu' d\varphi' \right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \|y\|_C \left\{ \max_{\xi\in B} \frac{1}{4\pi}\left[ (1-\exp(-\theta_1 H)) \int_0^{2\pi}\int_0^1 g(\gamma')\,d\mu' d\varphi' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1-\exp(-\theta_2 H)) \int_0^{2\pi}\int_{-1}^0 g(\gamma')\,d\mu' d\varphi' \right]\right\} \leqslant \lambda(1-\exp(-\theta H))\|y\|_C,$$

$$1/\theta_1,\ 1/\theta_2 \in (0,1),\qquad \theta=\min\{\theta_1,\theta_2\}.$$

Лемма доказана.

Пусть $\lambda(1-\exp(-\theta H))=1$, т.е. $\lambda=1$ и $H=\infty$. В этом случае $1$ является точкой спектра $\sigma(T)$ оператора $T$, и вопрос о разрешимости уравнения (I.3), по существу, сводится к нахождению собственных векторов, соответствующих максимальному собственному значению $\vartheta$ оператора $T$ ($\vartheta=1$).

В [74] рассматриваются вопросы разрешимости уравнения переноса в случае $\lambda \geqslant 1$ и конечного $H$.

В нашей работе предположим, что $\lambda \in [0,1]$ и $0 < H < \infty$. На основе теоремы Банаха о единственности решения операторных уравнений второго рода получим следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\lambda < 1$ и $f \in C(B)$. Тогда интегральное уравнение (3.I) имеет единственное решение в классе функций $C(B)$. Кроме того, это решение непрерывно зависит от исходных данных.

Из положительности оператора $T$ относительно конуса $K$ и оценки (4.I) следует, что оператор $(I-T)^{-1}$ является оператором монотонного типа* относительно конуса $K$ [27]. Отсюда следует

Теорема 4. Пусть $\lambda \leqslant 1$ и $f \in K$. Тогда решение уравнения (3.I) единственно и положительно.

## §5. Некоторые свойства решения интегро-дифференциального уравнения переноса

Определим на $C(B)$ оператор $S$, который каждой непрерывной функции $y \in C(B)$ ставит в соответствие функцию $\mathcal{Y} = Sy$, определяемую соотношением (2.2). Рассмотрим множество функций

$$S(C) = \left\{ z : z = Su,\ u \in C(B) \right\}.$$

По теореме I имеем, что если $z^*$ есть решение интегрального уравнения (I.5), то функция $\mathcal{Y}^* = Sz^*$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению переноса. Следовательно, интегро-дифференциальное уравнение переноса имеет в классе функций $S(C)$ по крайней мере одно решение. В силу единственности решения уравнения (I.5) получаем, что интегро-дифференциальное уравнение переноса имеет единственное решение в классе функций $S(C)$ Этот факт позволяет перенести результаты предыдущего параграфа на интегро-дифференциальное уравнение

Теорема 5. Пусть $\lambda < 1$. Тогда интегро-дифференциальное уравнение переноса имеет единственное решение при любом свободном члене $f \in C(B)$. Кроме этого, если $f \in K$, то

---

*Оператор $A$ является оператором монотонного типа относительно конуса $K$, если $A^{-1}$ положителен относительно конуса $K$.

решение положительно.

Пусть $\mathcal{J}$ - решение интегро-дифференциального уравнения с краевыми условиями (I.2), $\tilde{\mathcal{J}}$ - решение этой же задачи с возмущенными по норме пространства $C$ исходными данными. Рассмотрим величину $\Delta = |\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi) - \tilde{\mathcal{J}}(\tau,\mu,\varphi)|$ ; с учетом представления (2.2) получим

$$\Delta = |\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi) - \tilde{\mathcal{J}}(\tau,\mu,\varphi)| \leq$$

$$\leq |(Sy)(\tau,\mu,\varphi) - (S\tilde{y})(\tau,\mu,\varphi)| + |f(\tau,\mu,\varphi) - \hat{f}(\tau,\mu,\varphi)| \leq$$

$$\leq (1 - \exp(-\frac{H}{\mu}))\, \|y - \tilde{y}\|_C + |f(\tau,\mu,\varphi) - \hat{f}(\tau,\mu,\varphi)| .$$

Отсюда следует

Теорема 6. Малые возмущения исходных данных интегро-дифференциального уравнения переноса по норме пространства $C(B)$ влекут малые возмущения решения этой задачи.

## ГЛАВА II

## ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Интегро-дифференциальное уравнение, рассмотренное в предыдущей главе, описывает перенос излучения в "непрерывной" среде: элементарная частица может рассеятся с той или иной вероятностью по любому направлению. В этой главе мы рассмотрим перенос излучения в "дискретной"среде: после столкновения дальнейшее движение частицы может происходить только по одному из конечного числа заданных направлений. Этот процесс можно описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений с количеством неизвестных функций, равным количеству выбранных направлений. Эту систему мы будем называть линейно - алгебраической моделью (ЛАМ) переноса излучения.

В первом параграфе этой главы мы определим ЛАМ как систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями, коэффициенты которой удовлетворяют условиям положительности, симметричности и балансности. Далее рассмотрены два конкретных примера ЛАМ. Затем, используя векторно-матричную символику, получим более компактную форму записи ЛАМ. После этого выводится интегральная форма ЛАМ. Оставшаяся часть главы посвящена изучению свойств решений ЛАМ и ее интегральной формы.

### §I. Определение линейно-алгебраической модели переноса излучения

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$a_{sm}\frac{d\mathcal{J}_{sm}(\tau)}{d\tau}+b_{sm}\mathcal{J}_{sm}(\tau)=\frac{\lambda}{4\pi}\sum_{|j|=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}g_{jlsm}\mathcal{J}_{jl}(\tau)+f_{sm}(\tau),$$

$$|s|=1,2,\ldots,n,\quad m=1,2,\ldots,p, \tag{I.I}$$

с краевыми условиями

$$\mathcal{J}_{im}(0)=\mathcal{J}_{-im}(H)=0,\quad i=1,2,\ldots,n,\ m=1,2,\ldots,p. \tag{I.2}$$

На величины $a_{sm}$, $b_{sm}$, $g_{jlsm}$ наложим ограничения

$$a_{im} > 0, \quad a_{-im} = -a_{im}, \quad b_{im} > 0, \quad b_{-im} = -b_{im}, \tag{I.3}$$

$$g_{jlsm} \geqslant 0, \tag{I.4}$$

$$g_{jlsm} = g_{-jl(-s)m}, \quad g_{jl(-s)m} = g_{-jlsm}, \quad g_{jlsm} = g_{sljm} = g_{smjl}, \tag{I.5}$$

$$\sum_{|j|=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} g_{ilsm} = 4\pi b_{sm}, \quad |s|, i, j = 1, \ldots, n, \quad m, l = 1, 2, \ldots, p. \tag{I.6}$$

Выражения (I.3)-(I.4), (I.5), (I.6) мы назовем условиями положительности, симметричности и балансности соответственно, а систему (I.I) с условиями (I.2) - линейно-алгебраической моделью переноса излучения.

Решение $y_{sm}$ системы дифференциальных уравнений (I.I) можно интерпретировать как интенсивность многократно рассеянного излучения в "дискретной среде", т.е. в среде, где рассеяние может произойти только по одному из $2np$ заданных направлений. Действительно, обозначим через $g_{jlsm}/b_{sm}$ вероятность того, что излучение, идущее по направлению[I] $(j,l)$ после акта рассеяния будет иметь направление $a_{sm}$; $a_{sm}/b_{sm}$ - косинус угла между полярной осью и направлением $(s,m)$. Записывая теперь баланс частиц в точке $\tau \in [\tau, \tau+d\tau]$, получим систему дифференциальных уравнений вида (I.I), в которой $g_{jlsm}$ есть дискретный аналог $d\mu d\varphi\, g(\gamma)\, d\mu' d\varphi'$, а величины $a_{sm}$, $b_{sm}$ соответствуют символам $\mu d\mu d\varphi$ и $d\mu d\varphi$.

## §2. Примеры линейно-алгебраической модели переноса излучения

2.I. Заменим интегральный член в уравнении (I.I.I) некоторыми квадратурными формулами (КФ)

$$\int_0^{2\pi} \xi(\varphi)d\varphi \approx \sum_{m=1}^{p} \beta_m\, \xi(\varphi_m), \quad 0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_p = 2\pi, \quad \sum_{m=1}^{p} \beta_m = 2\pi, \ \beta_m > 0. \tag{2.I}$$

---

[I] Здесь парой $(j,l)$ обозначена точка на единичной сфере. Набор из $(2np)$ точек на этой сфере понимается как множество возможных направлений рассеянного излучения.

$$\int_{-1}^{1} \zeta(\mu)d\mu \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\zeta(\mu_i)+\zeta(-\mu_i)),\ 0<\mu_1<\ldots<\mu_n\leq 1,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ \alpha_i>0.$$

Интегро-дифференциальное уравнение переноса заменяется системой

$$\mu_s \frac{d\mathcal{J}_{sm}}{d\tau} + \mathcal{J}_{sm}(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{|j|=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} \tilde{g}_{jlsm}\,\alpha_{|j|}\beta_l\,\mathcal{J}_{jl}(\tau) + \tag{2.2}$$
$$+\tilde{f}_{sm}(\tau),\quad |s|=1,2,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots,p;\ \mu_{-j}=-\mu_j\ (j>0),$$

в которой, учитывая (I.I.4), положим

$$\tilde{g}_{jlsm} = g(\gamma_{slsm}),\quad \tilde{f}_{sm}(\tau) = f(\tau,\mu_s,\varphi_m),$$

$$\cos\gamma_{jlsm} = \mu_j\mu_s + \sqrt{(1-\mu_j^2)(1-\mu_s^2)}\,\cos(\varphi_m-\varphi_l). \tag{2.3}$$

Согласно (I.I.2), запишем краевые условия для системы (2.2)

$$\mathcal{J}_{sm}(0) = \mathcal{J}_{-sm}(H) = 0,\quad s=1,2,\ldots,n,\ m=1,2,\ldots,p. \tag{2.4}$$

Полученная система не является ЛАМ, т.к. нарушено условие балансности. Для превращения ее в ЛАМ, введем нормировочные множители

$$\rho_{sm} = \frac{4\pi}{\sum_{|j|=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} \tilde{g}_{jlsm}\,\alpha_{|j|}\beta_l},\quad s=1,2,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots,p, \tag{2.5}$$

$$\rho_0(\tau) = \frac{\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\tau,\mu,\varphi)\,d\varphi\,d\mu}{\sum_{|j|=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} \tilde{f}_{jl}(\tau)\,\alpha_{|j|}\beta_l}. \tag{2.6}$$

Вместо системы (2.2) будем решать систему дифференциальных уравнений

$$\mu_s \frac{d\mathcal{J}_{sm}(\tau)}{d\tau} + \mathcal{J}_{sm}(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{|j|=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} \tilde{g}_{jlsm}\,\rho_{|j|l}\,\alpha_{|j|}\beta_l\,\mathcal{J}_{jl}(\tau) +$$
$$+\rho_0(\tau)\tilde{f}_{sm}(\tau),\quad |s|=1,2,\ldots,n,\ m=1,2,\ldots,p. \tag{2.7}$$

с краевыми условиями (2.4). Умножив систему (2.7) на $\alpha_{|s|}\beta_m\rho_{|s|m}$, получим ЛАМ вида

$$a_{sm}\frac{d\mathcal{J}_{sm}(\tau)}{d\tau}+b_{sm}\mathcal{J}_{sm}(\tau)=\frac{\lambda}{4\pi}\sum_{|j|=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p}g_{j\ell sm}\mathcal{J}_{j\ell}(\tau)+f_{sm}(\tau), \quad (2.8)$$

где

$$a_{sm}=\mu_s\alpha_{|s|}\beta_m\rho_{|s|m},\quad b_{sm}=\alpha_{|s|}\beta_m\rho_{|s|m},$$

$$g_{j\ell sm}=\alpha_{|s|}\beta_m\rho_{|s|m}\,\tilde{g}_{j\ell sm}\,\alpha_{|j|}\beta_\ell\rho_{|j|m}.$$

$$f_{sm}(\tau)=\alpha_{|s|}\beta_m\rho_{|s|m}\,\tilde{f}_{sm}(\tau)\,\rho_0(\tau),\quad |s|,j=1,2,\dots,n;\ \ell,m=1,\dots,p.$$

Преобразование системы (2.2) в ЛАМ можно осуществить,например, путем введения нормировочных коэффициентов по алгоритму ренормализации, предложенному в [68]. Суть этого метода заключается в следующем. Обозначим

$$\tau_{sm}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p}g_{-j\ell sm}\alpha_{|j|}\beta_\ell,\quad t_{sm}^{(k)}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p}\tilde{g}_{j\ell sm}\alpha_j\beta_\ell f_{j\ell sm}^{(k)},$$

$$s=1,2,\dots,n;\quad m=1,2,\dots,p,$$

и выберем достаточно малое положительное число $\varepsilon$. Рассмотрим итерационный процесс

$$f_{j\ell sm}^{(k)}=0.5\,f_{j\ell sm}^{(k-1)}\left[\frac{1-\tau_{j\ell}}{t_{j\ell}^{(k-1)}}+\frac{1-\tau_{sm}}{t_{sm}^{(k-1)}}\right],\quad f_{j\ell sm}^{(0)}=1,$$

который продолжаем до тех пор, пока

$$\left|1-\tau_{sm}-t_{sm}^{(k)}\right|<\varepsilon.$$

Далее индикатриса рассеяния "ренормализуется" по правилу

$$g_{-j\ell sm}:=g_{-j\ell sm}f_{j\ell sm}^{(k)},\quad g_{j\ell sm}:=g_{j\ell sm},\ j,s=1,2,\dots,n,\ \ell,m=1,2,\dots,p.$$

Численные эксперименты показали, что применение этого метода позволяет существенно уменьшить число $n$ при решении ряда задач атмосферной оптики [68]

2.2. Пусть

$$0=\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_n=1, \tag{2.9}$$

$$0=\varphi_0<\varphi_1<\ldots\varphi_p=2\pi \tag{2.10}$$

разбиение отрезков $[0,1]$ и $[0,2\pi]$. Рассмотрим множества

$$\Omega_{im}=\left\{(\mu,\varphi):\ \mu_{i-1}\leqslant\mu\leqslant\mu_i,\ \varphi_{m-1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_m\right\},\ i>0,$$

$$\Omega_{-im}=\left\{(\mu,\varphi):\ -\mu_i\leqslant\mu\leqslant-\mu_{i-1},\ \varphi_m\leqslant\varphi\leqslant\varphi_m\right\}_1\ i>0.$$

Усредняя интегро-дифференциальное уравнение переноса (I.I.I) на $\Omega_{sm}$ и полагая $\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi)=\mathcal{J}_{sm}(\tau)$ при $(\mu,\varphi)\in\Omega_{sm}$, получим ЛАМ, в которой

$$a_{im}=0.5(\mu_i^2-\mu_{i-1}^2)\Delta\varphi_m,\ \Delta\varphi_m=\varphi_m-\varphi_{m-1},\ a_{-im}=-a_{im}, \tag{2.11}$$

$$b_{im}=(\mu_i-\mu_{i-1})\Delta\varphi_m,\ b_{im}=b_{-im}, \tag{2.12}$$

$$g_{jlsm}=\int\limits_{\Omega_{jl}}\int\limits_{\Omega_{sm}}g(\gamma)\,d\mu\,d\varphi\,d\mu'\,d\varphi', \tag{2.13}$$

$$f_{sm}(\tau)=\int\limits_{\Omega_{sm}}f(\tau,\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi,\ i,|j|,|s|=1,2,\ldots,n,\quad m,l=1,2,\ldots,p. \tag{2.14}$$

Очевидно, что $a_{sm}$, $b_{sm}$, $g_{jlsm}$ удовлетворяют условиям (I.3)-(I.6). Однако, на практике, из-за погрешности вычислений $g_{jlsm}$ условие балансности может оказаться нарушенным Поэтому целесообразно ввести веса $p_{sm}$, как это делалось в пункте 2.I.

## §3. Векторно-матричная запись системы (I.I)

Используя векторно-матричную символику, перепишем уравнение (I.I) в виде

$$A_i \frac{d\mathcal{J}_i(\tau)}{d\tau} = -B_i \mathcal{J}_i(\tau) + \sum_{|j|=1}^{n} G_{ij} \mathcal{J}_j(\tau) + f_i(\tau), \quad |i| = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.I}$$

а краевые условия -

$$\mathcal{J}_i(0) = \mathcal{J}_{-i}(H) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Здесь[I]

$$\mathcal{J}_i(\tau) = (\mathcal{J}_{i1}(\tau) \ \mathcal{J}_{i2}(\tau) \ldots \mathcal{J}_{ip}(\tau))^T,$$

$$f_i(\tau) = (f_{i1}(\tau) \ f_{i2}(\tau) \ldots f_{ip}(\tau))^T,$$

$$G_{ij} = \frac{\lambda}{4\pi} \begin{pmatrix} g_{j1i1} & g_{j1i2} & \cdots & g_{j1ip} \\ g_{j2i1} & g_{j2i2} & \cdots & g_{j2ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{jpi1} & g_{jpi2} & \cdots & g_{jpip} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} b_{i1} & & & 0 \\ & b_{i2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & b_{ip} \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & & & 0 \\ & a_{i2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{ip} \end{pmatrix}, \quad |i|, |j| = 1, 2, \ldots, n.$$

Кроме этой будем использовать еще одну форму записи задачи {(I.I)-(I.2)}

$$\begin{cases} x' = Rx + A^{-1}G^{-}z + A^{-1}f^{+}, \\ z' = -Rz - A^{-1}G^{-}x - A^{-1}f^{-}, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$x(0) = x(H) = 0, \tag{3.4}$$

где $R = A^{-1}B(B^{-1}G^{+} - I)$, $I$ - единичная матрица, а

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

---

[I] Символ $^T$ означает знак транспонирования

$$G^{\pm} = \begin{pmatrix} G_{\pm 11} & G_{\pm 12} & \dots & G_{\pm 1n} \\ G_{\pm 21} & G_{\pm 22} & \dots & G_{\pm 2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{\pm n1} & G_{\pm n2} & \dots & G_{\pm nn} \end{pmatrix}, \quad x(\tau) = (\mathcal{J}_1(\tau)\ \mathcal{J}_2(\tau) \dots \mathcal{J}_n(\tau))^T,$$

$$z(\tau) = (\mathcal{J}_{-1}(\tau)\ \mathcal{J}_{-2}(\tau) \dots \mathcal{J}_{-n}(\tau))^T, \quad f^{\pm}(\tau) = (f_{\pm 1}(\tau)\ f_{\pm 2}(\tau) \dots f_{\pm n}(\tau))^T.$$

Из (I.3)-(I.5) вытекают следующие свойства введенных в этом пункте матриц:

$$G_{(-i)(-j)} = G_{ij} = G_{ji} = G_{ij}^T, \quad G_{-ij} = G_{i(-j)} = G_{(-i)j}^T, \tag{3.5}$$

$$G^{\pm} = (G^{\pm})^T, \quad A_{-i} = -A_i, \quad B_{-i} = B_i. \tag{3.6}$$

## §4. Интегральная форма линейно-алгебраической модели переноса излучения

Введем функции $y_{sm}(\tau)$ по формулам

$$y_{sm}(\tau) = b_{sm}^{-1}\left(\frac{\lambda}{4\pi}\sum_{|j|=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} g_{jlsm}\mathcal{J}_{jl}(\tau) + f_{sm}(\tau)\right). \tag{4.1}$$

Запишем систему (I.I) в виде

$$a_{sm}\frac{d\mathcal{J}_{sm}(\tau)}{d\tau} + b_{sm}\mathcal{J}_{sm}(\tau) = b_{sm}y_{sm}(\tau).$$

Решая эту систему с краевыми условиями (I.2) относительно функций $\mathcal{J}_{sm}(\tau)$, получим

$$\mathcal{J}_{im}(\tau) = \beta_{im}\int_0^{\tau}\exp(-\beta_{im}(\tau-\tau'))\,y_{im}(\tau')\,d\tau',$$

$$\mathcal{J}_{-im}(\tau) = \beta_{im}\int_{\tau}^{H}\exp(-\beta_{im}(\tau'-\tau))\,y_{-im}(\tau')\,d\tau', \quad \beta_{im} = \frac{b_{im}}{a_{im}}, \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n, \\ m=1,2,\dots,p. \end{matrix} \tag{4.2}$$

Подставим полученные для $\mathcal{J}_{im}(\tau)$, $\mathcal{J}_{-im}(\tau)$ выражения в равенство (4.I). После несложных преобразований придем к системе интегральных уравнений

$$y_{sm}(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi}\Big[\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}\frac{g_{jlsm}\beta_{jl}}{b_{sm}}\exp(-\beta_{jl}(\tau-\tau'))\,y_{jl}(\tau')\,d\tau' +$$

$$+\int_{\tau}^{H}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}\frac{g_{jlsm}\beta_{jl}}{b_{sm}}\exp(-\beta_{jl}(\tau'-\tau))\,y_{-jl}(\tau')\,d\tau' + b_{sm}^{-1}f_{sm}(\tau), \tag{4.3}$$

$$|s| = 1, 2, \ldots, n; \quad m = 1, 2, \ldots, p.$$

Отметим, что задача (I.I)-(I.2) и система интегральных уравнений (4.3) эквивалентны в том смысле, что если функции $\mathcal{J}_{sm}(\tau)$ являются решением задачи (I.I)-(I.2), то $y_{sm}(\tau)$ определенные выражением (4.I), удовлетворяют системе (4.3) и наоборот, если $y_{sm}(\tau)$ являются решением системы (4.3), то функции $\mathcal{J}_{sm}(\tau)$, определенные формулами (4.2), являются решением задачи (I.I)-(I.2). Это свойство есть ни что иное, как дискретный аналог теоремы I.I. Систему интегральных уравнений (4.3) будем называть интегральной формой ЛАМ.

## §5. Интегральная форма линейно-алгебраической модели переноса излучения как операторное уравнение второго рода в пространстве непрерывных вектор-функций

Рассмотрим систему интегральных уравнений (4.3) как операторное уравнение второго рода

$$y = T_{np}\,y + f \,. \tag{5.I}$$

Здесь $y$ - вектор столбец с компонентами $y_{sm}(\tau)$, $f$ - вектор столбец с компонентами $b_{sm}^{-1} f_{sm}(\tau)$. Символом $T_{np}\,y$ обозначена сумма интегральных членов уравнения (4.3). Введем пространство $C[0,H]$ вектор-функций $y(\tau)$, определенных на $[0,H]$ и принимающих значения в $R^{2np}$, в котором норма задается как

$$\|y\| = \max_{1\le m\le p}\ \max_{1\le |s|\le n}\ \max_{0\le\tau\le H} |y_{sm}(\tau)|.$$

Определим телесный конус $K_{np}$ в пространстве $C[0,H]$ как

$$K_{np} = \left\{ y \in C[0,H] : y_{jm}(\tau) \geq 0, \ |j| = 1,2,\dots,n; \ m = 1,2,\dots,p \right\}.$$

Теорема I. Оператор $T_{np}$ является вполне непрерывным положительным относительно конуса $K_{np}$ оператором, действующим из $C[0,H] \to C[0,H]$.

Доказательство теоремы I следует из непрерывности и положительности ядра интегрального оператора $T_{np}$.

Обозначим через $\beta$ величину

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq l \leq p} \beta_{jl}.$$

Теорема 2. Пусть $\lambda(1-exp(-\beta H)) < 1$. Тогда система интегральных уравнений (4.3) имеет единственное решение в пространстве непрерывных вектор-функций $C[0,H]$ при любом свободном члене $f \in C[0,H]$. Кроме того, решение непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство. В главе У мы покажем[I], что норма оператора оценивается неравенством $\|T_{np}\| < \lambda(1-exp(-\beta H))$. Использование теоремы Банаха о единственности решения операторных уравнений второго рода завершает доказательство теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнено условие теоремы 2. Тогда если $f \in K_{np}$, то решение $y^*$ уравнения (5.I) существует, единственно и положительно (т.е. $y^* \in K_{np}$).

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы I.4.

## §6. Некоторые свойства решения линейно-алгебраической модели переноса излучения

Этот параграф посвящен переносу свойств решения интегральной формы ЛАМ на систему дифференциальных уравнений (I.I) с краевыми условиями (I.2). Доказательства этих свойств почти дословно повторяют рассуждения, используемые в § I.5. Поэтому все теоремы этого параграфа мы приводим без доказательства.

---

[I] В гл. У будет изучаться система интегральных уравнений более общего вида.

Определим на $C[0,H]$ оператор $S$, который каждой функции $y \in C[0,H]$ ставит в соответствие функцию $z = Sy$, определенную выражением (4.2). Рассмотрим множество

$$S(C) = \{ z : z = Su, \ u \in C[0,H] \}.$$

Теорема 4. Пусть выполнено условие теоремы 2. Тогда ЛАМ имеет на множестве $S(C)$ единственное решение при любом свободном члене $f \in C[0,H]$. Кроме этого, если $f \in K_{np}$, то решение ЛАМ положительно.

Теорема 5. Малые изменения исходных данных ЛАМ по норме пространства $C[0,H]$ влекут малые изменения решения этой задачи.

# ГЛАВА III

# ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

В этой главе рассмотрим итерационный метод Зейделя применительно к решению ЛАМ. Этот метод хорошо зарекомендовал себя в вычислительной практике и широко используется для решения различных задач атмосферной физики [58,61,66,69,73]. Однако, этот метод весьма мало изучен теоретически. В этой главе исследуется скорость сходимости метода Зейделя.

В первом параграфе настоящей главы приводится построение итерационного процесса. Здесь же сформулирована теорема о его сходимости и скорости сходимости, доказательству которой посвящен второй параграф.

Скорость сходимости итерационного процесса зависит от величины $q$, являющейся, по существу, дискретным аналогом некоторого интеграла от индикатрисы рассеяния. Третий параграф посвящен "асимптотическому" описанию величины $q$, т.е.сумма, участвующая в определении этой величины, заменяется интегралом, который, в свою очередь, преобразуется к более простому виду. Исследуется зависимость поведения величины $q$ от вытянутости индикатрисы рассеяния.

## §I. Построение итерационного процесса. Теорема о сходимости метода Зейделя

Для решения ЛАМ рассмотрим итерационный процесс[I]

$$\begin{cases} x'_{k+1} = R x_{k+1} + A^{-1} G^{-} z_k + A^{-1} f^{+}, \\ x_{k+1}(0) = 0, \\ z'_{k+1} = -R z_{k+1} - A^{-1} G^{-} x_{k+1} - A^{-1} f^{-}, \\ z_{k+1}(H) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{I.I}$$

Для описания этого итерационного процесса введем ряд обозначений и определений, а именно:

---

[I] Здесь используются обозначения, введенные в § 2.3.

1) $g = \min\limits_{\substack{1\le s\le n\\ 1\le m\le p}} \frac{1}{4\pi b_{sm}} \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{p} g_{jlsm}$, $G = \max\limits_{\substack{1\le s\le n\\ 1\le m\le p}} \frac{1}{4\pi b_{sm}} \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{p} g_{jlsm}$.

Подчеркнем, что здесь, в отличии от (I.I.6), суммирование происходит по положительным значениям индекса $j$ .

2) $d = (1-\lambda G) \min\limits_{\substack{1\le s\le n\\ 1\le m\le p}} \left\{\frac{b_{sm}}{a_{sm}}\right\}$, $\mathcal{D} = (1+\lambda G) \max\limits_{\substack{1\le s\le n\\ 1\le m\le p}} \left\{\frac{b_{sm}}{a_{sm}}\right\}$;

3) $t^*$ есть наибольший положительный корень уравнения

$$\| B^{-1}G^{+} + t B^{-1}G^{-} \|_B = 1;$$

4) $\theta = 1 - \exp(-\mathcal{D}H)$;

5) $q = \theta / t^*$;

6) для $x, y \in R^{np}$ определим скалярные произведения

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{np} x_j y_j ,$$

$$(x, y)_B = (Bx, y), \; \langle x, y\rangle = (AB^{-1}x, y)_B = (Ax, y)$$

и нормы

$$\| x \|_B = (x, x)_B^{1/2}, \; \| x \| = \langle x, x\rangle^{1/2} ;$$

7) $L_2[0, H]$ – пространство вектор-функций $x(\tau)$ , определенных на отрезке $[0, H]$ и принимающих значение в $R^{np}$, в котором норма задается как

$$|||x||| = \left( \int_0^H \|x\|^2(\tau)\, d\tau \right)^{1/2}$$

Мы предположим, что $G < 1$ , а следовательно и $d > 0$ .

Теорема I. Итерационный процесс (I.I) сходится при любом начальном приближении $z_0 \in L_2[0, H]$ к решению $(x^*, z^*)$ задачи $\{(2.3.3)-(2.3.4)\}$ . Имеют место оценки

$$|||x^* - x_{k+1}||| \leqslant d^{-1/2}(1-q^2)^{-1} q^{2k+1} |||z_0 - z_1|||,$$

$$|||z^* - z_{k+1}||| \leqslant d^{-1/2}(1-q^2)^{-1} q^{2k+1} |||z_0 - z_1|||,$$

а корень $t^*$ существует и оценивается как

$$\frac{1}{t^*} \leqslant \lambda \frac{1-q}{1-\lambda q}.$$

Отметим, что в силу (2.I.6), имеем $q \leqslant 1$, $G \leqslant 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{t^*} \leqslant \lambda \frac{1-q}{1-\lambda q} \leqslant \lambda \frac{1-\lambda q}{1-\lambda q} = \lambda \leqslant 1.$$

§2. Доказательство теорема I

Лемма I. Матрица $R$ является самосопряженным, отрицательно определенным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Имеет место неравенство

$$-\mathcal{D}\langle x, x\rangle \leqslant \langle Rx, x\rangle \leqslant -d\langle x, x\rangle. \qquad (2.I)$$

Доказательство. Определение матриц $A$, $B$, $G^+$ с использованием свойств (2.I.5) порождает следующую цепочку равенств

$$\langle Rx, y\rangle = ((B^{-1}G^{\pm} - I)x, y)_B = (x, G^+ y) - (x, By) =$$

$$= (x, (B^{-1}G^+ - I)y)_B = \langle x, Ry\rangle,$$

доказывающую самосопряженность оператора $R$.

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$-(\|B^{-1}G^+\|_B + 1)(x,x) \leqslant \langle Rx, x\rangle \leqslant -(1 - \|B^{-1}G^+\|_B)(x,x)_B$$

Заметим, что матрица $B^{-1}G^+$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_B$. Поэтому величина $\|B^{-1}G^+\|_B$ есть наибольшее по абсолютной величине собственное значение оператора

$B^{-1}G^{+}$ , которое можно оценить как

$$\|B^{-1}G^{+}\|_{B} \leqslant \frac{\lambda}{4\pi} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \max_{1\leqslant m\leqslant p} b_{sm}^{-1} \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} g_{jlsm} = \lambda G.$$

Отсюда, учитывая диагональность матрицы $A^{-1}B$ , получаем неравенство (2.I).

Лемма доказана.

Вернемся к задаче $\{(2.3.3)-(2.3.4)\}$ . Решая первое уравнение системы (2.3.3) относительно $x$ , а второе - относительно $z$ , получим

$$x(\tau) = \int_0^\tau \exp(R(\tau-s))A^{-1}G^{-}z(s)\,ds + \int_0^\tau \exp(R(\tau-s))A^{-1}f^{+}(s)\,ds,$$

$$z(\tau) = \int_\tau^H \exp(R(s-\tau))A^{-1}G^{-}x(s)\,ds + \int_\tau^H \exp(R(s-\tau))A^{-1}f^{-}(s)\,ds,$$

или в операторном виде

$$\begin{aligned} &x = V_1 z + f_1, \quad f_1(\tau) = \int_0^\tau \exp(R(\tau-s))A^{-1}f^{+}(s)\,ds, \\ &z = V_2 x + f_2, \quad f_2(\tau) = \int_\tau^H \exp(R(s-\tau))A^{-1}f^{-}(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Построим итерационный процесс

$$\begin{aligned} u_k &= V_1\, v_{k-1} + f_1, \\ v_k &= V_2\, u_{k-1} + f_2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

в котором $(u_0, v_0)$ - произвольное начальное приближение. Рассмотрим подпоследовательности $(u_{2k-1}, v_{k})$ и $(u_{2k}, v_{2k-1})$ последовательности $(u_k, v_k)$, $k=1,2,\ldots$ Нетрудно заметить, что первая из них зависит только от $v_0$ , а вторая - от $u_0$ . Сравнивая последовательности $(x_k, z_k)$ процесса (I.I) и $(u_{2k-1}, v_{2k})$, $k=1,2,\ldots$, получим, что при $v_0 = z_0$ выполняются равенства

$$x_k = u_{2k-1}, \qquad z_k = v_{2k}. \tag{2.4}$$

Определим на $L_2[0,H]$ операторы $\tilde{V}_1$ и $\tilde{V}_2$ равенствами

$$(\tilde V_1 x)(\tau) = \int_0^\tau \exp\,(R(\tau-s))\,Rx(s)\,ds\,,$$

$$(\tilde V_2 x)(\tau) = \int_\tau^H \exp\,(R(s-\tau))\,Rx(s)\,ds\,.$$

Лемма 2. Имеют место неравенства

$$|||\tilde V_i||| \leqslant 1-\exp(-\mathcal{D}H)\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. Т.к. оператор, задаваемый матрицей $(-R)$ является самосопряженным и положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_N$, $N=np$, состоящий из собственных векторов матрицы $(-R)$, соответствующих собственным числам $\gamma_i$ $d \leqslant \gamma_1 \leqslant \leqslant \gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_N \leqslant \mathcal{D}$. Пусть $x \in L_2[0,H]$. Тогда

$$x(\tau) = \sum_{k=1}^N x_k(\tau)\,e_k\,,\quad x_k(\tau) = \langle x(\tau), e_k\rangle\,.$$

Отсюда

$$|||\tilde V_1 x|||^2(\tau) = \sum_{k=1}^N \Big(\int_0^\tau \gamma_k \exp(-\gamma_k(\tau-s))\,x_k(s)\,ds\Big)^2.$$

Применяя неравенство Гельдера

$$|||\tilde V_1 x|||^2 = \int_0^H \sum_{k=1}^N \Big(\int_0^\tau \gamma_k \exp(-\gamma_k(\tau-s))\,x_k(s)\,ds\Big)^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \int_0^H \Big(\int_0^\tau \gamma_k \exp(-\gamma_k(\tau-s))\,ds\Big)\times$$

$$\times\Big(\int_0^\tau \gamma_k \exp(-\gamma_k(\tau-s))\,x_k^2(s)\,ds\Big)\,d\tau$$

и меняя порядок интегрирования, получим

$$|||\tilde V_1 x|||^2 \leqslant (1-\exp(-\mathcal{D}H))\sum_{k=1}^N \int_0^H (1-\exp(-\gamma_k(H-s))\,x_k^2(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant (1-\exp(-\mathcal{D}H))^2 \sum_{k=1}^N x_k^2(s)\,ds = (1-\exp(-\mathcal{D}H))\,|||x|||\,.$$

Отсюда следует неравенство (2.5) при $i=1$. Аналогично доказывается неравенство (2.5) при $i=2$.

Лемма доказана.

Замечание I. Для доказательства этой леммы мы фактически использовали два свойства оператора $(-R)$ - самосопряженность и положительную определенность. Поэтому лемма остается в силе, если норму $\|\cdot\|$ в определении $G$ заменить любой другой нормой $\|\cdot\|_*$, лишь бы в новом пространстве оператор $(-R)$ был самосопряженным и положительно определенным.

Лемма 3. Имеют место неравенства

$$|||V_i||| \leqslant (1-\exp(-\mathcal{D}H))\,\|(B^{-1}G^+-I)^{-1}B^{-1}G^-\|,\ i=1,2.$$

Доказательство немедленно следует из равенства

$$V_i x = \tilde{V}_i\,(B^{-1}G^+-I)^{-1}B^{-1}G^-x$$

Определим функцию $\gamma(t)$, которая каждому вещественному значению $t$ ставит в соответствие спектральный радиус оператора $(B^{-1}G^+ + tB^{-1}G^-)$. В силу самосопряженности этого оператора в пространстве со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_B$, получим

$$\gamma(t) = \|B^{-1}G^+ + tB^{-1}G^-\|_B. \tag{2.6}$$

Лемма 4. Функция $\gamma(t)$, $t\geqslant 0$ является монотонной функцией, принимающей значение $\lambda$ при $t=1$.

Доказательство. Из очевидного неравенства[I]

$$-B^{-1}G^+ - t_1B^{-1}G^- \leqslant B^{-1}G^+ + tB^{-1}G^- \leqslant B^{-1}G^+ + t_1B^{-1}G^-,\ 0\leqslant t\leqslant t_1$$

и положительности матрицы $B^{-1}G^+ + tB^{-1}G^-$ следует [28] монотонность функции $\gamma(t)$ при $t\geqslant 0$.

Покажем теперь справедливость равенства $\gamma(1)=\lambda$. С учетом (2.I.6) имеем

$$\gamma(1) = \|B^{-1}G^+ + B^{-1}G^-\|_B \leqslant \max_{\substack{1\leqslant s\leqslant n\\ 1\leqslant m\leqslant p}} \frac{\lambda}{4\pi b_{sm}} \sum_{|j|=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} g_{jlsm} = \lambda.$$

---

[I] $E\leqslant F$ для матриц $E$ и $F$ означает, что $F-E$ положительна относительно конуса векторов с положительными координатами.



5

а т.к. $(B^{-1}G^{+}+B^{-1}G^{-})\mathbb{1}=\lambda\mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ – вектор, состоящий из единиц, то

$$\gamma(1)=\sup_{\|x\|\neq 0}\frac{((B^{-1}G^{+}+B^{-1}G^{-})x,x)}{(x,x)}=\frac{((B^{-1}G^{+}+B^{-1}G^{-})\mathbb{1},\mathbb{1})}{(\mathbb{1},\mathbb{1})}=\lambda .$$

Лемма доказана.

Для наших дальнейших исследований нам потребуется

Теорема 2. Пусть $K=K_1+K_2+K_2^*$ есть самосопряженный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и

$$(Kx,x)_{\mathcal{H}}\geqslant m(x,x)_{\mathcal{H}},\quad (K_1x,x)_{\mathcal{H}}\geqslant m_1(x,x),\; x\in\mathcal{H},\; m,m_1>0.$$

Тогда спектральный радиус $\rho$ оператора $(K_1+K_2)^{-1}K_2^*$ удовлетворяет неравенству

$$\rho\leqslant 1-\frac{\gamma_0}{\|K_1+K_2\|_{\mathcal{H}}},$$

где

$$\gamma_0=\inf_{\|x\|=1}\left\{\left|((K_1+K_2)x,x)_{\mathcal{H}}\right|-\left|(K_2^*x,x)_{\mathcal{H}}\right|\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\beta_0-\sqrt{\beta_0^2-mm_1},\quad \beta_0=\sup_{\|x\|=1}\left|((K_1+K_2)x,x)_{\mathcal{H}}\right| .$$

Доказательство этой теоремы приведено в [28].

Лемма 5. Спектральный радиус $\rho$ матрицы $(I-B^{-1}G^{+})^{-1}B^{-1}G^{-}$ удовлетворяет неравенству $\rho\leqslant 1/t^*$, где $t^*\geqslant 1$ есть наибольший положительный корень уравнения $\gamma(t)=1$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$, участвующее в формулировке теоремы 2, есть гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_B$. Положим

$$K_1=I-(B^{-1}G^{+}+tB^{-1}G^{-}),\; K_2=tB^{-1}G^{-},\; K=K_1+K_2+K_2^*,$$

где $t$ некоторый параметр. Нетрудно показать, что $K_1, K_2, K$ являются самосопряженными операторами в $\mathcal{H}$. Будем оценивать спектральный радиус $\rho_1=|t|\rho$ оператора

$$C = (K_1+K_2)^{-1}K_2^* = t\,(I - B^{-1}G^+)B^{-1}G^+.$$

Имеем

$$(K_1x,x)_B = (x,x)_B - ((B^{-1}G^+ + tB^{-1}G^-)x,x)_B \geqslant$$

$$\geqslant (1 - \|B^{-1}G^+ + tB^{-1}G^-\|_B)(x,x)_B = (1-\gamma(t))(x,x)_B .$$

Аналогично показываем

$$(Kx,x)_B \geqslant (1-\gamma(t))\,(x,x)_B .$$

Пусть $\mathfrak{M}_\varepsilon = \{t : \gamma(t) \leqslant 1-\varepsilon \;\&\; \gamma(-t) \leqslant 1-\varepsilon\}$, где $0<\varepsilon<1$ некоторое число. На основании теоремы 2 получим оценку

$$\rho_1 \leqslant 1 - \frac{\gamma_0}{\|K_1+K_2\|_B} = 1 - \frac{\gamma_0}{\|I - B^{-1}G^+\|_B},$$

величина $\gamma_0$ удовлетворяет неравенству

$$\gamma_0 \geqslant \beta_0 - \frac{\sqrt{\beta_0 - (1-\gamma(t))(1-\gamma(-t))}}{\beta_0}, \quad \beta_0 = \sup_{\|x\|=1} |((K_1+K_2)x,x)_B|, \; t\in\mathfrak{M}_\varepsilon$$

Учитывая самосопряженность операторов $K_1$, $K_2$, а также соотношение $\rho_1 = |t|\rho$, получим

$$\rho \leqslant \frac{1}{|t|}\sqrt{1 - \frac{(1-\gamma(t))(1-\gamma(-t))}{\|I - B^{-1}G^+\|_B}}, \quad t\in\mathfrak{M}_\varepsilon .$$

Заметим, что правая часть последнего неравенства есть симметричная функция переменной $t$. Поэтому положим $t \geqslant 0$. В силу произвольности числа $\varepsilon$ можно положить $\varepsilon = 0$ и следовательно, написать неравенство $\rho \leqslant 1/t^*$, где $t^*$ положительный корень уравнения $\gamma(t) = 1$.

Лемма доказана.

Следующая лемма дает оценку величины $t^*$.

Лемма 6. Наибольший положительный корень $t^*$ уравнения $\gamma(t) = 1$ удовлетворяет неравенству

$$t^* \geqslant \frac{1-\lambda g}{\lambda(1-g)} .$$

Доказательство. Оценим величину $t^*$ . Имеем

$$\gamma(t) \leqslant \frac{\lambda}{4\pi} \max_{\substack{1\leqslant s\leqslant n \\ 1\leqslant m\leqslant p}} \frac{1}{b_{sm}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} |g_{jlsm} + t g_{-jlsm}| =$$

$$\leqslant \lambda \max_{\substack{1\leqslant s\leqslant n \\ 1\leqslant m\leqslant p}} (d_{sm} + t e_{sm}),$$

где

$$d_{sm} = \frac{1}{4\pi b_{sm}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} g_{jlsm}, \quad e_{sm} = \frac{1}{4\pi b_{sm}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} g_{-jlsm} .$$

причем, в силу (2.I.6), $d_{sm} + e_{sm} = 1$ . Отсюда, при $t \geqslant 1$ следует

$$\gamma(t) \leqslant \lambda \max_{\substack{1\leqslant s\leqslant n \\ 1\leqslant m\leqslant p}} ((1-t)d_{sm} + t) = \lambda((1-t)g + t) .$$

Решая уравнение $\lambda((1-t)g + t) = 1$ , а также учитывая последнее неравенство и монотонность функции $\gamma(t)$ , получим

$$t^* \geqslant \frac{1-\lambda g}{\lambda(1-g)} .$$

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему I. Положим

$$(x, z)_* = ((I - B^{-1}G^+)x, z)_B = -\langle Rx, z\rangle , \quad \|x\|_* = (x, x)_*^{1/2} .$$

Очевидно, что матрица $R$ является самосопряженным отрицательно определенным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_*$ . Покажем самосопряженность оператора $(I - B^{-1}G^+)B^{-1}G^-$ в этом пространстве:

$$((I-B^{-1}G^{+})^{-1}B^{-1}G^{-}x, z)_{*} = (B^{-1}G^{-}x, z)_{B} = (x, B^{-1}G^{-}z)_{B} =$$

$$= ((I-B^{-1}G^{+})x, (I-B^{-1}G^{+})^{-1}B^{-1}G^{-}z)_{B} = (x, (I-B^{-1}G^{+})^{-1}B^{-1}G^{-}z)_{*} .$$

Из самосопряженности $(B^{-1}G^{+}-I)$ следует равенство

$$\| (B^{-1}G^{+}-I)B^{-1}G^{+}\|_{*} = \rho ,$$

где $\rho$ - спектральный радиус оператора $(B^{-1}G^{+}-I)B^{-1}G^{+}$ .

Определим в $L_2[0,H]$ эквивалентную норму

$$|||x|||_{*} = \left(\int_0^H \|x\|_{*}^{2}(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}, \quad \sqrt{d}\,|||x||| \leq |||x|||_{*} \leq \sqrt{D}\,|||x||| .$$

Обозначим $\mathcal{X} = L_2[0,H]\times L_2[0,H]$. Введем в $\mathcal{X}$ конусную норму

$$\forall y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{X} : \quad |z|_{*} = \begin{pmatrix} |||x|||_{*} \\ |||y|||_{*} \end{pmatrix} \in R^{2} .$$

Запишем систему (2.2) в операторном виде:

$$y = Vy + f , \quad V : \mathcal{X} \to \mathcal{X} , \tag{2.7}$$

а итерационный процесс (2.3) в виде

$$y_{n+1} = Vy_{n} + f .$$

Пусть $y^{*} = (x^{*}, y^{*})^{T}$ - решение уравнения (2.7). Из лемм 2,3,6 и замечания 1 следует справедливость следующих преобразований

$$|y^{*} - y_{2k+1}|_{*} = |V^{2}y^{*} - V^{2}y_{2k-1}|_{*} \leq q^{2}|y^{*} - y_{2k-1}|_{*} \leq$$

$$\leq q^{2}(|y^{*} - y_{2k+1}|_{*} + |y_{2k+1} - y_{2k-1}|_{*}) , \quad q = \theta/t^{*} .$$

Учитывая, что $q < 1$ , получим

$$|y^*-y_{2k+1}|_* \leqslant \frac{q^2}{1-q^2} q^{2k-1} \tilde{I} |y_2-y_0|_*, \quad \tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Аналогично

$$|y^*-y_{2k}|_* \leqslant \frac{q^2}{1-q^2} q^{2k} |y_2-y_0|_* \tag{2.9}$$

Учитывая (2.4) и эквивалентность норм и , убеждаемся, что неравенство (2.8) для первой координаты дает

$$|||x^*-u_{2k+1}||| = |||x^*-x_{k+1}||| \leqslant d^{-1/2}(1-q^2)^{-1} q^{2k+1} |||z_0-z_1|||,$$

а для второй

$$|||z^*-z_{k+1}||| \leqslant d^{-1/2}(1-q^2)^{-1} q^{2k+2} |||z_0-z_1|||.$$

Оценка $1/t^* \leqslant \lambda(1-g)(1-\lambda g)^{-1}$ следует из леммы 6.

Теорема доказана.

## §3. Исследование оценки скорости сходимости итерационного процесса

Мы показали, что скорость сходимости итерационного процесса (I.I) оценивается величиной

$$q^2 = (\theta/t^*)^2, \quad 1/t^* \leqslant \lambda \frac{1-g}{1-\lambda g},$$

где

$$g = \min_{1\leqslant s\leqslant n} \min_{1\leqslant m\leqslant p} \frac{1}{4\pi b_{sm}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} g_{jlsm} \leqslant 1.$$

В этом параграфе мы рассмотрим "асимптотическое" поведение величины $g$, т.е. предположим, что $n$ и $p$ достаточно велики и

$$b_{sm}^{-1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} g_{jlsm} \approx \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\gamma'_{sm})\, d\varphi' d\mu',$$

$$\cos(\gamma'_{sm}) = \mu'\mu_s + \sqrt{(1-\mu'^2)(1-\mu_s^2)}\,\cos(\varphi'-\varphi_m).$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\int_t^1 g(\zeta')d\mu' + \frac{1}{2}\int_0^t [\alpha(\mu',t)g(\zeta') + \beta(\mu',t)g(\pi-\zeta')]d\mu', \tag{3.2}$$

$$\beta(\mu',t) = \pi^{-1}\arccos\frac{\mu'\sqrt{(1-t^2)}}{t\sqrt{(1-\mu'^2)}},\ \alpha(\mu',t) = 1-\beta(\mu',t),\ \cos\zeta' = \mu'.$$

Обозначим через $T$ множество точек $t \in (0,1)$, для которых имеет место равенство

$$\int_0^t \frac{\mu'(g(\zeta') - g(\pi-\zeta'))}{\sqrt{t^2-\mu'^2}}\,d\mu' = 0. \tag{3.3}$$

Теорема 3. Имеет место соотношение

$$\min\left\{0.5;\ 0.5\int_0^1 g(\zeta')d\mu';\ \min_{t\in T}\sigma(t)\right\} \leq \min_{t\in[0,1]}\sigma(t) \approx g$$

Замечание 2. Для большого класса реальных индикатрис рассеяния множество $T$ является пустым. В этом случае, как следует из теоремы 3, скорость сходимости метода Зейделя тем хуже, чем меньше величина $\int_0^1 g(\zeta')d\mu'$. Если $\int_0^1 g(\zeta')d\mu' \geq 1/2$, то величина $g$ является постоянной (в случае $T = \varnothing$). Однако численные расчеты показывают, что с ростом $\int_0^1 g(\zeta')d\mu'$ значение $g$ увеличивается, а следовательно и улучшается скорость сходимости метода (I.I). На рис. I показана зависимость $1/t^*$ от альбедо однократного рассеяния $\lambda$ на примере индикатрисы Хеньи-Гринстейна $(g(\gamma) = (1-\varkappa^2)(1+\varkappa^2-2\varkappa\cos\gamma)^{-3/2}$, $|\varkappa|<1)$ для различных значений параметра $\varkappa$.

Доказательство теоремы 3 мы приведем в конце этого параграфа, а сейчас мы исследуем оценки скорости сходимости итерационного процесса (I.I) для некоторых конкретных индикатрис рассеяния.

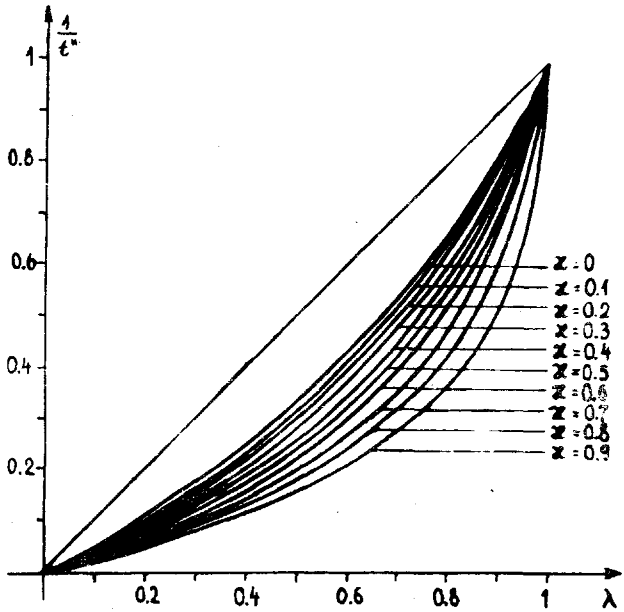



Рис. I. Зависимость величины $1/t^*$ от $\lambda$ для индикатрисы Хеньи-Гринстейна при различных значениях параметра $\varkappa$ .

3.I. Сферическая индикатриса рассеяния $(g(\gamma) \equiv 1)$.
В этом случае любая точка интервала (0,I) удовлетворяет уравнению (3.3), а функция $\sigma(t)$ является постоянной: $\sigma(t) = 0.5$ . Следовательно, скорость сходимости итерационного процесса Зейделя в этом случае оценивается как

$$q \leq \theta\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right).$$

Аналогичная оценка получается для рэлеевской $(g(\gamma)=0.75(1+\cos^2\gamma))$, биноминальной $(g(\gamma)=2^{-n}(n+1)(1+\cos\gamma)^n)$ и эллипсоидальной $(g(\gamma)=(1-(\cos\gamma)b)^{-1}2b/\ln[(1+b)/(1-b)], |b|<1)$ индикатрис рассеяния.

3.2. Индикатриса Хеньи-Гринстейна $(g(\gamma) = (1-\varkappa^2)\times$ $\times(1+\varkappa^2 - 2\varkappa\cos\gamma)^{-3/2}, \ |\varkappa|<1)$.

Очевидно, что

$$g(\zeta) - g(\pi-\zeta) > 0, \quad \mu=\cos\zeta \in [0,1], \quad \varkappa \neq 0$$

Следовательно $T = \varnothing$ . Отсюда

$$g \geq \hat{g} = \min\left\{0.5;\, 0.5\int_0^1 g(\zeta')d\mu'\right\} = \begin{cases} 0.5, & \varkappa \geq 0, \\ \dfrac{1-\varkappa^2}{2|\varkappa|}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}} - \dfrac{1}{1+|\varkappa|}\right), & \varkappa < 0. \end{cases}$$

Докажем теперь теорему 3. В силу (3.I) имеем

$$g \approx \min_{\substack{1\leq\lambda\leq n \\ 1\leq m\leq p}} (4\pi)^{-1}\int_0^1\int_0^{2\pi} g(\gamma'_{\lambda m})d\varphi' d\mu' \geq 0.5 \min_{\substack{0\leq\mu\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} (4\pi)^{-1}\int_0^1\int_0^{2\pi} g(\gamma)d\varphi' d\mu',$$

где

$$\cos(\gamma') = \mu\mu' + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}\,\cos(\varphi-\varphi').$$

Учитывая, что выражение

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} g(\gamma')d\varphi' d\mu'$$

не зависит от $\varphi$, получим

$$g \geq \min_{0\leq\mu\leq 1} (4\pi)^{-1}\int_0^1\int_0^{2\pi} g(\gamma')d\varphi' d\mu'.$$

Лемма 7. Имеет место равенство

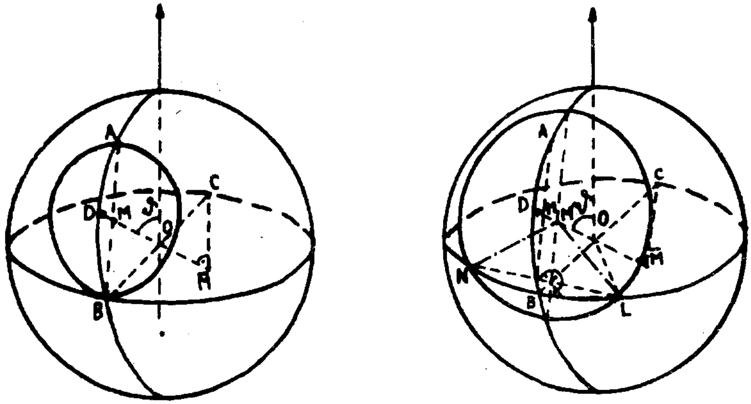
$$(4\pi)^{-1}\int_0^1\int_0^{2\pi} g(\gamma')d\varphi' d\mu' = \sigma(\vartheta),\quad \vartheta = \sqrt{1-\mu^2}$$

Доказательство. Пусть $\Omega = (\vartheta,\varphi)$, $\Omega' = (\vartheta',\varphi')$ точки единичной сферы, $\vartheta = \arccos\mu$, $\vartheta' = \arccos\mu'$. Запишем исследуемый интеграл в виде поверхностного интеграла I рода

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} g(\gamma')d\varphi' d\mu' = \int_{S^+} g(\gamma')d\Omega',\quad \gamma' = \Omega\Omega' = \mu'\mu + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}\cos(\varphi-\varphi').$$

Здесь $S^+ = \{\Omega = (\vartheta,\varphi):\ 0\leq\vartheta\leq\pi/2,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$ – "верхняя" полусфера единичной сферы. Обозначим через $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ – плоскости, перпендикулярные вектору $\Omega = \overrightarrow{OD}$ и проходящие через точки $D, M, O, \overline{M}$ соответственно (см.рис.2а), $S_{ij}$ – часть поверхности $S^+$, находящаяся между плоскостями $\pi_i$ и $\pi_j$. Очевидно, что $S^+ = S_{12} \cup S_{23} \cup S_{34}$. Отсюда

$$\int_{S^+} g(\gamma')\,d\Omega' = \int_{S_{12}} g(\gamma')\,d\Omega' + \int_{S_{23}} g(\gamma')\,d\Omega' + \int_{S_{34}} g(\gamma')\,d\Omega'.$$




а б

Рис. 2. Здесь $\vec{OZ} = \Omega$, $\vec{AB} \perp \vec{OZ}$, $\vec{MC} \parallel \vec{AB}$.

Первый интеграл, стоящий в правой части, есть (см.рис. 2а)

$$(4\pi)^{-1}\int_{S_{12}} g(\gamma')\,d\Omega' = 0.5\int_{\sqrt{1-\mu^2}} g(\zeta')\,d\mu', \quad \cos\zeta' = \mu'.$$

Рассмотрим теперь второй интеграл. Имеем (см.рис.2б)

$$(4\pi)^{-1}\int_{S_{23}} g(\gamma')\,d\Omega' = (4\pi)^{-1}\int_0^{\sqrt{1-\mu^2}} \gamma(\mu,\mu')\,g(\zeta')\,d\mu',$$

где $\gamma(\mu,\mu')$ есть величина угла $2\pi - \angle NM'L$. Из треугольника $\triangle KM'L$ находим, что $\gamma(\mu,\mu') = 2\pi - 2\arccos|KM'|/M'L$. Из треугольников $\triangle M'OL$ и $KOM'$ получим

$$|M'L| = \sqrt{1-|OM'|^2} = \sqrt{1-\mu'^2}, \quad |KM'| = |OM'|\,\mathrm{ctg}\,\vartheta = \frac{\mu\mu'}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

Отсюда следует, что

$$(4\pi)^{-1}\int_{S_{23}} g(\gamma')\,d\Omega' = 0.5\int_0^{\sqrt{1-\mu^2}} \alpha(\mu',\mu)\,g(\zeta')\,d\mu', \quad \alpha(\mu,\mu') = 1-\pi^{-1}\arccos\frac{\mu\mu'}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}}$$

Исходя из соображений симметрии, нетрудно убедиться, что

$$(4\pi)^{-1}\int\limits_{S_{34}} g(\gamma')\,d\Omega' = 0.5\int\limits_0^{\sqrt{1-\mu^2}} \beta(\mu,\mu')g(\pi-\zeta')\,d\mu',\ \beta(\mu,\mu') = 1-\alpha(\mu,\mu').$$

Лемма доказана.

На основании леммы 6 получаем неравенство

$$g \geq \min_{0\leq\mu\leq 1}\sigma(\sqrt{1-\mu^2}) = \min_{0\leq t\leq 1}\sigma(t).$$

Найдем теперь точки, в которых функция $\sigma(t)$ может достигнуть своего минимума. Это будут те точки, в которых либо $\sigma'(t)=0$, либо $\sigma'(t)$ не существует, либо $t$ - граничная точка. Имеем

$$\sigma'(t) = -0.5\,g(\arccos t) + 0.5\Big\{\alpha(t,t)g(\arccos t) + \beta(t,t)g(\arccos t) +$$

$$+\int\limits_0^t\Big[\frac{\partial\alpha(\mu',t)}{\partial t}g(\zeta') + \frac{\partial\beta(\mu',t)}{\partial t}g(\pi-\zeta')\Big]d\mu'\Big\} =$$

$$= -0.5\,g(\arccos t) + 0.5\,g(\arccos t) + 0.5\arccos 1 + 0.5\int\limits_0^t\Big[\frac{\partial\alpha(\mu',t)}{\partial t}g(\zeta') +$$

$$+\frac{\partial\beta(\mu',t)}{\partial t}g(\pi-\zeta')\Big]d\mu' = 0.5\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}\arccos\frac{\mu'\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-\mu'^2}}\big[g(\zeta')-g(\pi-\zeta')\big]d\mu'$$

$$= \frac{1}{2t\sqrt{1-t^2}}\int\limits_0^t\frac{\mu'}{\sqrt{t^2-\mu'^2}}\big[g(\pi-\zeta')-g(\zeta')\big]d\mu'.$$

Отсюда следует, что точки в которых может достигаться минимум функции $\sigma(t)$ суть точки $t=0,\ t=1$ и корни уравнения (3.3), если таковые имеются. Равенства

$$\sigma(0) = 0.5\int\limits_0^1 g(\zeta')\,d\mu',$$

$$\sigma(1) = 0.5\int\limits_0^1\big(0.5\,g(\zeta)+0.5\,g(\pi-\zeta)\big)d\mu = \frac{1}{4}\int\limits_0^1\big[g(\zeta)+g(\pi-\zeta)\big]d\mu = \frac{1}{2}$$

завершают доказательство теоремы.

Теорема доказана.

## §4. Обсуждение итерационного процесса

При решении ЛАМ методом Зейделя нам необходимо на каждом итерационном шагу решать задачу Коши вида

$$x' = Rx + f, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, H] \tag{4.I}$$

с отрицательно определенной матрицей $R$. Эта система является жесткой задачей [47]. Так, например, коэффициент жесткости для ЛАМ, построенной в §2.2.7, где $\mu_j, 1 \le j \le n$ есть узел Гаусса на [0,I], оценивается величиной $O(n^2)$. Поэтому для решения системы (4.I) необходимо применять алгоритмы, обладающие нужными свойствами устойчивости [47].

С другой стороны, из-за большой размерности задачи (4.I) желательно применять наиболее простые численные методы. Мы рассмотрим метод трапеций

$$(I - 0.5\, h_{l+1} R) x^{l+1} = (I + 0.5\, h_{l+1} R) x^{l} + \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} f(s)\,ds, \tag{4.2}$$

$$h_l = \tau_{l+1} - \tau_l, \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

В [47] показано, что этот метод является самым точным среди простейших линейных методов, пригодных для решения жестких задач.

Наряду с (4.2) рассмотрим класс "промежуточных" (между методом Эйлера, использующим разности "назад", и методом Эйлера) алгоритмов решения задачи вида (4.I)

$$(I - \beta\, h_{l+1} R) x^{l+1} = (I + \alpha\, h_{l+1} R) x^{l} + \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} f(s)\,ds. \tag{4.3}$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

Отметим, что при $\alpha = 0.5$ получаем метод трапеций, при $\alpha = 1$ – метод Эйлера, а при $\alpha = 0$ метод Эйлера, использующий разности "назад".

При применении метода (4.3) для решения системы дифференциальных уравнений (4.I) возникает необходимость решать систему линейных алгебраических уравнений вида (4.3). Ниже мы отметим некоторые полезные свойства этой системы.

Лемма 8. Матрица $I-\beta h R$ обладает следующими свойствами:

I. $I-\beta h R$ является самосопряженным положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $\langle \cdot , \cdot \rangle$

2. Если $g(\gamma)>0$, то элементы матрицы $(I-\beta h R)^{-1}$ положительны (т.е. $I-\beta h R$ является матрицей монотонного типа).

Доказательство леммы. Свойство I следует из самосопряженности и положительной определенности оператора $(-R)$ в этом гильбертовом пространстве.

Докажем теперь свойство 2. Условие $g(\gamma)>0$ гарантирует неразложимость([27],с.353) матрицы $I-\beta h R$. Покажем, что для нее выполнен слабый признак сумм по строкам. Действительно, недиагональные элементы матрицы $I-\beta h R$ удовлетворяют неравенству

$$-\frac{\lambda}{4\pi}\beta h \frac{g_{imjl}}{a_{im}} < 0, \quad i \neq j, \; m \neq l,$$

а диагональные -

$$1-\beta h a_{im}^{-1} b_{im} \left(\frac{\lambda}{4\pi} b_{im}^{-1} g_{imim} - 1\right) > 0 .$$

Для сумм элементов строки этой матрицы с учетом (2.I.6) имеем

$$1+\beta h a_{im}^{-1} b_{im} \left(1-\frac{\lambda}{4\pi b_{im}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} g_{imjl}\right) > 0,$$

то есть для матрицы $I-\beta h R$ выполнен слабый признак сумм по строкам [27]. Следовательно матрица $I-\beta h R$ является матрицей монотонного типа.

Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $g(\gamma)>0$, а также[I] $x^{l} \geq 0, \int_{t_l}^{t_{l+1}} f(s)ds \geq 0,$

$$h_{l+1} \leq \frac{1}{\alpha} \min_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq m \leq p} \frac{a_{im} b_{im}^{-1}}{1-\frac{\lambda}{4\pi} b_{im}^{-1} g_{imim}} . \tag{4.4}$$

---

[I] Запись $x \geq 0$ означает, что неравенство $\geq$ выполнено для каждой компоненты вектора.

Тогда решение $x^{l+1}$ системы (4.3) положительно.

Доказательство. На основании леммы 5 заключаем, что для положительности решения системы линейных уравнений достаточно потребовать положительности свободного члена. Он будет положителен, если потребовать положительности элементов матрицы $I+\alpha h R$, ее недиагональные элементы положительны, а диагональный элемент будет положительным, если выполнено условие (4.4).

Теорема доказана.

В заключении этого параграфа отметим, что более полные и тонкие исследования о применении разностных методов к решению ЛАМ, а также требования к этим схемам можно найти в работе [4]. В [I3] для решения задачи Коши (4.I) обсуждаются методы высокой точности (типа Адамса, Гира).

# ГЛАВА IУ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ РАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПО АЗИМУТУ

В настоящей главе будет изучаться ЛАМ, полученная в §2.3. На протяжении всей главы предполагаем, что эти системы получены путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту (понятие "равномерная дискретизация уравнения переноса" будет определено в §I настоящей главы).

Оказывается, что в этом случае матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений (2.I.I) естественным образом разбивается на блоки - циркулянты. Эти матрицы обладают рядом хороших свойств, благодаря которым исходную задачу размерности $2np$ можно разбить на $[p/2]+1$ подзадач размерности $2n$.

В первом параграфе этой главы изучается структура ЛАМ, затем на основании этих результатов во втором параграфе исходная ЛАМ преобразуется к виду, удобному для алгоритмизаций. В третьем параграфе исследуется связь ЛАМ с "классическим" вариантом метода дискретных ординат.

При изложении этой главы используются понятия матриц специального типа - циркулянтов. Определение и основные свойства этих матриц даны в приложении 3.

### §I. Структура линейно-алгебраической модели в случае равномерной дискретизации

Рассмотрим ЛАМ, полученные в §2.2. Мы будем говорить,что ЛАМ (2.2.8) получена путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту, если квадратурная формула (2.2.I) есть формула прямоугольников: $\beta_m = 2\pi/p$, $\varphi_m = (m-1)h$, $h = 2\pi/p$, $m = 1, 2, \ldots, p$.

Для ЛАМ, полученной в §2.2.2, равномерная дискретизация по азимуту означает, что разбиение отрезка (2.2.I0) является равномерным: $\varphi_l = lh$, $h = 2\pi/p$, $l = 0, 1, \ldots, p$.

В этой главе мы будем предпологать следующую зависимость свободного члена $f$ в уравнении (I.I.I) от азимута

$$f(\tau,\mu,\pi+\varphi)=f(\tau,\mu,\pi-\varphi).$$

Отметим, что это предположение выполняется, например, для уравнения, описывающего перенос излучения в плоском слое атмосферы, где

$$f(\tau,\mu,\varphi)=g(\gamma_0)\exp(-\tau/\mu_0),$$

$$\cos\gamma_0=\mu_0\mu+\sqrt{(1-\mu_0^2)(1-\mu^2)}\cos\varphi.$$

В этой главе используется векторно-матричная символика, введенная в §2.3:

$$\begin{cases} A_i\dfrac{d\mathcal{J}_i(\tau)}{d\tau}=-B_i\mathcal{J}_i(\tau)+\sum\limits_{|j|=1}^{n}G_{ij}\mathcal{J}_j(\tau)+f_i(\tau), \\ \mathcal{J}_k(0)=\mathcal{J}_{-k}(H)=0,\quad |i|,k=1,2,\dots,n \end{cases} \tag{I.3}$$

Ниже мы формулируем две теоремы о структуре системы метода дискретных ординат (2.2.8) и (2.2.II)-(2.2.I4). Предполагается, что эти системы записаны в виде (I.3). Доказательства теорем приведены в конце этого параграфа.

Теорема I. Пусть ЛАМ (2.2.8) получена путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту. Тогда система (I.3) имеет следующую структуру:

а) матрицы $G_{ij}$ являются симметричными циркулянтами с образующим вектором

$$(\varkappa_{ij}^0\ \varkappa_{ij}^1\dots\varkappa_{ij}^{q-1}\ \varkappa_{ij}^q\ \varkappa_{ij}^{q-1}\ \varkappa_{ij}^{q-2}\dots\varkappa_{ij}^1) \tag{I.4}$$

при четном $p=2q$, и

$$(\varkappa_{ij}^0\ \varkappa_{ij}^1\dots\varkappa_{ij}^q\ \varkappa_{ij}^q\ \varkappa_{ij}^{q-1}\ \varkappa_{ij}^{q-2}\dots\varkappa_{ij}^1) \tag{I.5}$$

при $p=2q+1$. Здесь

$$\varkappa_{ij}^{\ell}=\frac{\lambda}{4\pi}h^2\alpha_{|i|}\rho_{|i|}g(\gamma_{ij}^{\ell})\alpha_{|j|}\rho_{|j|},\ g(\gamma_{-ij}^{\ell})=g(\pi-\gamma_{ij}^{p/2-\ell}), \tag{I.6}$$

$$\cos\gamma_{ij}^{\ell}=\mu_i\mu_j+\sqrt{(1-\mu_i^2)(1-\mu_j^2)}\cos\ell h.$$

б) $A_i = \alpha_{|i|}\mu_i h p_{|i|} I_p$ ( $I_p$ - единичная $p\times p$ матрица)

$$p_i = \frac{4\pi}{h\sum\limits_{|j|=1}^{n}\sigma_{ij}\alpha_{|j|}}, \quad \sigma_{ij} = \begin{cases} \theta_{ij}^0 + \theta_{ij}^q + 2\sum\limits_{l=1}^{q-1}\theta_{ij}^l, & p=2q \\ \theta_{ij}^0 + 2\sum\limits_{l=1}^{q}\theta_{ij}^l, & p=2q+1, \end{cases}$$

$$\theta_{ij}^l = g(\gamma_{ij}^l), \quad l=0,1,2,\dots,q; \; |i|, j = 1,2,\dots,n;$$

в) $B_i = h\alpha_{|i|} p_{|i|} I_p$, $|i| = 1,2,\dots,n$;

г) свободный член $f(\tau)$ имеет вид

$$f_i(\tau) = \begin{cases} (f_{i0}(\tau)\; f_{i1}(\tau)\dots f_{iq-1}(\tau)\; f_{iq}(\tau)\; f_{iq-1}\dots f_{i1}(\tau))^{\mathrm{T}}, & p=2q, \\ (f_{i0}(\tau)\; f_{i1}(\tau)\dots f_{iq-1}(\tau)\; f_{iq}(\tau)\; f_{iq}(\tau)\dots f_{i1}(\tau))^{\mathrm{T}}, & p=2q+1. \end{cases} \tag{I.7}$$

Здесь

$$f_{il}(\tau) = \alpha_{|i|} p_i f(\tau,\mu_i,\varphi_l)/p_0(\tau),$$

$$p_0(\tau) = \frac{\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} f(\tau,\mu,\varphi)\,d\varphi\,d\mu}{h\sum\limits_{|j|=1}^{n}\alpha_{|j|}\sigma_j}, \quad \sigma_j = \begin{cases} f(\tau,\mu_j,\varphi_0) + f(\tau,\mu_j,\varphi_q) + 2\sum\limits_{l=1}^{q-1} f(\tau,\mu_j,\varphi_l), & p=2q; \\ f(\tau,\mu_j,\varphi_0) + 2\sum\limits_{l=1}^{q} f(\tau,\mu_j,\varphi_l), & p=2q+1. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть ЛАМ (2.2.I)-(2.2.I4) получена путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту. Тогда система (I.3) имеет следующую структуру:

а) матрица $G_{ij}$ есть симметричный циркулянт с образующим вектором вида (I.4) для четного $p$ и (I.5) для нечетного, где

$$\varkappa_{ij}^l = \frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{\mu_{i-1}}^{\mu_i}\int\limits_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}}\int\limits_{\mu_{j-1}}^{\mu_j}\int\limits_{0}^{h} g(\gamma')\,d\varphi'\,d\mu'\,d\varphi\,d\mu,$$

$$\varkappa^{l}_{-ij} = \frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{-\mu_i}^{-\mu_{i-1}}\int\limits_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}}\int\limits_{\mu_{j-1}}^{\mu_j}\int\limits_{0}^{h} g(\gamma')\,d\varphi'd\mu'd\varphi d\mu, \quad i,j = 1,2,\ldots,n;$$

$$l = 0,1,2,\ldots,q;$$

б) $A_i = \frac{h}{2}(\mu_i^2 - \mu_{i-1}^2)\, I_p, \quad -A_{-i} = A_i, \quad i = 1,2,\ldots,n;$

в) $B_i = h(\mu_i - \mu_{i-1})\, I_p, \quad B_{-i} = B_i, \quad i = 1,2,\ldots,n;$

г) свободный член $f_i(\tau)$ имеет вид (I.7), где

$$f_{il} = \int\limits_{\mu_{i-1}}^{\mu_i}\int\limits_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} f(\tau,\mu,\varphi)\,d\varphi d\mu, \quad f_{-il}(\tau) = \int\limits_{-\mu_i}^{-\mu_{i-1}}\int\limits_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} f(\tau,\mu,\varphi)\,d\varphi d\mu,$$

$$i = 1,2,\ldots,n; \quad l = 0,1,2,\ldots,q.$$

Доказательство теоремы I. Покажем, что величина $p_{im}$, определенная формулой (2.2.5) не зависит от $m$ и имеет вид (I.6). Из определения величины $g_{jlsm}$ (2.2.3) следует

$$\sum_{|s|=1}^{n}\sum_{m=1}^{p}\tilde{g}_{jlsm}\,\alpha_{|s|}h = h\sum_{|s|=1}^{n}\sum_{m=1}^{p} g_{sj}^{|l-m|}\,\alpha_{|s|},$$

где

$$g_{sj}^{l} = g(\gamma_{sj}^{l}),$$

$$\cos\gamma_{sj}^{l} = \mu_s\mu_j + \sqrt{(1-\mu_s^2)(1-\mu_j^2)}\cos\frac{2\pi l}{p}. \qquad \text{(I.8)}$$

Далее

$$\cos\gamma_{-sj}^{l} = -\mu_s\mu_j + \sqrt{(1-\mu_s^2)(1-\mu_j^2)}\cos\frac{2\pi l}{p} =$$

$$= (\mu_s\mu_j + \sqrt{(1-\mu_s^2)(1-\mu_j^2)}\cos(\pi - \frac{2\pi l}{p}) =$$

$$= -\cos\gamma_{sj}^{\frac{p}{2}-l} = \cos(\pi - \gamma^{\frac{p}{2}-l}). \qquad \text{(I.9)}$$

Отсюда, с учетом равенства $\cos(\varphi+\pi)=\cos(\varphi-\pi)$, получаем

$$\sum_{m=1}^{p} \tilde{g}_{|j|lsm} = \sum_{m=1}^{p} g(\gamma_{sj}^{l}) + \sum_{m=1}^{p} g(\pi-\gamma_{sj}^{p-l}) = \sigma_{js} + \sigma_{-js}\,.$$

откуда и следует (I.6).

Из (2.3.5) следует симметричность матриц $G_{\pm ij}$. Покажем, что $G_{\pm ij} \in Cir(p)$ (определение множества $Cir(p)$ дано в ПЗ). Действительно, из определения $g_{jlsm}$ с учетом (I.6) имеем

$$g_{jlsm} = \alpha_j h^{2} p_j \tilde{g}_{jlsm} p_s \alpha_s = \alpha_j h^{2} p_j g(\gamma_{js}^{|l-m|}) p_s \alpha_s = \varkappa_{is}^{|l-m|}\,.$$

Учитывая четность функции $\cos x$ и ее периодичность, получим

$$\cos \gamma_{js}^{|m-l|} = \mu_j \mu_s + \sqrt{(1-\mu_j^2)(1-\mu_s^2)}\cos(2\pi-(m-l)h) =$$

$$= \mu_j \mu_s + \sqrt{(1-\mu_j^2)(1-\mu_s^2)}\cos(p-m+l) = \cos \gamma_{ij}^{|p-m+l|}$$

Следовательно

$$g_{jlsm} = \varkappa_{js}^{|p-m+l|} = \varkappa_{js}^{|m-l|}\,.$$

Из определения циркулянта (см. Приложение 3) получаем, что $G_{ij} \in Cir(p)$.

Из определения величин $a_{sm}$, $b_{sm}$, формул (I.6),(I.8)-(I.9) следуют пункты а) - в) теоремы I.

Пункт г) теоремы I следует из определения $f_i(\tau)$, предположения о зависимости $f(\tau,\mu,\varphi)$ от азимута $\varphi$ и равенства $\cos(\varphi+\pi)=\cos(\pi-\varphi)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что $G_{ij} \in Cir(p)$. Из (2.3.5) следует симметричность матриц $G_{ij}$. Из определения величины (см. 2.2.I3) имеем

$$g_{jlim} = \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} \int_{\mu_{i-1}}^{\mu_i} \int_{\varphi_m}^{\varphi_{m+1}} g(a + b\cos(\varphi-\varphi_m+\varphi_m-\varphi'))\,d\varphi' d\mu' d\varphi d\mu.$$

Здесь $a=\mu\mu'$, $b=\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}$. Делая замену $u=\varphi-\varphi_m$ и $u'=\varphi'-\varphi_m'$ при $l>m$, получим

$$g_{jlsm}=\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j}\int_{\varphi_{l-m}}^{\varphi_{l-m+1}}\int_{\mu_{s-1}}^{\mu_s}\int_0^h g(\gamma')d\varphi' d\mu' d\varphi d\mu=\varkappa_{ij}^{l-m}$$

Из соотношения

$$g_{jlim}=\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j}\int_{2\pi+\varphi_l}^{2\pi+\varphi_{l+1}}\int_{\mu_{i-1}}^{\mu_i}\int_{\varphi_m}^{\varphi_{m+1}} g(\gamma')d\varphi' d\mu' d\varphi d\mu$$

для $l<m$ следует равенство

$$g_{jlim}=\varkappa_{ij}^{p-m+l}$$

Отсюда, по определению П3.2 получаем, что $G_{ij}\in Cir(p)$. Пункты б) – в) следуют из определений $a_{sm}$, $b_{sm}$, а пункт г) доказывается по аналогии с доказательством циркулянтности матрицы

## §2. Преобразование линейно-алгебраической модели переноса излучения

В этом параграфе предполагаем $p=2q$. Однако отметим, что все приводимые результаты легко переносятся на случай нечетного $p$.

В случае равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту с учетом теорем I и 2 ЛАМ примет вид

$$a_i\frac{d\mathcal{J}_i(\tau)}{d\tau}=-b_i\mathcal{J}_i(\tau)+\sum_{|j|=1}^{n}G_{ij}\mathcal{J}_j(\tau)+f_i(\tau),$$

$$\mathcal{J}_k(0)=\mathcal{J}_{-k}(H)=0,\ k,\ |i|=1,2,\dots n. \tag{2.I}$$

Значения величин $a_i$, $b_i$ в (2.I) для методов (2.2.8) и (2.2.II) -(2.2.I4) приведены в соответствующих теоремах предыдущего параграфа. Обозначим через $\mathcal{J}_i^*(\tau)$ решение ЛАМ.

Теорема 3. Компоненты $\mathcal{J}_{ik}^*(\tau)$ вектора $\mathcal{J}_i^*(\tau)$ задачи (2.I) имеют вид

$$\mathcal{J}_{ik}^*(\tau)=\mathcal{J}_i^0(\tau)+(-1)^k\mathcal{J}_i^q(\tau)+2\sum_{m=1}^{q-1}\mathcal{J}_i^m(\tau)\cos m\varphi_k, \tag{2.2}$$

$$\varphi_k=\pi k/q,\ k=0,1,\dots,q$$

где функции $\mathcal{J}_i^m$ при каждом фиксированном $m$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$a_i \frac{d\mathcal{J}_i^m(\tau)}{d\tau} = -b_i \mathcal{J}_i^m(\tau) + \sum_{|j|=1}^{n} \lambda_m(i,j)\mathcal{J}_j^m(\tau) + f_i^m(\tau) \qquad (2.3)$$

$$|i| = 1, 2, \ldots, n; \quad m = 0, 1, \ldots, q$$

с краевыми условиями

$$\mathcal{J}_k^m(0) = \mathcal{J}_{-k}^m(H) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь

$$\lambda_m(i,j) = \varkappa_{ij}^0 + (-1)^m \varkappa_{ij}^q + 2\sum_{l=1}^{q-1} \varkappa_{ij}^l \cos \pi m l/q,$$

$$f_i^m(\tau) = p^{-1}(f_{i0}(\tau) + (-1)^m f_{iq}(\tau) + 2\sum_{l=1}^{q-1} f_{il}(\tau) \cos \pi m l/q.$$

Замечание I. Отметим, что система дифференциальных уравнений (2.3) не является ЛАМ.

Доказательство теоремы основано на линейном преобразовании системы (2.I), осуществляемом унитарной матрицей $U$ (см.П3.4). Умножим слева систему (2.I) на матрицу $p^{-1/2} U$. Обозначим

$$\hat{\mathcal{J}}_i(\tau) = p^{-1/2} U^* \mathcal{J}_i^*(\tau), \quad \hat{f}_i(\tau) = p^{-1/2} U^* f_i(\tau), \quad \Lambda_{ij} = U^* G_{ij} U.$$

Отсюда, с учетом $U^* U = I$, система (2.I) примет вид

$$a_i \frac{d\hat{\mathcal{J}}_i(\tau)}{d\tau} = -b_i \hat{\mathcal{J}}_i(\tau) + \sum_{|j|=1}^{n} \Lambda_{ij} \hat{\mathcal{J}}_j(\tau) + \hat{f}_i(\tau), \qquad (2.4)$$

$$|i| = 1, 2, \ldots, n.$$

Ввиду невырожденности матрицы $U^*$, системы (2.4) и (2.I) эквивалентны. Из (П3.4) следует, что матрица $\Lambda_{ij}$ является диагональной, $m+1$ -й элемент $\lambda_m(i,j)$ которой выражается формулой

$$\lambda_m(i,j) = \varkappa_{ij}^0 + (-1)^m \varkappa_{ij}^q + 2\sum_{l=1}^{q-1} \varkappa_{ij}^l \cos \pi m l/q. \qquad (2.5)$$

Из (П3.7) следует соотношение

$$\lambda_m(i,j) = \lambda_{p-m}(i,j). \tag{2.6}$$

Следовательно, диагональ матрицы $\Lambda_{ij}$ (размером $p \times p, p = 2q$) содержит не более $q+1$ различных элементов:

$$\lambda_0(i,j),\ \lambda_1(i,j),\ \ldots,\ \lambda_{q-1}(i,j),\ \lambda_q(i,j).$$

Вычислим теперь $n+1$ компоненту $f_i^m(\tau)$ вектора $\hat{f}_i(\tau) = p^{-1/2} U^* f_i(\tau)$. С учетом (П3.6) получим

$$f_i^m(\tau) = p^{-1}\Big(f_{i0} + \sum_{l=0}^{p-1} f_{il}(\tau)\,\tau_m^l\Big) = p^{-1}\Big(f_{i0} + f_{iq}\cos \pi m +$$

$$+\sum_{l=1}^{q-1} f_{il}\,(\tau_m^l + \tau_m^{p-l}) = p^{-1}\Big(f_{i0} + (-1)^m f_{iq} + 2\sum_{l=1}^{q-1} f_{il}\cos\frac{\pi m l}{q}\Big) \tag{2.7}$$

Из равенств

$$f_i^{p-k}(\tau) = p^{-1}\Big(f_{i0} + (-1)^{p-k} f_{iq} + 2\sum_{l=1}^{q-1} f_{il}\cos \pi(p-k)/q\Big) =$$

$$= f_i^k(\tau), \qquad |i| = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

следует соотношение, аналогичное (2.6). Отсюда, вектор $\hat{f}_i(\tau)$ (длиной $p = 2q$) содержит не более $q+1$ различных компонент:

$$f_i^0(\tau),\ f_i^1(\tau),\ \ldots,\ f_i^q(\tau).$$

Если теперь записать систему (2.4) в координатом виде, то с учетом (2.5) и (2.7), получим систему дифференциальных уравнений, которая отличается от системы дифференциальных уравнений (2.3) лишь областью изменения индекса $m$: $m = 0, 1, \ldots, p$. Из (2.6) и (2.8) следует, что (2.3) содержит не более чем $q+1$ различных систем, которые получаются при $m = 0, 1, \ldots, q$. Отсюда, в частности, следует, что компоненты $\mathcal{J}_i^m$ искомого вектора $\hat{\mathcal{J}}_i$ связаны соотношением

$$\mathcal{J}_i^m = \mathcal{J}_i^{p-m} \tag{2.9}$$

Пусть теперь известно решение $\hat{\mathcal{J}}_i(\tau)$ системы (2.4). Тогда решение $J_i^*(\tau)$ системы (2.I), в силу эквивалентности систем (2.I) и (2.4), определяется формулой

$$\mathcal{J}_i^*(\tau) = p^{1/2} U \hat{\mathcal{J}}_i(\tau).$$

Следовательно (с учетом (2.9)), имеет место цепочка равенств

$$\mathcal{J}_{ik}^*(\tau) = \sum_{l=0}^{p-1} r_l^k \mathcal{J}_i^l(\tau) = \mathcal{J}_i^0 + \mathcal{J}_i^q \cos k\pi + \sum_{l=0}^{q-1} \mathcal{J}_l^k(\tau)(r_l^k + r_l^{p-k}) =$$

$$= \mathcal{J}_i^0(\tau) + (-1)^k \mathcal{J}_i^q(\tau) + 2\sum_{l=1}^{q-1} \mathcal{J}_i^l \cos \pi kl/q .$$

Последнее завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Несмотря на то, что системы дифференциальных уравнений (2.3) не являются ЛАМ, их можно решать итерационным методом Зейделя. При этом утверждения теоремы 3.I сохраняются. Это следует из эквивалентности систем (2.I), (2.3) и унитарности преобразования $U$ .

## §3. Связь линейно-алгебраической модели переноса излучения с методом дискретных ординат, основанном на представлении индикатрисы рассеяния в виде суммы по полиномам Лежандра

Предположим, что индикатриса рассеяния $g(\gamma)$ представима в виде конечной суммы

$$g(\gamma) = \sum_{m=0}^{N-1} \omega_m P_m(\cos\gamma), \tag{3.I}$$

а свободный член $f(\tau,\mu,\varphi)$ – в виде[I]

$$f(\tau,\mu,\varphi) = \sum_{m=0}^{N-1} (2-\delta_{0m}) f_m(\mu) \cos m\varphi . \tag{3.2}$$

Здесь $\omega_m$ – заданные коэффициенты, а $P_m$ – полиномы Лежандра. Известно (см., например, [56]), что в этом случае решение уравнения переноса (I.I.I) представимо в виде

$$\mathcal{J}(\tau,\mu,\varphi) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{J}^m(\tau,\mu) \cos m\varphi , \tag{3.3}$$

[I] Отметим, что предположение (3.2) выполняется в задачах атмосферной оптики. В этом случае $f(\tau,\mu,\varphi) = \mathrm{const}\, g(\gamma_0) \exp(-\tau/\mu_0)$, $\cos\gamma_0 = \mu\mu_0 + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu_0^2)} \cos\varphi$

а функции $\mathcal{J}^m(\tau,\mu)$ определяются из задачи

$$\mu\frac{\partial \mathcal{J}^m(\tau,\mu)}{\partial\tau}=-\mathcal{J}^m(\tau,\mu)+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} g_m(\mu,\mu')\mathcal{J}^m(\tau,\mu')\,d\mu'+f_m(\tau,\mu), \tag{3.4}$$

$$\mathcal{J}^m(0,\mu)=\mathcal{J}^m(H,\mu),\ 0<\mu\le 1,$$

где

$$g_m(\mu,\mu')=\sum_{\ell=m}^{N-1}\omega_m^{\ell}P_\ell^m(\mu')P_\ell^m(\mu),\quad \omega_m^{\ell}=\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\omega_\ell,$$

а $P_\ell^m(\mu)$ - присоединенные полиномы Лежандра.

Классический вариант метода дискретных ординат (МДО) основывается на замене интеграла в правой части уравнения (3.4) какой-либо квадратурной формулой (КФ):

$$\int_{-1}^{1} h(\mu)\,d\mu\approx\sum_{|j|=1}^{\bar N} h(\mu_j)\,\alpha_{|j|},\quad \mu_{-j}=-\mu_j,\ j=1,2,\dots,\bar N. \tag{3.5}$$

и решении получаемой системы дифференциальных уравнений

$$\mu_i\frac{d\mathcal{J}_i^m(\tau)}{d\tau}=-\mathcal{J}_i^m(\tau)+\frac{\lambda}{2}\sum_{|j|=1}^{\bar N} g_m(\mu_i,\mu_j)\mathcal{J}_j^m(\tau)+(2-\delta_{0m})f_m(\tau,\mu_i),$$

$$\mathcal{J}_{|i|}^m(0)=\mathcal{J}_{-|i|}^m(H)=0,\ |i|=1,2,\dots,\bar N. \tag{3.6}$$

Отметим, что если $2\bar N\ge N$ и (3.5) есть КФ Гаусса, то МДО эквивалентен $P_{N-1}$ - системе метода сферических гармоник [I4, 67].

Рассмотрим ЛАМ (2.2.7), полученную путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту. Ниже мы покажем что при определенных условиях ЛАМ и классический вариант МДО эквивалентны, а следовательно и эквивалентны ЛАМ и приближение.

Лемма I. Пусть индикатриса рассеяния $g(\gamma)$ и свободный член $f(\tau,\mu,\varphi)$ уравнения переноса (I.I.I) представимы в виде (3.I) и (3.2) соответственно. Тогда $k$-я компонента $\mathcal{J}_{ik}^*(\tau)$ решения ЛАМ $\mathcal{J}_i^*(\tau)$ представима в виде (2.2), где функция $\mathcal{J}_i^m(\tau)$ при каждом фиксированном $m: m=0,1,\dots,q,\ p=2q$, удовлетворяет системе (2.3), а величины $\lambda_m(i,j)$ и $f_i^m$ есть

$$\lambda_m(i,j)=\frac{2}{4\pi}h^2\alpha_{|i|}\alpha_{|j|}\rho_{|i|}\rho_{|j|}\sum_{k=0}^{N-1}(2-\delta_{0k})g_k(\mu_i,\mu_j)\Delta_{mk}^{p}, \qquad (3.7)$$

$$f_i^m(\tau)=p^{-1}h\alpha_{|i|}\rho_{|i|}\rho_0(\tau)\sum_{k=0}^{N-1}(2-\delta_{0k})f_k(\tau,\mu_i)\Delta_{mk}^{p}. \qquad (3.8)$$

Здесь

$$\Delta_{mk}^{p}=\begin{cases}0, & (m+k)\notin\mathcal{P}\ \&\ |m-k|\in\mathcal{P},\\ p/2, & \{m+k\in\mathcal{P}\ \&\ |m-k|\notin\mathcal{P}\}\vee\{m+k\notin\mathcal{P}\ \&\ |m-k|\in\mathcal{P}\},\\ p, & (m+k)\in\mathcal{P}\ \&\ |m-k|\in\mathcal{P},\end{cases}$$

$$\mathcal{P}=\{0,p,2p,3p,\dots\},$$

а коэффициенты $\rho_i$, $\rho_0(\tau)$ определяются соотношением

$$\rho_i=\frac{2}{\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{ij}+\sigma_{-ij})},\quad \sigma_{ij}=g_0(\mu_i,\mu_j)+{\sum_m}'g(\mu_i,\mu_j),$$

$$\rho_0(\tau)=\frac{\int_{-1}^{1}g_0(\tau,\mu)\,d\mu}{\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{0j}+\sigma_{0-j})},\quad \sigma_{0j}=f_0(\tau,\mu_j)+{\sum_m}'f_{mp}(\tau,\mu_j),$$

где ${\sum_m}'$ означает, что суммирование ведется по всем $m$, для которых $mp\leq N-1$.

Доказательство. Имеем

$$\lambda_m(i,j)=\varkappa_{ij}^{0}+(-1)^m\varkappa_{ij}^{q}+2\sum_{l=1}^{q-1}\varkappa_{ij}^{l}\cos\pi ml/q=$$

$$=\sum_{l=0}^{2q-1}\varkappa_{ij}^{l}\cos(2\pi ml/2q)=\frac{2}{4\pi}h^2\alpha_i\alpha_j\rho_i\rho_j\sum_{l=0}^{p-1}g(\delta_{ij}^{l})\cos 2\pi ml/p,$$

$$g(\delta_{ij}^{l})=g(\mu_i\mu_j+\sqrt{(1-\mu_i^2)(1-\mu_j^2)}\cos(2\pi l/p)).$$

Используя разложение (3.I) и теорему сложения для полиномов Лежандра, получим

$$\frac{4\pi\lambda_m(i,j)}{h^2\alpha_i\alpha_j\rho_i\rho_j}=\sum_{l=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi ml}{p}\sum_{k=0}^{N-1}(2-\delta_{0k})g_k(\mu_i,\mu_j)\cos\frac{2\pi lk}{p}=$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(2-\delta_{0k})g_k(\mu_i,\mu_j)\sum_{l=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi lm}{p}\cos\frac{2\pi lk}{p}.$$

В (П3.7) показано, что

$$\sum_{l=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi lm}{p}\cos\frac{2\pi lk}{p}=\Delta_{km}^{p}.$$

Отсюда следует равенство (3.7)

Докажем теперь формулу (3.8). По теореме 3 имеем

$$f_i^m(\tau)=p^{-1}\left(f_{i0}(\tau)+(-1)^k f_{iq}+2\sum_{l=1}^{q-1}f_{il}\cos\frac{2\pi kl}{q}\right)= \tag{3.9}$$

$$=p^{-1}\alpha_{|i|}hp_{|i|}p_0(\tau)\sum_{l=1}^{p-1}f(\tau,\mu_i,lh)\cos\frac{2\pi kl}{p}.$$

Подставляя (3.2) в (3.9), получим формулу (3.8). Подставляя (3.I), (3.2) в определение величин $p_i$, $p_0(\tau)$ (см. теорему I) и используя свойство $\Delta_{0m}^{p}$, получим сформулированные в лемме I выражения для $p_i$, $p_0(\tau)$.

Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения леммы I. Кроме этого, пусть $p\geqslant 2N$. Тогда компоненты $\mathcal{J}_{ik}^{*}(\tau)$ вектора $\mathcal{J}_i^{*}(\tau)$ представимы в виде

$$\mathcal{J}_{ik}^{*}=\sum_{m=0}^{N-1}\mathcal{J}_i^m(\tau)\cos\frac{2\pi k}{p}m,$$

где функции $\mathcal{J}_i^m(\tau)$ удовлетворяют при каждом фиксированном $m$ $(m=0,1,\dots,N-1)$ системе дифференциальных уравнений

$$\mu_i\frac{\partial\mathcal{J}_i^m(\tau)}{d\tau}=-\mathcal{J}_i^m(\tau)+\frac{\lambda}{2}\sum_{|j|=1}^{n}g_m(\mu_i,\mu_j)\alpha_{|j|}p_{|j|}\mathcal{J}_j^m(\tau)+$$

$$+(2-\delta_{0m})p_0(\tau)f_m(\tau,\mu_i),\quad |i|=1,2,\dots,n, \tag{3.10}$$

а коэффициенты $p_i$, $p_0(\tau)$ определяются формулами

$$p_i=\frac{2}{\sum\limits_{|j|=1}^{n}g_0(\mu_i,\mu_j)\alpha_{|j|}} \tag{3.11}$$

$$\rho_0(\tau) = \frac{\int\limits_{-1}^{1} f_0(\tau,\mu)\,d\mu}{\sum\limits_{|j|=1}^{n} f_0(\tau,\mu_j)\,\alpha_{|j|}} . \qquad (3.12)$$

Доказательство. При $p = 2q \geq N$ имеем

$$\Delta^p_{mk} = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ p/2, & m = k,\ m+k \neq 0, \\ p, & m = k = 0. \end{cases}$$

Отсюда, согласно лемме I, получаем

$$\lambda_m(i,j) = \frac{\lambda}{4\pi} h^2 \alpha_{|i|} \alpha_{|j|} \rho_{|i|} \rho_{|j|} g_m(\mu_i,\mu_j),$$

$$f_i^m(\tau) = h\,\alpha_{|i|} \rho_{|i|} \rho_0(\tau) f_m(\tau,\mu_i),\ \lambda_q(i,j) \equiv 0,\ f_i^q(\tau) = 0 .$$

Подставляя полученные выражения в (2.4) и деля на $h\alpha_{|i|}\rho_{|i|}$, придем к (3.10). Выражения (3.11), (3.12) следуют из соответствующих выражений для $\rho_i$, $\rho_0(\tau)$ леммы I.

Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что система (3.10) отличается от системы (3.6) только наличием в ней коэффициентов $\rho_i \cdot \rho_0(\tau)$. Если $\rho_i = \rho_0(\tau) \equiv 1$, то при выполнении условий теоремы 4 ЛАМ и "классический" вариант МДО совпадают. Равенство $\rho_i = \rho_0(\tau) \equiv 1$ будет выполнено в том и только в том случае, если

$$\sum_{|j|=1}^{n} g_0(\mu_i,\mu_j)\,\alpha_{|j|} = \frac{1}{2} = \int\limits_{-1}^{1} g_0(\mu_i,\mu')\,d\mu',\quad i = 1,2,\dots,n, \qquad (3.13)$$

$$\int\limits_{-1}^{1} f_0(\tau,\mu)\,d\mu = \sum_{|j|=1}^{n} f_0(\tau,\mu_j)\,\alpha_{|j|} . \qquad (3.14)$$

Равенство (3.13) будет выполнено, например, если (3.5) есть КФ Гаусса и $2n \geq N$. Отсюда следует

Теорема 5. Пусть индикатриса рассеяния $g(\gamma)$ и свободный член $f(\tau,\mu,\varphi)$ уравнения переноса (I.I.I) представимы в виде (3.I) и (3.2) соответственно, КФ (3.5) есть формула Гаусса, $2n = 2\tilde{N} \geq N$ и выполнено равенство (3.4). Тогда ЛАМ

(2.2.7), полученная путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту и "классический" вариант МДО совпадают.

## §4. Линейно-алгебраическая модель переноса как система дифференциальных уравнений с коэффициентами из $Cir(p)$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$a_i \frac{d\mathcal{J}_i(\tau)}{d\tau} + b_i \mathcal{J}_i(\tau) = \sum_{|j|=1}^{n} G_{ij} \mathcal{J}_j(\tau) + f_i(\tau), \qquad (4.1)$$

$$\mathcal{J}_{|i|}(0) = \mathcal{J}_{-|i|}(H) = 0, \quad |i| = 1, 2, \ldots, n,$$

которая отличается от (2.1) тем, что $\mathcal{J}_i(\tau), f_i(\tau), |i| = 1, 2, \ldots, n,$ являются циркулянтами с образующим вектором

$$(\mathcal{J}_0^i \ \mathcal{J}_1^i \ldots \mathcal{J}_q^i \ \mathcal{J}_{q+1}^i \ldots \mathcal{J}_{p-1}^i),$$

$$(f_{i0}(\tau) \ f_{i1}(\tau) \ldots f_{iq}^i(\tau) \ldots f_{ip}^i(\tau))$$

соответственно.

Теорема 6. Решение системы (4.1) есть симметричный циркулянт, образующий вектор которого удовлетворяет системе (2.1).

Доказательство. Из (П3.8) следует, что умножение циркулянта на вектор эквивалентно произведению двух циркулянтов. Это позволяет отождествлять системы (2.1) и (4.1). Отсюда следует, что образующий вектор решения $\mathcal{J}_i(\tau)$ удовлетворяет системе (2.1). Симметричность $\mathcal{J}_i(\tau)$ следует из (2.9).

Теорема доказана.

Итак, ЛАМ, полученную путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту, можно отождествлять с системой линейных дифференциальных уравнений размерности $2n$, коэффициенты и искомые функции которой принадлежат множеству $Cir^*(p)$ - симметричных циркулянтов порядка $p$. Это множество замкнуто относительно умножения, сложения и обращения (см. (П3.10)-(П3.13)).

## ГЛАВА У

## СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЫ ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА

В настоящей главе мы будем рассматривать интегральную форму ЛАМ. В рамках понятий теории линейной алгебры мы построим решение интегрального уравнения при специальном виде свободного члена. Основным в этой главе является понятие характеристического уравнения, которое, в конечном итоге, определяет как решение ЛАМ, так и ее интегральной формы.

Перенос излучения в некоторых моделях разорванной облачности описывается интегральным уравнением, не имеющим интегродифференциального аналога [7-8]. Поэтому здесь мы рассматриваем более широкий класс систем интегральных уравнений, чем это требует интегральная форма ЛАМ. Для этих систем сформулируем теоремы существования, единственности и структуры решения. В конце главы соответствующие теоремы будут сформулированы и для интегральной формы ЛАМ.

### §I. Система интегральных уравнений

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$u(\tau) = \int_0^\tau A^1 e^{-B^1(\tau-s)} u(s)\,ds + \int_\tau^H A^2 e^{B^2(\tau-s)} u(s)\,ds + f(\tau), \qquad (I.I)$$

Здесь[I]

$$f(\tau) = A^0 \exp(B^0\tau) c_0,$$

$$A^\varkappa = (a_{ij}^\varkappa)_{i,j=1,n}, \quad B^\varkappa = (b_j \delta_{ij})_{i,j=1,n}, \quad b_j^\varkappa > 0,$$

---

[I] Здесь и далее приняты следующие обозначения: $(a_{ij})_{i,j=1,n}$ – матрица размером $n\times n$, $i$-ая строка которой есть $(a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in})$, $(c_j)_{j=1,n}$ – вектор-столбец длины $n$; $\delta_{ij}$ – символ Кронекера; $I_n$ – единичная матрица размером $n\times n$.

$$C_0 = (C_i^0)_{i=1,n}\ ;\ \varkappa = 0,1,2;\ \omega = 1,2,\ j = 1,2,\dots,n\ .$$

Для исследования этой системы нам понадобится ряд обозначений, определений и свойств матриц, которые мы приведем в следующем параграфе.

## §2. Некоторые определения, обозначения и леммы

Первые тринадцать пунктов этого параграфа нам необходимы для формулировки теорем, приводимых в следующем параграфе. (Нижевводимые обозначения идут в том же порядке, в каком они появляются в последующих параграфах.)

1. Для матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ определим

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\ ,\quad |A| = (|a_{ij}|)_{i,j=1,n}\ .$$

2. Через $C[0,H]$ обозначено пространство вектор-функций $(x_j(\tau))_{j=1,n}$, в котором норма задается как

$$\|x\| = \max_{1\le j\le n} \max_{0\le\tau\le H} |x_j(\tau)|\ .$$

3. Обозначим через $diag\, A$ множество диагональных элементов матрицы $A$ :

$$diag\, A = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}\ .$$

4. Для системы (1.1) определим матрицу-функцию

$$T(s) = A^1 (sI_n + B^1)^{-1} - A^2 (sI_n - B^2)^{-1}\ .$$

5. Уравнение $det\,(T(s) - I_n) = 0$ назовем характеристическим для системы (1.1)

6. Через $ker\, A$ обозначено ядро матрицы $A$ :

$$ker\, A = \{x \in R^n;\ Ax = 0\}\ .$$

Символом $dim\, \mathcal{X}$ будем обозначать размерность пространства $\mathcal{X}$ , а через $rang\, A$ - ранг матрицы $A$ . В дальнейшем мы часто будем пользоваться соотношением

$$rang\, A + dim\, ker\, A = n\ ,\quad A = (a_{ij})_{i,j=1,n}\ .$$

7. $\Lambda$ -множество корней характеристического уравнения. Мы считаем, что корень $\lambda$ этого уравнения входит в множество $\Lambda$ столько раз, какова его кратность.

8. $\mathcal{D}(\Lambda)$ - множество различных корней характеристического уравнения.

9. Для учета одинаковых элементов диагонали матрицы $B^1$ введем множества $M(s)$ по следующему алгоритму:

$$M(1)=\{j:\ b^1_j=b^1_1\}.$$

Берем $b^1_{k_s}\in diag(B^1)/\{b^1_r: r\in\bigcup_{l=1}^{s-1}M(l)\}$. Полагаем

$$M(s)=\{j:\ b^1_j=b^1_{k_s}\},\quad s=1,2,\dots,q.$$

Множества $M(s)$ содержат индексы равных элементов диагонали матрицы $B^1$.

10. Для учета одинаковых элементов диагонали матрицы $B^2$ введем множества $Q(s),\ s=1,2,\dots,r$ по алгоритму предыдущего пункта, т.е. множества, содержащие индексы равных элементов диагонали матрицы $B^2$.

11. Через $A_M$ обозначим матрицу, составленную из столбцов $a_p$ матрицы $A$, где $p$ пробегает множество

$$M=\{p_1,p_2,\dots,p_k,\ p_i\leq n\}.$$

12. Через $\bar M(s)\subseteq M(s)$ обозначено множество индексов, указывающих номера линейно независимых строк матрицы $A^1_{M(s)}$. Отметим, что это множество определяется неоднозначно [32].

13. Через $\bar Q(s)\subseteq Q(s)$ обозначено множество индексов, указывающих номера линейно независимых строк матрицы $A^2_{Q(s)}$. Отметим, что это множество определяется неоднозначно.

14. Для каждой тройки матриц $(G,\Lambda,B)$:

$$G=(g_{ij})_{i,j=1,n},\quad \Lambda=(\lambda_j\delta_{ij})_{i,j=1,n},\quad B=(b_j\delta_{ij})_{i,j=1,n},$$

определим матрицу

$$G[\Lambda,B]=\left(\frac{g_{ij}}{\lambda_i+b_j}\right)_{i,j=1,n}.$$

Здесь мы допускаем возможность равенства $\lambda_i+b_j=0$ при $g_{ij}=0$. В этом случае полагаем $g_{ij}(\lambda_i+b_j)^{-1}=0$. Имеет место

Лемма 1. Пусть $\Lambda=(\lambda_j\delta_{ij})_{i,j=1,n}$, $B=(b_i\delta_{ij})_{i,j=1,n}$ и $G=(g_{ij})_{i,j=1,n}$ причем $\lambda_i+b_j\neq 0$ при $g_{ij}\neq 0$. Тогда имеет место формула

$$\int_a^t exp(\Lambda\tau)\,G\,exp(B\tau)d\tau=exp(\Lambda\tau)\,G[\Lambda,B]\,exp(B\tau)\Big|_a^t.$$

15. Мы говорим, что пара матриц $(\Lambda, G)$ принадлежит классу $T(A^1, A^2, B^1, B^2)$ и будем писать

$$(\Lambda, G) \in T(A^1, A^2, B^1, B^2),$$

если $j$-тый элемент $\lambda_j$ диагонали матрицы $\Lambda = (\lambda_j \delta_{ij})_{i,j=1,n}$ и $j$ - тый столбец $g_j$ матрицы $G$ связаны соотношением

$$(T(\lambda_j) - I) g_j = 0.$$

Очевидно, что вектор $g_j$ может быть нетривиальным тогда и только тогда когда $\lambda_j$ удовлетворяет характеристическому уравнению $\det(T(\lambda_j) - I) = 0$. Через $T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$ обозначим декартов квадрат множества $T(A^1, A^2, B^1, B^2)$, а $\mathcal{E} = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle$ элементы множества $T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$.

16. В этом пункте мы приведем ряд лемм, необходимых в дальнейшем.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{X}(\cdot)$ есть функция от матрицы, $A$ - некоторая фиксированная матрица. Тогда, если найдется матрица $G$ и диагональная обратимая матрица $\mathcal{D}$, такие что

$$\mathcal{X}(G) = A\mathcal{D}, \quad \mathcal{D} = (d_j \delta_{ij})_{i,j=1,n},$$

то имеет место тождество:

$$\mathcal{X}(G) \exp(B\tau)\xi = -A \exp(B\tau)\eta,$$

где $B$ - диагональная матрица, а $\xi = -\mathcal{D}^{-1}\eta$.

Доказательство следует из следующих равенств

$$\mathcal{X}(G)\exp(B\tau)\xi = A\mathcal{D}\exp(B\tau)\xi = A\exp(B\tau)\mathcal{D}\xi = -A\exp(B\tau)\eta, \; \eta = -\mathcal{D}\xi.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Имеют место следующие утверждения:

а) для произвольных матриц $A$, $C$ имеют место эквивалентности

$$A\exp(C\tau)x \equiv 0 \Leftrightarrow AC^k x = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots \Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \ker(AC^k);$$

б) для матриц $A$, $B$ и диагональных матриц $C$, $\mathcal{D}$ таких что $diag(C) \cap diag(B) = \emptyset$ имеют место эквивалентности

$$A\exp(C\tau)x + B\exp(\mathcal{D}\tau)y \equiv 0 \Leftrightarrow A\exp(C\tau)x \equiv 0 \;\&\; B\exp(\mathcal{D}\tau)y \equiv 0$$

Доказательство вытекает из разложения функции $\exp(C\tau)$ в степенной ряд.

17. Пусть $\mathfrak{M}_i$ некоторые множества $(i = 1, 2, \ldots \ell)$. Будем

использовать следующую запись

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_l \end{pmatrix} = (\xi_1 \, \xi_2 \dots \xi_l)^T, \quad \xi_i \in \mathfrak{M}_i$$

18. Для каждого $\varepsilon = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle \in T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$ определим пространство

$$\Xi(\varepsilon) = \{ \xi = (\xi_1, \xi_2)^T, \ \xi_1, \xi_2 \in R^n : G_1 \exp(\Lambda_1 \tau)\xi_1 + G_2 \exp(\Lambda_2 \tau)\xi_2 = 0 \}$$

и целочисленную функцию $\gamma(\varepsilon) = dim\, \Xi(\varepsilon)$.

## §3. Существование решения уравнения (I.I) и его структура

Теорема I. Пусть выполнено условие

$$\| |A^1| (B^1)^{-1} + |A^2| (B^2)^{-1} \| (1 - \exp(-\beta H)) < 1, \ \beta = \max_{1 \le j \le n} \{ b_j^1 ; b_j^2 \}. \quad (3.I)$$

Тогда система (I.I) имеет единственное решение при любом свободном члене $f \in C[0, H]$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (3.I) предыдущей теоремы и

$$[diag(-B^1) \cup diag(B^2)] \cap diag(B^0) = \emptyset ; \quad (3.2)$$

$$\forall \sigma \in diag(-B^1) \cup diag(B^2) \cup diag(B^0) \Rightarrow det(T(\sigma) - I) \ne 0; \quad (3.3)$$

$$\sum_{\lambda \in \partial(\Lambda)} dim\, ker(T(\lambda) - I) = \sum_{i=1}^{q} rang A^1_{M(i)} + \sum_{i=1}^{r} rang A^2_{Q(i)} . \quad (3.4)$$

Тогда решение уравнения (I.I) единственно и имеет вид

$$u(\tau) = G_1 \exp(\Lambda_1 \tau)\xi_1 + G_2 \exp(\Lambda_2 \tau)\xi_2 + G_0 \exp(B^0 \tau)\xi_0 , \quad (3.5)$$

где матрицы $G_1$, $G_2$, $G_0$, диагональные матрицы $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ и вектора $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_0$ строятся по следующим правилам.

Правило а). Находим все различные корни характеристического уравнения[I]: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\theta$. Оказывается, что количество $\theta$ различных корней характеристического уравнения не может превышать числа

$$æ = \sum_{i=1}^{q} rang\, A^1_{M(i)} + \sum_{i=1}^{r} rang\, A^2_{Q(i)} , \qquad (3.6)$$

причем неравенство $\theta \leq æ$ выполняется независимо от выполнения условия (3.4). Для каждого корня $\lambda_i$ характеристического уравнения находим максимальное количество $n_i$ линейно независимых решений уравнения

$$(T(\lambda_i) - I)g = 0.$$

Пусть эти решения есть $g^i_1, g^i_2, \ldots, g^i_{n_i}$. Оказывается, что общее количество $\sum_{i=1}^{\theta} n_i$ этих векторов есть $æ$. Строим диагональные матрицы $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$ такие, что

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_\theta I_{n_\theta} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее строим матрицы $G_1$, $G_2$ такие, что

$$(G_1 \vdots G_2) = \underbrace{(g^1_1\, g^1_2 \ldots g^1_{n_1}\, g^2_1\, g^2_2 \ldots g^2_{n_2} \ldots g^\theta_1\, g^\theta_2 \ldots g^\theta_{n_\theta}\, \theta \ldots \theta)}_{2n \text{ столбцов}}$$

Здесь через $(G_1 \vdots G_2)$ обозначена матрица, составленная из матриц $G_1$ и $G_2$, $\theta$ - вектор-столбец с нулевыми координатами.

Правило б). $j$-й столбец $g^0_j$ матрицы $G_0$ определяется из уравнения

$$(T(b^0_j) - I)g^0_j = a^0_j ,$$

---

[I] Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни, то выделение решения из (3.5) производится стандартными методами.

где $\alpha_j^0$ есть $j$-й столбец матрицы $A_0$ .

Правило в) $\xi_0 = -C_0$

Правило г) Первые $\varkappa$ координат $\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_{n_2}^2, \ldots \xi_1^\theta, \xi_2^\theta, \ldots, \xi_{n_\theta}^\theta$ вектора

$$\xi = (\xi_1 \ \xi_2)^T, \ \xi_1, \xi_2 \in R^n$$

определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n_1} \frac{g_{ik}^1}{b_i^1+\lambda_1}\xi_k^1 + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{g_{ik}^2}{b_i^1+\lambda_2}\xi_k^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{g_{ik}^\theta}{b_i^1+\lambda_\theta}\xi_k^\theta =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{g_{ik}^0}{b_i^1+b_k^0} c_k^0, \quad i \in \bigcup_{j=1}^{q} \bar{M}(j), \tag{3.7}$$

$$exp(\lambda_1 H)\sum_{k=1}^{n_1} \frac{g_{ik}^1}{\lambda_1 - b_i^2}\xi_k^1 + exp(\lambda_2 H)\sum_{k=1}^{n_2} \frac{g_{ik}^2}{\lambda_2 - b_i^2}\xi_k^2 + \ldots +$$

$$+ exp(\lambda_\theta H)\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{g_{ik}^\theta}{\lambda_\theta - b_i^2}\xi_k^\theta = \sum_{k=1}^{n} \frac{g_{ik}}{b_k^0 - b_i^2} exp(b_k^0 H) c_k^0, \ i \in \bigcup_{j=1}^{r} Q(j), \tag{3.8}$$

а остальные полагаем равными нулю. Здесь через $g_{ik}^s$ обозначена $i$ -я координата вектора $g_k^s$ . Оказывается, что общее количество уравнений в системе (3.7)-(3.8) есть $\varkappa$ , а сама система имеет единственное решение.

Замечание I. Условие (3.4) является трудно проверяемым. Поэтому на практике мы рекомендуем использовать следующее, эквивалентное (3.4) условие: существует такое $\varepsilon^* = \langle (\Lambda_1^*, G_1^*), (\Lambda_2, G_2)\rangle \in T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$, что $2n - \gamma(\varepsilon^*) = \varkappa$. Функция $\gamma(\varepsilon)$ определена в §2 (пункт I8), а ее свойства исследуются в §8.

## §4. Доказательство теоремы I.

Рассмотрим систему интегральных уравнений (I.I) как операторное уравнение $\overline{\underline{II}}$ рода в пространстве $C[0,H]$ :

$$u = Ku + f.$$

Здесь оператор $K$ обозначает сумму интегральных членов системы (I.I). Очевидно, что

$$\|K\| \leq \max_{0\leq\tau\leq H} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \Big[ \int_0^{\tau} |a_{ij}^1| \exp(b_j^1(s-\tau))\,ds + \int_{\tau}^{H} |a_{ij}^2| \exp(b_j^2(\tau-s))\,ds \Big].$$

Отсюда

$$\|K\| \leq \max_{0\leq\tau\leq H} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \Big[ |a_{ij}^1| \int_0^{\tau} \exp(b_j^1(s-\tau))\,ds + |a_{ij}^2| \int_{\tau}^{H} \exp(b_j^2(\tau-s))\,ds =$$

$$= \max_{0\leq\tau\leq H} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \Big[ |a_{ij}^1| (1-\exp(-b_j^1\tau))/b_j^1 + |a_{ij}^2| (1-\exp(b_j^2(\tau-H)))/b_j^2 \Big]$$

$$\leq (1-\exp(-\beta H)) \, \| \, |A^1| (B^1)^{-1} + |A^2| (B^2)^{-1} \| .$$

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно применить теорему Банаха о единственности решения операторных уравнений.

Теорема доказана.

## §5. Некоторые тождества

Будем искать решение $u(t)$ системы (I.I) в виде (3.5) Пусть выполнено условие (3.I) , (3.2) и

$$\begin{cases} diag(-B^1) \cap \big(diag(\Lambda_1) \cup diag(\Lambda_2)\big) = \emptyset , \\ diag(B^2) \cap \big(diag(\Lambda_1) \cup diag(\Lambda_2)\big) = \emptyset \end{cases} \tag{5.I}$$

Подставим выражение (3.5) в уравнение (I.I). Использование леммы I позволяет нам избавиться от интегральных членов. Из полученного соотношения можно увидеть, что выражение (3.5) будет удовлетворять системе (I.I), если при любом $\tau \in [0, H]$ будут одновременно выполняется равенства:

$$(A^1 G_{\varkappa}[B^1, \Lambda_{\varkappa}] - A^2 G_{\varkappa}[-B^2, \Lambda_{\varkappa}] - G_{\varkappa}) \exp(\Lambda_{\varkappa}\tau)\xi_{\varkappa} = 0, \ \varkappa = 1, 2; \tag{5.2}$$

$$(A^1 G_0[B^1, B^0] - A^2 G_0[-B^2, B^0] - G_0) \exp(B^0\tau)\xi_0 = -A^0 \exp(B^0\tau) C_0 , \tag{5.3}$$

$$A^1 \exp(-B^1\tau)\Big(G_0[B^1,B^0]\xi_0+\sum_{\omega=1}^{2} G_\omega[B^1,\Lambda_\omega]\xi_\omega\Big)=0 \quad , \tag{5.4}$$

$$A^2 \exp(B^2(\tau-H))\Big(G_0[-B^2,B^0]\exp(B^0H)\xi_0 + \sum_{\omega=1}^{2} G_\omega[-B^2,\Lambda_\omega]\times \tag{5.5}$$
$$\times\exp(\Lambda_\omega H)\xi_\omega\Big)=0.$$

§6. Исследование тождеств (5.2)-(5.3)

Лемма 5. Пусть $(\Lambda_\varkappa, G_\varkappa)\in T(A^1,A^2,B^1,B^2)$ и выполнено условие

$$\forall\sigma\in diag(-B^1)\cup diag(B^2)\Rightarrow det(T(\sigma)-I)\neq 0 . \tag{6.1}$$

Тогда имеет место тождество (5.2).

Доказательство. Очевидно, что тождество (5.2) будет выполнено, если найдутся такие матрицы $\Lambda_\varkappa$ и $G_\varkappa$, что

$$A^1 G_\varkappa[B^1,\Lambda_\varkappa]-A^2 G_\varkappa[\Lambda_\varkappa,-B^2]-G_\varkappa=0 \quad , \ \varkappa=1,2.$$

Пусть $\lambda_j^\varkappa$ есть $j$-ый элемент диагонали матрицы $\Lambda_\varkappa$, а $g_j^\varkappa$ есть $j$-тый столбец матрицы $G_\varkappa$. Тогда последнее равенство эквивалентно следующим

$$(T(\lambda_j^\varkappa)-I)g_j^\varkappa=0, \ j=1,2,\dots,n .$$

Отсюда, для пары $(\Lambda_\varkappa, G_\varkappa)\in T(A^1,A^2,B^1,B^2)$ тождество (5.2) будет выполнено.

Отметим, далее, что удовлетворение условию (6.I) влечет за собой выполнение условия (5.I), гарантирующее корректность записи (5.2). Это следует из определения множества $T(A^1, A^2, B^1, B^2)$ и матрицы $G[B,\Lambda_\varkappa]$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть выполнено условие (3.2) и

$$\forall\sigma\in diag(B^0)\Rightarrow det(T(\sigma)-I)\neq 0 . \tag{6.2}$$

Тогда найдутся такие матрица $G_0$ и вектор $\xi_0$ что имеет место тождество (5.3).

Доказательство. Из леммы 2 следует, что тождество (5.3) будет выполнено, если мы подберем матрицу $G_0$ и диагональную матрицу $\mathcal{D}$, так что

$$\mathcal{X}(G_0) = A^1 G_0 [B^1, B^0] - A^2 G_0 [-B^2, B^0] - G_0 = A^0 \mathcal{D}.$$

Обозначив $j$-е столбцы матриц $G_0$ и $A^0\mathcal{D}$ через $g_j^0$ и $s_j$ соответственно, получим, что последнее равенство эквивалентно следующим равенствам:

$$(T(b_j^0) - I) g_j^0 = s_j, \quad b_j^0 \in diag(B^0), \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Условия (3.2) и (6.2) гарантируют невырожденность матрицы $T(b_j^0) - I$. Следовательно, из уравнений (6.3) можно определить матрицу $G_0$.

Лемма доказана.

Замечание 2. В качестве обратимой диагональной матрицы $\mathcal{D}$ берем единичную матрицу. Отсюда, искомый вектор $\xi_0$ согласно лемме 3, есть

$$\xi_0 = -C_0 . \tag{6.4}$$

Из лемм 5-6 вытекает

Следствие I. Пусть выполнены условия (3.2) и (3.3). Тогда найдутся такие матрицы $\Lambda_\varkappa, G_\varkappa, G_0$ и вектор $\xi_0$ что тождества (5.2)-(5.3) выполняются одновременно.

## §7. Исследование тождеств (5.4)-(5.5)

Пусть $P_\varkappa$ есть ортопроектор в $R^n$, проектирующий на

$$N_\varkappa = \bigcap_{k=0}^{\infty} ker(A^\varkappa (B^\varkappa)^k), \quad \varkappa = 1, 2.$$

Из леммы 3 следует, что тождества (5.4)-(5.5) будут выполнены, если

$$\begin{cases} (I - P_1)\left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{2} G_\varkappa [B^1, \Lambda_\varkappa] \xi_\varkappa + G_0 [B^1, B^0] \xi_0\right) = 0, \\ (I - P_2)\left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{2} G_\varkappa [-B^2, \Lambda_\varkappa] exp(\Lambda_\varkappa H) \xi_\varkappa + \right. \\ \qquad \left. + G_0 [-B^2, B^0] exp(B^0 H) \xi_0 \right) = 0. \end{cases} \tag{7.I}$$

Положим

$$P=\begin{pmatrix} I-P_1 & 0 \\ 0 & I-P_2 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} G_1[B^1,\Lambda_1] & G_2[B^2,\Lambda_2] \\ G_1[-B^2,\Lambda_1]\exp(\Lambda_1 H) & G_2[-B^2,\Lambda_2]\exp(\Lambda_2 H) \end{pmatrix}$$

$$\eta=\begin{pmatrix} -G_0[B^1,B^0]\xi_0 \\ -G_0[-B^2,B^0]\exp(B^0 H)\xi_0 \end{pmatrix},\qquad \xi=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Используя эти обозначения, систему (7.I) можно записать как

$$PF\xi=P\eta. \tag{7.2}$$

Здесь $P:R^{2n}\to(I-P_1)R^n\times(I-P_2)R^n$. По теореме Кронекера-Капелли система (7.2) разрешима для любого $\eta\in R^n$ тогда и только тогда, когда $\dim PFR^n=\dim PR^n$, или, что тоже самое

$$\dim\ker(PF)=\dim N_1+\dim N_2 \tag{7.3}$$

Лемма 7. Пусть выполнены условия (3.I), (3.2),(5.I) и

$$\varepsilon=\langle(\Lambda_1,G_1),(\Lambda_2,G_2)\rangle\in T^2(A^1,A^2,B^1,B^2).$$

Тогда имеет место равенство

$$\ker(PF)=\Xi(\varepsilon).$$

Доказательство. Отметим, что условие (3.I) гарантирует единственность решения уравнения (I.I), а условия (3.2), (3.3) - корректность соотношений (5.4)-(5.5).

Пусть $\xi\in\ker(PF)$ или, что тоже самое, $PF\xi=0$. Рассмотрим однородное уравнение

$$u(\tau)=\int_0^\tau A^1\exp(-B^1(\tau-s))\,u(s)\,ds+\int_\tau^H A^2\exp(-B^2(s-\tau))\,u(s)\,ds. \tag{7.4}$$

Решение этого уравнения есть

$$u(\tau)=G_1\exp(\Lambda_1\tau)\xi_1+G_2\exp(\Lambda_2\tau)\xi_2,$$

которое, в силу единственности, тождественно равно нулю; следовательно, $\ker(PF)\subseteq\Xi(\varepsilon)$

Покажем обратное включение. Пусть $\xi\in\Xi(\varepsilon)$. Тогда функция

$$u(\tau) = G_1 \exp(\Lambda_1 \tau)\xi_1 + G_2 \exp(\Lambda_2 \tau)\xi_2 \equiv 0$$

удовлетворяет однородному уравнению (7.4). Подставим $u(\tau)$ в (7.4). Для получения после подстановки тождества необходимо, чтобы были выполнены тождества (5.4)-(5.5), где $\xi_0 = 0$. Последнее эквивалентно тому, что $PF\xi = 0$. Следовательно $\Xi(\varepsilon) \subseteq \ker PF$.

Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть выполнены условия (3.I), (3.2), (3.3) и пусть уравнение $\gamma(\varepsilon) = \dim N_1 + \dim N_2$ имеет хотя бы одно решение $\varepsilon = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle \in T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$. Тогда решение уравнения (I.I) единственно и представимо в виде (3.5).

## §8. Некоторые свойства функции $\gamma(\varepsilon)$

Пусть $\varepsilon = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle \in T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} = (\delta_{ij} \lambda_j)_{i,j=1,2n}.$$

По алгоритму §2 (пункт 9) введем множества $\Lambda(\varepsilon, k)$, $k = 1, 2, \ldots, n(\varepsilon)$, содержащие индексы равных диагональных элементов матрицы $\Lambda$. Обозначим через $g_1, g_2, \ldots, g_{2n}$ столбцы матрицы $G = (G_1 \vdots G_2)$, составленной из матриц $G_1$ и $G_2$, а через $n(\varepsilon, k)$ - количество линейно независимых нетривиальных векторов набора $\{g_j : j \in \Lambda(\varepsilon, k)\}$.

Лемма 8. Для $\varepsilon = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle \in T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$ имеет место равенство

$$\gamma(\varepsilon) = 2n - \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} n(\varepsilon, j). \tag{8.I}$$

Доказательство. По определению $\Xi(\varepsilon)$ имеем

$$G_1 \exp(\Lambda_1 \tau)\xi_1 + G_2 \exp(\Lambda_2 \tau)\xi_2 \equiv 0.$$

Запишем это тождество в координатном виде. Приравнивая к нулю коэффициенты при разных $\exp(\lambda_j \tau)$, получим

$$\sum_{j\in\Lambda(\varepsilon,k)} g_j \xi^j = 0, \quad k=1,2,\dots,n(\varepsilon). \tag{8.2}$$

Здесь $g_j$ – столбец матрицы $G=(G_1 \vdots G_2)$, а $\xi^j$ – координата вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2)^T$. Из систем (8.2) можно определить вектор $\xi$, причем размерность ядра этой системы совпадает с $dim\,\Xi(\varepsilon)$. Отсюда, учитывая что вектора $g_j$ удовлетворяют $(T(\lambda_j)-I)g_j=0$, получим, что размерность ядра системы определяется величиной $2n-\sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} n(\varepsilon,j)$.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 9. Имеют место равенства

$$dim\,N_1=\sum_{i=1}^{q} dim\,ker\,A^1_{M(i)}, \quad dim\,N_2=\sum_{i=1}^{r} dim\,ker\,A^2_{Q(i)}.$$

Лемма 10. Имеет место неравенство

$$\gamma(\varepsilon)\geqslant dim\,N_1+dim\,N_2, \quad \varepsilon\in T^2(A^1,A^2,B^1,B^2).$$

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$rang(PF)\leqslant dim\,PR^{2n}$$

следует

$$dim\,ker\,PF\geqslant dim\,N_1+dim\,N_2.$$

По лемме 5 имеем

$$\gamma(\varepsilon)=dim\,\Xi(\varepsilon)=dim\,ker\,PF\geqslant dim\,N_1+dim\,N_2.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\gamma(\varepsilon)=dim\,N_1+dim\,N_2, \quad \varepsilon\in T^2(A^1,A^2,B^1,B^2). \tag{8.3}$$

Из следствия 2 следует, что в случае разрешимости этого уравнения решение системы (I.I) представимо в виде (3.5). Из леммы 10 вытекает, что корень уравнения (8.3) необходимо доставляет минимум функции $\gamma(\varepsilon)$ на множестве $T^2(A^1,A^2,B^1,B^2)$.

Лемма II. Имеет место равенство

$$min\left\{\gamma(\varepsilon):\ \varepsilon\in T^2(A^1,A^2,B^1,B^2)\right\}=2n-\sum_{s\in\partial(\Lambda)} dim\,ker(T(s)-I).$$

Лемма II следует из леммы 8. Итогом этого параграфа является

Лемма I2. Пусть выполнены условия (3.I), (3.2), (3.3) и равенство

$$\sum_{s\in\mathcal{D}(\Lambda)} \dim\ker(T(s)-I) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{rang} A^1_{M(i)} + \sum_{i=1}^{r} \operatorname{rang} A^2_{Q(i)} . \tag{8.4}$$

Тогда решение уравнения (I.I) единственно и представимо в виде (3.5).

В заключении этого параграфа покажем, что справедлива

Лемма I3. Количество различных корней характеристического уравнения не может превышать $\varkappa$, где

$$\varkappa = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{rang} A^1_{M(i)} + \sum_{i=1}^{r} \operatorname{rang} A^2_{Q(i)} . \tag{8.5}$$

Доказательство. Предположим обратное: пусть число различных корней характеристического уравнения есть $\varkappa' = \varkappa + \ell > \varkappa$. Пусть $g_1, g_2, \ldots g_{\varkappa'}$ – решения уравнения (8.I), соответствующие этим различным корням. Образуем $\mathcal{E} = \langle (\Lambda_1, G_1)$, $(\Lambda_2, G_2) \rangle$, состоящий только из этих элементов. Тогда, по лемме 8, имеем

$$\gamma(\mathcal{E}) = 2n - \varkappa' = -\sum_{i=1}^{q} \operatorname{rang} A^1_{M(i)} - \sum_{i=1}^{r} \operatorname{rang} A^2_{Q(i)} - \ell + 2n =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \dim\ker A^1_{M(i)} + \sum_{i=1}^{r} \dim\ker A^2_{Q(i)} - \ell = \dim N_1 + \dim N_2 - \ell ,$$

что противоречит лемме I0.

Лемма доказана.

## §9. Завершение доказательства теоремы 2

Первая часть теоремы 2 доказана в предыдущем параграфе. Здесь мы получим правила а) – г).

Правило а). Из следствия 2 и леммы I0 следует, что для представления решения уравнения (I.I) в виде (3.5) достаточно, чтобы $\Lambda_1, \Lambda_2, G_1, G_2$ были таковыми, что

$$\mathcal{E} = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle \in T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$$

доставляли минимум функции $\gamma(\mathcal{E})$.

Пусть матрицы $\Lambda_1, \Lambda_2, G_1, G_2$ построены по правилу а). Очевидно, что

$$\mathcal{E} = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle \in T^2(A^1 A^2, B^1, B^2)$$

Согласно лемме 8, имеем

$$\gamma(\varepsilon) = 2n - \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} n(\varepsilon, j) = 2n - \sum_{\lambda \in \partial(\Lambda)} dim\, ker(T(\lambda) - I) \,.$$

Отсюда по лемме II заключаем, что $\varepsilon$ доставляет минимум функции $\gamma(\varepsilon)$.

Из условия (3.4) следует, что $\sum_{j=1}^{\theta} n_i = \varkappa$, а из леммы I2 вытекает неравенство $\theta \leq \varkappa$, где $\theta$ – количество различных решений характеристического уравнения.

Правило а) доказано.

Правила б) и в) вытекают из леммы 6 и замечания I.

Правило г). Обозначим через

$$z^1 = G_1[B^1, \Lambda_1]\xi_1 + G_2[B^2, \Lambda_2]\xi_2 + G_0[B^1, B^0]\xi_0,$$

а через $z_j^1$ $j$-ю координату этого вектора. В силу выбора матриц $G_1, G_2$ (Правило а) ), получим

$$z_j^1 = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{g_{jk}^1}{b_j^1 + \lambda_1} \xi_k^1 + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{g_{jk}^2}{b_j^1 + \lambda_2} \xi_k^2 + \dots + \sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{g_{jk}^\theta}{b_j^1 + \lambda_\theta} \xi_k^\theta + z_j^0 \qquad (9.I)$$

Здесь $\lambda_i$ – корень характеристического уравнения; вектор-столбец

$$g_k^i = (g_{1k}^i \; g_{2k}^i \dots g_{nk}^i)^T$$

есть решение уравнения (8.I), соответствующее $\lambda_i$; $\xi_k^i$ соответствующая координата вектора $(\xi_1, \xi_2)^T$; $n_i = n(\varepsilon, i)$; $\sum_{i=1}^{\theta} n_i = \varkappa$. Отметим, что из (9.I), в силу выбора матриц $\Lambda_1, \Lambda_2, G_1$ и $G_2$ (см. правило а) теоремы 2), определению подлежат только первые $\varkappa$ координат вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ т.к. оставшиеся координаты этого вектора мы можем положить равными нулю.

С учетом введенных здесь обозначений запишем тождество (5.6) в координатном виде. Приравнивая к нулю коэффициенты при различных $exp(-b_j^1 \tau)$, получим

$$\sum_{j \in M(i)} a_j^1 z_j^1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \,. \qquad (9.2)$$

Здесь $a_j^1$ есть $j$-й столбец матрицы $A^1$. Обозначая через

$$z^2 = G_1[-B^2, \Lambda_1] exp(\Lambda_1 H)\xi_1 + G_2[-B^2, \Lambda_2] exp(\Lambda_2 H) + G_0[-B^2, B^0]\xi_0,$$

а через $z_j^2$ $j$-ю координату этого вектора и применяя вытеизложенные рассуждения, получим систему

$$\sum_{j\in \bar{Q}(i)} a_j^2 z_j^2 = 0, \quad i = 1,2,\ldots, r. \tag{9.3}$$

Рассмотрим систему $\{(9.2)-(9.3)\}$ как систему линейных уравнений относительно $\xi_k^i$. Вспомним теперь, что эту систему можно записать в виде (7.2). Условие (3.4) гарантирует выполнение равенства (7.3). Отсюда

$$rang\,(PF) = 2n - dim\,N_1 - dim\,N_2$$

Итак, система (9.2)-(9.3) определяет $\varkappa$ независимых величин, причем ранг "общей" системы равен $\varkappa$. Отсюда, система (9.2)-(9.3) имеет единственное решение.

Система (9.2)-(9.3) есть система $2n$ уравнений с $\varkappa$ неизвестными. Если $\varkappa \leqslant 2n$ то, как известно, $2n-\varkappa+1$ уравнений являются лишними. Выделяя стандартным путем линейно независимые строки получим, что $\xi_\varkappa^i$-я находится из системы

$$z_j^1 = 0, \quad j \in \bigcup_{i=1}^{q} \bar{M}(i),$$
$$z_j^2 = 0, \quad j \in \bigcup_{i=1}^{r} \bar{Q}(i).$$

Теорема доказана.

## §10. Векторно-матричная запись интегральной формы линейно-алгебраической модели переноса излучения

Начиная с этого параграфа мы будем изучать систему интегральных уравнений (2.4.2), со специальным видом свободного члена: $f_{sm}(\tau) = u_{sm}\exp(-\tau/\mu_0)$. Для того, чтобы придать этой системе вид (I.I) введем следующие обозначения[I]

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A^{-1}B & 0 \\ 0 & A^{-1}B \end{pmatrix}, \quad y_{\pm i}(\tau) = (y_{\pm i1}\, y_{\pm i2} \ldots y_{\pm ip})^T.$$

---

[I] Все неопределенные в этом параграфе символы введены в §§2.3-2.4.

$$A^1=\begin{pmatrix} B^{-1}G^{+}A^{-1}B & 0 \\ B^{-1}G^{-}A^{-1}B & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1}G^{-}A^{-1}B \\ 0 & B^{-1}G^{+}A^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$u_s=(u_{s1}\ u_{s2}\ldots u_{sp})^T, \quad y_s(\tau)=(y_{s1}(\tau)\ y_{s2}(\tau)\cdots y_{sp}(\tau))^T,$$

$$c_0=(u_1\ u_2\ldots u_n\ u_{-1}\ldots u_{-n})^T, \quad y(\tau)=(y_1(\tau)\ y_2(\tau)\ldots y_n(\tau)\,y_{-1}(\tau)\ldots y_{-n})^T,$$

$$f(\tau)=c_0\exp(-\tau/\mu_0).$$

С учетом введенных здесь обозначений можно записать систему интегральных уравнений (2.4.2) в виде

$$y(\tau)=\int\limits_0^\tau A^1\exp(-\mathcal{B}(\tau-s))y(s)ds+\int\limits_\tau^H A^2\exp(-\mathcal{B}(s-\tau))y(s)ds+f(\tau). \qquad (10.1)$$

## §11. Существование и единственность решения интегральной формы линейно-алгебраической модели переноса

Обозначим

$$\beta=\max_{1\le i\le n}\max_{1\le m\le p}\{\beta_{im}:\beta_{im}\in diag\,(A^{-1}B)\}.$$

Теорема 3. Пусть $\lambda(1-\exp(-\beta H))<1$. Тогда система интегральных уравнений (10.1) имеет единственное решение при любом свободном члене $f\in C[0,H]$.

Доказательство. Имеем

$$\|\,|A^1|\mathcal{B}^{-1}+|A^2|\mathcal{B}^{-1}\|=\frac{\lambda}{4\pi}\max_{\substack{1\le|s|\le n\\1\le m\le p}}\sum_{|j|=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}\left|\frac{g_{jlsm}\,b_{jl}}{b_{sm}\,a_{ijl}}\right|\frac{a_{ijl}}{b_{jl}}=$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi}\max_{\substack{1\le|s|\le n\\1\le m\le p}}b_{sm}^{-1}\sum_{|j|=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}g_{jlsm}=\lambda.$$

Для завершения доказательства остается применить теорему 1. Теорема доказана.

## §12. Структура решения интегральной формы линейно-алгебраической модели

В этом параграфе мы докажем теорему о структуре решения системы интегральных уравнений (10.1). Будем использовать векторно-матричную символику, введенную в §2.3. Напомним, что для описания диагональных элементов диагональных матриц в §2.3 мы использовали двумерные индексы. Однако, для использования результатов этой главы нам удобнее перейти к одномерной индексации. Поэтому, перенумеруем диагональные элементы диагональных матриц "сверху вниз", т.е. каждому элементу с номером $(i,m)$ поставим в соответствие число $(i-1)p+m$, $m=1,2,\dots,p$; $i=1,2,\dots,n$. Нетрудно убедиться во взаимно-однозначности такого соответствия.

Выпишем теперь вид матрицы $T(s)$ для системы (10.1). Имеем

$$T(s)=A^1(sI+B^1)^{-1}-A^2(sI-B^2)^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} \left(B_i^{-1}G_{ij}A_j^{-1}B_j(sI+B_jA_j^{-1})\right)_{i,j=1,n} & -\left(B_i^{-1}G_{-ij}B_jA_j^{-1}(sI-B_jA_j^{-1})\right)_{i,j=1,n} \\ \left(B_i^{-1}G_{-ij}A_j^{-1}B_j(sI+B_jA_j^{-1})\right)_{i,j=1,n} & -\left(B_i^{-1}G_{ij}B_jA_j^{-1}(sI-B_jA_j^{-1})\right)_{i,j=1,n} \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

Для учета одинаковых элементов диагонали матрицы $A^{-1}B$ введем множество $m(i)$ по схеме §2.9. Через $r(m)$ обозначим количество получившихся множеств $m(i)$. Кроме этого, введем матрицу

$$G=\begin{pmatrix} G^+ \\ G^- \end{pmatrix}$$

и целочисленное множество $\bar{m}(i)\subseteq m(i)$, содержащее номера линейно независимых столбцов матрицы $k_{m(i)}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия

$$\lambda(1-exp(-\beta H))<1,\ \beta=\max_{\substack{1\le m\le p\\ 1\le i\le n}}\beta_{im},\ \beta_{im}\in diag(A^{-1}B);\quad (12.2)$$

$$\beta_{im}\ne 1/\mu_0,\ i=1,2,\dots,n;\ m=1,2,\dots,p. \quad (12.3)$$

$$\forall \sigma \in diag(A^{-1}B) \cup diag(-A^{-1}B) \cup \{\mu_0^{-1}\} \Rightarrow det(T(\sigma) - I) \neq 0, \tag{12.4}$$

$$\sum_{s \in \partial(\Lambda)} dim\, ker(T(s) - I) = 2 \sum_{i=1}^{r(m)} rang\, h_{m(i)}, \tag{12.5}$$

Тогда решение уравнения (10.1) единственно и имеет вид

$$y(\tau) = G exp(\Lambda\tau)\xi + exp(-\tau/\mu_0)\psi_0, \tag{12.6}$$

где матрицы $G, \Lambda$ вектора $\xi, \psi_0$ строятся по следующим правилам:

а) Находим все различные положительные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\theta'}$ характеристического уравнения. Оказывается, что характеристическое уравнение имеет только вещественные корни и количество $\theta'$ положительных корней не превышает числа .

$$æ' = \sum_{i=1}^{r(m)} rang\, h_{m(i)} \leq np,$$

причем неравенство $\theta' \leq æ'$ выполняется и при нарушении условия (12.5). Для каждого $\lambda_i$ находим максимальное число $n_i'$ линейно независимых решений уравнения $(T(\lambda) - I)g = 0$. Пусть эти решения есть $g_1^i, g_2^i, \ldots g_{n_i}^i$. Оказывается, что общее количество $\sum_{i=1}^{\theta'} n_i$ этих векторов есть $æ'$. Обозначим

$$g_k^i = (u_k^i \; v_k^i)^T, \; u_k^i, v_k^i \in R^{np}.$$

Строим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda} & & 0 \\ & -\tilde{\Lambda} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{n_{\theta'}} I_{n_{\theta'}} & & & \\ & & & -\lambda_1 I_{n_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & -\lambda_{n_{\theta'}} I_{n_{\theta'}} & \\ & & & & & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

Далее строим матрицу по правилу:

$$G = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \mathcal{V} & 0 \\ \mathcal{V} & \mathcal{U} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = (v_1^1 \, v_2^1 \ldots v_{n_1}^1 \; v_1^2 \ldots v_{n_2}^2 \; v_1^3 \ldots v_{n_{\theta'}}^{\theta'})$$

$$\mathcal{U} = (u_1^1 u_2^1 \dots u_{n_1}^1 u_1^2 \dots u_{n_2}^2 u_1^3 \dots u_{n_{\theta'}}^{\theta'}),\ u_k^i, v_k^i \in R^{np};$$

б) вектор $\psi_0$ определяем из системы

$$(T(-\mu_0^{-1}) - I)\psi_0 = -C_0;$$

в) первые $\varkappa = 2\varkappa'$ координат $\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \dots, \xi_{n_2}^2, \dots, \xi_{n_{\theta'}}^{2\theta'}$ вектора $\xi \in R^{2np}$ находим из системы

$$\sum_{l=1}^{\theta'} \frac{1}{\beta_s + \lambda_l} \sum_{k=1}^{n_l} u_{sk}^l \xi_k^l + \sum_{l=1}^{\theta'} \frac{1}{\beta_s - \lambda_l} \sum_{k=1}^{n_l} v_{sk}^l \xi_k^{\theta'+l} =$$

$$= (\beta_s - \mu_0^{-1})^{-1} \psi_s^0, \quad s = (i-1)p + m \in \bigcup_{j=1}^{r(m)} \bar{m}(j); \tag{12.7}$$

$$\sum_{l=1}^{\theta'} \frac{\exp(\lambda_l H)}{-\beta_s + \lambda_l} \sum_{k=1}^{n_l} v_{sk}^l \xi_k^l + \sum_{l=1}^{\theta'} \frac{\exp(-\lambda_l H)}{-\beta_s - \lambda_l} \sum_{k=1}^{n_l} u_{sk}^l \xi^{\theta'+l} =$$

$$= \exp(-H/\mu_0)(-\beta_s - \mu_0^{-1})^{-1} \psi_s^0, \quad s = (m-1)p + i, \ np + s \in \bigcup_{j=1}^{r(m)} \bar{m}(j), \tag{12.8}$$

а остальные полагаем равными нулю. Здесь через $\beta_s$ обозначен диагональный элемент матрицы $\mathcal{B} = (\beta_s \delta_{sk})_{s,k=1,n}$, причем $\beta_s = \beta_{im} = b_{im}/a_{im}$, $s = (i-1)p + m$, $\beta_{s+np} = \beta_s$; через $u_{ik}^l$, $v_{ik}^l$ обозначена координата с номером $i$ векторов $u_k^l$ и $v_k^l$ соответственно. Оказывается, что общее количество уравнений в системе есть $\varkappa$. Кроме этого, система имеет единственное решение.

Доказательство. Условие (12.2) следует из теоремы 3. Применим теорему 2 к уравнению (10.6). Очевидно, что условие (3.2) переходит в условие (12.3).

Посмотрим теперь, как будет выглядеть условие (3.4) применительно к задаче (10.1). Левую часть этого равенства оставим без изменения и рассмотрим правую. Очевидно, что ранг матрицы $A^1_{M(i)}$ определяют только столбцы "ненулевой" части матрицы $A^1$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{rang} A^1_{M(i)} = \sum_{i=1}^{r(m)} \operatorname{rang} h_{m(i)}.$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} B^{-1}G^{+}A^{-1}B & 0 \\ B^{-1}G^{-}A^{-1}B & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} h,$$

которое имеет место, если $\det A^{-1}B \neq 0$ , а последнее в нашем случае выполняется.

Аналогичные рассуждения можно применить и для подсчета величины $\operatorname{rang} A^{2}_{Q(i)}$ . Надо учесть лишь то, что $B^{1} = B^{2} = \mathcal{B}$, диагональная матрица $\mathcal{B}$ состоит из двух одинаковых блоков $BA^{-1}$; $Q(i) = M(i)$ и

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} G^{+} \\ G^{-} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} G^{-} \\ G^{+} \end{pmatrix}.$$

В результате получаем, что $\sum_{i=1}^{q} A^{2}_{Q(i)} = \sum_{i=1}^{t(m)} h_{m(i)}$

Покажем теперь, что характеристическое уравнение имеет лишь вещественные корни. Имеем

$$T(s) - I = (\mathcal{R} - sI)(sI + \mathcal{J}\mathcal{B})^{-1}. \qquad (12.9)$$

Здесь

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} (B^{-1}G^{+} - I)A^{-1}B & -B^{-1}G^{-}BA^{-1} \\ B^{-1}G^{-}A^{-1}B & -(B^{-1}G^{+} - I)A^{-1}B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

а все остальные матрицы определены в §2.3. Отсюда

$$\det(T(s) - I) = \det(\mathcal{R} - sI)\det(sI + \mathcal{J}\mathcal{B}) = 0.$$

Матрица $\mathcal{R}$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $[x, y] = (\mathcal{A}^{2}\mathcal{B}^{2}x, y)$, где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Отсюда, последнее уравнение имеет лишь вещественные корни.

Далее, мы используем следующий факт, который проверяется непосредственно

Лемма 14. Пусть $\lambda$ собственное значение матрицы $\mathcal{R}$ , а

$$g = (u, v)^{T}, \quad u, v \in R^{np}$$

соответствующий ему собственный вектор. Тогда $-\lambda$ также является собственным значением матрицы $\mathcal{R}$, а вектор

$$\bar{g} = (v, u)^{T}, \quad v, u \in R^{np}$$

соответствующий ему собственный вектор.

Из леммы 14 следует, что если $\lambda$ есть решение характеристического уравнения, то $-\lambda$ также удовлетворяет этому уравнению. Поэтому нам достаточно найти лишь положительные (или отрицательные) корни характеристического уравнения, количество которых обозначим через $\theta'$.

Применим теперь правило а) теоремы 2. Т.к. $\mathcal{H} = 2\sum_{j=1}^{\mathcal{H}(\pi)} h_{m j \beta} \leq 2np$, то мы можем положить $G_2 = 0, \Lambda_2 = 0$. Следовательно, вид решения уравнения (10.1) определяется выражением (12.6) и матрицы $G, \Lambda$ определяются правилом а) теоремы 4. Из леммы 14 следует структура матрицы $G$.

Правило б) получаем из правила в) и б) теоремы 2. Здесь надо учесть вид матрицы $B^{0} = -\mu_0^{-1} I$. Действительно,

$$G_0 \exp(B^0 \tau)\xi_0 = \exp(-\mu_0^{-1}\tau) G_0 \xi_0 = \exp(-\tau/\mu_0) G_0(-C_0) = \exp(-\tau/\mu_0)\psi_0 .$$

Правило б) теоремы 2 дает, что $G_0 = (T(-\mu_0^{-1}) - I)^{-1}$.

Докажем правило в) теоремы 4. Левая часть выражения (12.7) следует из (3.7) с учетом структуры матрицы $G$, а также соотношения $\lambda_j = -\lambda_{\theta' + j}$. Рассмотрим правую часть этого выражения. Имеем

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{g_{ik}^{0}}{b_{im} - \mu_0^{-1}} c_k^{0} = \left(\sum_{k=1}^{np} g_{ik}^{0} c_k^{0}\right) \frac{1}{b_{im} - \mu_0^{-1}} .$$

Выражение $\sum_{k=1}^{np} g_{ik}^{0} c_k^{0}$ есть ни что иное, как $i$-я координата вектора $\psi_0$

Аналогично доказывается выражение (12.8). Здесь надо учесть то, что номера линейно-независимых столбцов матрицы $A^{2}_{\alpha(i)}$ выбираются из ненулевой части матрицы $A^{2}$. Поэтому индекс $i$ удовлетворяет неравенству $i \geq np$

Теорема доказана.

## §13. Структура решения интегральной формы линейно-алгебраической модели в случае равномерной дискретизации по азимуту

Рассмотрим интегральную форму ЛАМ переноса, полученную путем равномерной дискретизации уравнения переноса по азимуту (см. §4.1), т.е. рассмотрим уравнение (10.1) со следующими параметрами

$$A_i = a_i I_p, \quad B_i = b_i I_p, \quad A_i^{-1} B_i = b_i / a_i = \gamma_i I_p .$$

Матрицы $A_i$, $B_i$ определены в §2.3, а коэффициенты $a_i$, $b_i$ - в §2.2.

Матрица $T(s)$ в этом случае примет вид

$$T(s) = \begin{pmatrix} G_{11}\dfrac{\gamma_1}{b_1(s+\gamma_1)} & \dots & G_{1n}\dfrac{\gamma_n}{b_1(s+\gamma_n)} & -G_{11}\dfrac{\gamma_1}{b_1(s-\gamma_1)} & \dots & -G_{-1n}\dfrac{\gamma_n}{b_1(s-\gamma_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n1}\dfrac{\gamma_1}{b_n(s+\gamma_1)} & \dots & G_{nn}\dfrac{\gamma_n}{b_n(s+\gamma_n)} & -G_{-n1}\dfrac{\gamma_1}{b_n(s-\gamma_1)} & \dots & -G_{-nn}\dfrac{\gamma_n}{b_n(s-\gamma_n)} \\ G_{-11}\dfrac{\gamma_1}{b_1(s+\gamma_1)} & \dots & G_{-1n}\dfrac{\gamma_n}{b_1(s+\gamma_n)} & -G_{11}\dfrac{\gamma_1}{b_1(s-\gamma_1)} & \dots & -G_{1n}\dfrac{\gamma_n}{b_n(s-\gamma_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{-n1}\dfrac{\gamma_1}{b_n(s+\gamma_1)} & \dots & G_{-nn}\dfrac{\gamma_n}{b_n(s+\gamma_n)} & -G_{n1}\dfrac{\gamma_1}{b_n(s-\gamma_1)} & \dots & -G_{nn}\dfrac{\gamma_n}{b_n(s-\gamma_n)} \end{pmatrix} \quad (13.1)$$

Отметим, что матрицы $G_{ij}$ являются симметричными циркулянтами порядка $p$. Это позволяет использовать блочную технику оперирования матриц. Ниже мы будем рассматривать случай четного $p$ т.е. $p = 2q$ и отметим, что приводимые результаты легко переносятся на нечетный $p$.

Множества $m(i)$, введенные в предыдущем параграфе есть

$$m(i) = \{(i-1)p+1, \ (i-1)p+2, \dots, ip\}, \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

а $\tau(m) = n$. Положим $h_j = h_{m(j)}$. Очевидно, что

$$h_j = (G_{1j} \ G_{2j} \dots G_{nj} \ G_{-1j} \dots G_{-nj})^T .$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия

$$\lambda(1-\exp(-\beta H))<1,\ \beta=\max_{1\le i\le n}\gamma_i\ , \qquad (13.2)$$

$$\gamma_i\ne\pm 1/\mu_0,\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (13.3)$$

$$\forall\sigma\in\{\pm\gamma_1,\pm\gamma_2,\ldots,\pm\gamma_n,\pm 1/\mu_0\}\Rightarrow \det(T(\sigma)-I)\ne 0, \qquad (13.4)$$

$$\sum_{s\in\vartheta(\Lambda)} \dim\ker(T(s)-I)=2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{rang}\,h_j\ . \qquad (13.5)$$

Тогда решение уравнения (10.1) единственно и имеет вид(12.5) Матрицы $G,\Lambda$ и вектора $\xi$, $\psi_0$ определяются по следующим правилам.

а) Находим все различные положительные решения характеристического уравнения: $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_{\theta'}$ . Оказывается, что все корни характеристического уравнения вещественны, а количество $\theta'$ положительных значений не превышает числа $\min\{n[p/2+1],\ae'\}$ , где $\ae'=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{rang}\,h_j$ , причем неравенство $\theta'\le\min\{n[p/2+1],\ae'\}$выполняется независимо от выполнения условия (13.5).

Для каждого $\lambda_i$ находим максимальное число $n_i'$ линейно независимых решений уравнения $(T(\lambda_i)-I)g=0$ .Оказывается, что общее число $\sum_{i=1}^{\theta'}n_i'$ этих решений есть $\ae'$ . Далее матрицы $\Lambda$, $G$ строятся аналогично правилу а) теоремы 4;

б) вектор $\psi_0$ определяется по правилу б) теоремы 4.

в) вектор $\xi$ находится по правилу в) теоремы 4.

Замечание 3. Для нахождения корней характеристического уравнения $\det(T(s)-I)=0$ можно предварительно преобразовать матрицу $T(s)-I$ при помощи унитарного преобразования $U_n = U\otimes I_n$ (здесь матрица $U$ определена в П3.4, а $\otimes$ - знак прямого произведения матриц). Благодаря этому[1], задача нахождения решений характеристического уравнения разбивается на $[p/2]+1$ независимых задач. Аналогичное свойство применяется и для нахождения столбцов матрицы $G$ .

---

[1] Напомним, что матрица $U G_{ij} U^*$ есть диагональная матрица, диагональные элементы которой находятся по формулам (П3.6)

Доказательство теоремы 5. Условия $\{(13.2)-(13.5)\}$ вытекают из условий (12.2)-(12.4). Докажем, что количество положительных решений не может превышать числа $n([p/2]+1)$. Имеем

$$det(T(s)-I)=det(U_n T(s) U_n^* - I),$$

где матрица $U_n$ определена в замечании к теореме 5. Матричными блоками матрицы $U_n T(s) U_n^*$ являются диагональные матрицы $U G_{ij} U^* \gamma_j \delta_i^{-1}(s+\gamma_j)^{-1}$, причем количество различных элементов этой матрицы не больше $q+1=[p/2]+1$ . (см. П1.7). Следовательно, задача нахождения решений характеристического уравнения разбивается на $q+1$ подзадач, решение каждой из которых дает не более $n$ положительных решений характеристического уравнения. Отсюда следует оценка $\theta' \leq n([p/2]+1)$.

Теорема доказана.

## §14. Структура решения интегральной формы линейно-алгебраической модели переноса излучения в изотропно рассеивающей среде

Здесь мы получим алгоритм решения интегральной формы ЛАМ при изотропном рассеянии (т.е. $g(\gamma)\equiv 1$ ).
Рассмотрим случай, когда свободный член $f(\tau,\mu,\varphi)$ уравнения переноса не зависит от угловых переменных (что выполняется для широкого класса задач атмосферной оптики). Мы построим решение интегральной формы ЛАМ, соответствующей моделям (2.2.8) и $\{(2.2.11)-(2.2.14)\}$. Построения мы будем осуществлять на основе теоремы 4. Величины $a_{sm}$, $b_{sm}$, $g_{jlsm}$, $f_{sm}(\tau)$ участвующие в определении ЛАМ, в случае изотропного рассеяния имеют вид

$$a_{im}=w_i v_i \vartheta_m,\quad b_{im}=w_i\vartheta_m,\quad g_{iljm}=\frac{\lambda}{4\pi}w_i\vartheta_l w_j\vartheta_m,$$

$$a_{-im}=-a_{im},\quad b_{-im}=b_{im},\quad \sum_{l=1}^{p}\vartheta_l=2\pi,\quad f_{sm}(\tau)=b_{sm}F\exp(-\tau/\mu_0),$$

$$F-const,\quad \mu_0>0,\quad i,j,|s|=1,2,\dots,n;\quad l,m=1,2,\dots,p.$$

Здесь $w_i=\alpha_i$, $v_i=\mu_i$, $\vartheta_l=\varphi_l$ для метода (2.2.8) и $w_i=\mu_i-\mu_{i-1}$, $v_i=0.5(\mu_i+\mu_{i-1})$, $\vartheta_l=\varphi_l-\varphi_{l-1}$ для метода $\{(2.2.11)-(2.2.14)\}$. Компоненты $u_{sm}$ вектора $C_0$, определяющего свободный член уравнения (10.1), есть: $u_{sm} = F$.

Прежде чем приступить к построению решения уравнения, проведем дополнительные исследования характеристического уравнения. Рассмотрим матрицу (12.1). Имеем

$$B_i^{-1} G_{\pm ij} A_j^{-1} B_j (sI \pm B_j A_j^{-1})^{-1} = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{w_j}{v_j s \pm 1} \partial,$$

где через $\partial$ мы обозначили матрицу

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \dots & \partial_p \\ \partial_1 & \partial_2 & \dots & \partial_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 & \partial_2 & \dots & \partial_p \end{pmatrix}.$$

Заметим, что сумма строк матрицы $T(s)$ есть величина постоянная и ее значение есть

$$-\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{(v_j s)^2 - 1} \tag{14.1}$$

Следовательно, при каждом фиксированном $s$ выражение (14.1) есть собственное значение матрицы $T(s)$, а соответствующий ему собственный вектор есть $\ell_{np} = (1, 1, \dots, 1)^T$. (Здесь индекс означает длину вектора). Отсюда, для того, чтобы вектор $\ell_{np}$ удовлетворял задаче $(T(s) - I)\ell_{np} = 0$, достаточно найти такие $s$, что

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{(v_j s)^2 - 1} + 1 = 0. \tag{14.2}$$

Уравнение (14.2) есть ни что иное, как характеристическое уравнение метода дискретных ординат [9,35,56], которое имеет ровно $n$ положительных корней, лежащих в интервалах $(v_{j+1}^{-2}, v_j^{-2})$ при $\lambda < 1$.

Итак, для $\lambda < 1$ мы нашли $n$ различных положительных корней уравнения $\det(T(s) - I) = 0$. Для каждого корня $\lambda_i$ этого уравнения мы нашли также по одному решению задачи $(T(\lambda_j) - I)\ell_{np} = 0$. Покажем, что других решений характеристическое уравнение не имеет. Действительно, количество $\theta'$ положительных корней, согласно правилу $a$), и количество $\sum_{i=1}^{\theta'} n_i$ решений задачи $(T(\lambda_i) - I) g = 0,\ i = 1, 2, \dots, \theta'$ не может превышать числа $\varkappa' = \sum_{j=1}^{r(m)} \operatorname{rang} h_{m(j)}$. Но

$$m(i) = \{(i-1)p+1,\ (i-1)p+2, \dots, (i-1)p+p\},\ r(m) = n,$$

$$h_{m(i)} = (G_{i1}\ G_{i2} \dots G_{in}\ G_{-i1}\ G_{-i2} \dots G_{-in})^T, \tag{14.3}$$

$$\operatorname{rang} h_{m(i)} = 1.$$

Следовательно, $\varkappa' = \theta' = n$, $n'_i \equiv i$. Отсюда, в частности, получаем

$$|\det(T(s) - I)| = \left| \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{(v_j s)^2 - 1} + 1 \right|. \tag{14.4}$$

Приступим теперь к построению решения интегральной формы ЛАМ, соответствующей изотропному рассеянию. Рассмотрим случай $\lambda < 1$. Отметим, что при этом предположении выполняется условие (12.2). Далее, условие (12.3) принимает вид

$$v_i^{-1} \neq 1/\mu_0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14.5}$$

а условие (12.4) с учетом (14.4) эквивалентно следующему

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{(v_j/\mu_0)^2 - 1} + 1 = 0. \tag{14.6}$$

Прежде чем проверить условие (12.5), построим матрицы $\Lambda$ и $G$ по правилу а). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – положительные корни характеристического уравнения (14.2). Каждому $\lambda_i$ соответствует вектор $g_{np}$, удовлетворяющий задаче $(T(s) - I)g = 0$. Положим

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_n & & & & & \\ & & & & -\lambda_1 & & & & \\ & 0 & & & & -\lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & -\lambda_n & \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad G = (g_{np} \ldots g_{np}\, 0 \ldots 0) \tag{14.7}$$

Согласно правилу а), матрицы (14.7) являются искомыми.

Проверим теперь условие (12.5). Используем замечание 1, т.е. покажем существование такого $\varepsilon = \langle (\Lambda_1, G_1), (\Lambda_2, G_2) \rangle \in \in T^2(A^1, A^2, B^1, B^2)$, что $2np - \gamma(\varepsilon) = \varkappa\ (\varkappa = 2\varkappa')$. В качестве матриц $\Lambda_1$ и $G_1$ берем матрицы (14.7), а $\Lambda_2 = G_2 = 0$. Для вычисления функции $\gamma(\varepsilon)$ используем лемму 8. В нашем случае $\Lambda(\varepsilon, k) = \{k\}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, $\Lambda(\varepsilon, 2n+1) = \{2n+1, 2n+2, \ldots, 2np\}$;

$n(\varepsilon) = 2n+1$, $n_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, $n_{2n+1} = 0$. Отсюда

$$2np - \gamma(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} n_k = 2n = 2\varkappa'.$$

Следовательно, условие (12.5) выполняется.

Построим теперь по правилу б) вектор $\psi_0$. Пусть

$$\psi_0=(\psi_1^0\ \psi_2^0 \dots \psi_n^0\ \psi_{-1}^0 \dots \psi_{-n}^0)^T,\ \psi_i^0 \in R^p.$$

Для определения вектора $\psi_0$ имеем систему $(T(-\mu_0^{-1})-I)\psi_0=-C_0$, или

$$\sum_{j=1}^{n}(G_{ij}B_i^{-1}A_j^{-1}B_j(sI+B_jA_j^{-1})^{-1}\psi_j^0-G_{ij}B_i^{-1}A_j^{-1}B_j(sI-B_jA_j^{-1})^{-1}\psi_{-j}^0)-\psi_i^0=-F\theta_{np}.$$

Для ЛАМ (2.2.8) и $\{(2.2.11)-(2.2.14)\}$ последняя система принимает вид

$$\frac{\lambda}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{v_js+1}\partial\psi_j^0-\frac{1}{v_js-1}\partial\psi_{-j}^0\right)-\psi_i^0=-F\theta_p,\ s=1/\mu_0. \qquad (14.8)$$

Будем искать решение этой системы в виде $\psi_i^0=c\theta_p$, где $c$ – подлежащая определению константа. Подставив $\psi_i^0$ в (14.8), получим с учетом соотношения $\partial\theta_p=2\pi\theta_p$ следующие уравнения

$$-c\left(\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{(v_js)^2-1}+1\right)\theta_p=-F\theta_p,\ s=1/\mu_0.$$

Отсюда

$$c=\frac{F}{\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{(s/\mu_0)^2-1}+1}. \qquad (14.9)$$

Построим по правилу в) вектор $\xi\in R^{2np}$. Множества $m(i)$, число $r(m)$ и матрицы $h_{m(i)}$ определены в (14.3), а в качестве $\bar m(i)$ возьмем

$$\bar m(i)=\{(i-1)p+1\},\ i=1,2,\dots,r(m)=n.$$

Выше мы показали, что $\theta'=\varkappa'=n,\ n_i'=1$. Отсюда, первые $\varkappa=2\varkappa'=2n$ координат $\xi_1,\xi_2,\dots\xi_{2n}$ вектора $\xi\in R^{2n}$ находятся из системы

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{v_i^{-1}+\lambda_l}\xi_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{v_i^{-1}-\lambda_l}\xi_{n+l}=\frac{1}{v_i^{-1}-\mu_0^{-1}}c,\ i=1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\exp(\lambda_lH)}{v_i^{-1}+\lambda_l}\xi_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\exp(-\lambda_lH)}{v_i^{-1}-\lambda_l}\xi_{n+l}=\frac{\exp(-H/\mu_0)}{v_i^{-1}-\mu_0^{-1}}c,\ i=1,2,\dots,n. \qquad (14.10)$$

В результате мы получили решение интегральной формы ЛАМ в виде

$$y_{sm}(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \left( exp(\lambda_j \tau) \xi_j + exp(-\lambda_j \tau) \xi_{j+n} \right) + c\, exp(-\tau/\mu_0), \qquad (14.11)$$

которое не зависит от угловых переменных $(s, m)$.

Теорема 6. Пусть $\lambda < 1$ и выполнены условия (14.5)-(14.6). Тогда решение интегральной формы ЛАМ, соответствующей изотропному рассеянию, существует, единственно и имеет вид (14.11), где $\lambda_j$ есть положительные корни характеристического уравнения (14.2), $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ находятся из системы (14.11), а постоянная $c$ определяется формулой (14.9).

Замечание 4. При $\lambda = 1$ нарушается условие (12.5) и решение не представляется в виде (12.6) (см. [9]).

Замечание 5. При практической реализации результатов теоремы 6 следует сделать замену $\xi_\ell = \xi_\ell\, exp(\lambda_\ell H),\ \ell = 1, 2, \ldots, n$ и изменить вид системы (14.10) и решения (14.11) с учетом этой замены.

Замечание 6. При нарушении условия (14.5) решение интегральной формы ЛАМ надо искать в виде (14.11) при $c = 0$.

Замечание 7. Решение ЛАМ дается формулой (2.4.2).

## ГЛАВА УI

## СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В этой главе мы приступим к рассмотрению вопросов сходимости и скорости сходимости ЛАМ к точному решению уравнения переноса. Основное внимание будет уделено изучению характера поведения приближенного решения в окрестности точного решения в зависимости от способов дискретизации уравнения переноса по переменной $\mu$. Вначале для простоты мы рассмотрим ЛАМ применительно к решению уравнения переноса в изотропно рассеивающей среде. Покажем, что скорость сходимости приближенного решения к точному полностью зависит от того, а в некоторых случаях и только от того, насколько хорошо мы можем аппроксимировать интегральную экспоненту квадратурными формулами. Поэтому дальнейшее изучение качественной картины поведения метода сводится к исследованию свойств интегральных экспонент, чему и посвящены §§2-7. В последних двух параграфах на основе этих результатов, а также результатов главы IУ, выводятся оценки скорости сходимости ЛАМ к точному решению уравнения переноса излучения в плоской анизотропно рассеивающей среде.

Отметим, что в случае изотропного рассеяния условие балансности (2I.6) всегда выполняется (т.е. $p_{\delta m} \equiv 1$ ) и переход от системы (2.2.2) к системе (2.2.8) в этом случае нецелесообразен (эти системы дают одно и то же решение). Поэтому в качестве приближенной задачи для уравнения переноса мы рассмотрим краевую задачу $\{(2.2.2),\ (2.2.4)\}$, которую обычно называют системой метода дискретных ординат (СМДО).

### §I. Линейно-алгебраическая модель переноса излучения в изотропно рассеивающей среде

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение переноса в плоскопараллельной изотропно рассеивающей (т.е. $g(\gamma) \equiv 1$ ) среде конечной оптической толщины

$$\mu \frac{\partial \mathcal{J}(\tau,\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{J}(\tau,\mu) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} \mathcal{J}(\tau,\mu')\,d\mu' + f(\tau) \qquad (\text{I.I})$$

с краевыми условиями

$$\mathcal{I}(0,\mu)=0,\ \mu>0,\quad \mathcal{I}(H,\mu)=0,\ \mu<0. \tag{I.2}$$

Отметим, что для широкого класса реальных задач атмосферной оптики зависимость свободного члена от угловых переменных при изотропном рассеянии отсутствует.

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением будем рассматривать интегральную форму уравнения переноса (I.I.5). В изотропном случае это уравнение определяет функцию (ср. с (I.2.I)

$$y(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\mathcal{I}(\tau,\mu')\,d\mu'+f(\tau), \tag{I.3}$$

а само уравнение (I.I.5) принимает вид [45]

$$y(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_{0}^{H}E_1(|\tau-s|)\,y(s)\,ds+f(\tau), \tag{I.4}$$

где $E_1(\tau)=\int_0^1 exp(-\frac{\tau}{\mu})\mu^{-1}d\mu$ – интегральная экспонента. Решение задачи $\{$(I.I)-(I.2)$\}$ восстанавливается по формуле (см. теорему I.I.I)

$$\mathcal{I}(\tau,\mu)=\begin{cases}\mu^{-1}\int_{\hat{a}}^{\tau}y(s)\exp(-(\tau-s)/\mu)\,ds, & \mu\neq 0,\\ y(\tau), & \mu=0,\end{cases} \tag{I.5}$$

где функция $\hat{a}=\hat{a}(\mu)$ определена в (I.2.3).

Отметим, что уравнение (I.4)-уравнение со слабой особенностью в ядре. Для таких уравнений известно [15,71,87], что если $f\in C^1[0,H]$, то решение $y(\tau)$ непрерывно на $[0,H]$, непрерывно дифференцируемо на $(0,H)$ и удовлетворяет неравенству

$$|y'(\tau)|\leqslant c(|\ln\tau|+|\ln(H-\tau)|),\quad 0<\tau<H. \tag{I.6}$$

В качестве приближенной задачи для решения уравнения переноса рассмотрим СМДО $\{$(2.2.2),(2.2.4)$\}$, которая при изотропном рассеянии и независимости свободного члена от угловых переменных принимает вид

$$\mu\frac{\partial\mathcal{I}_n(\tau,\mu)}{\partial\tau}+\mathcal{I}_n(\tau,\mu)=\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}[\mathcal{I}_n(\tau,-\mu_j)+\mathcal{I}_n(\tau,\mu_j)]\alpha_j+f(\tau), \tag{I.7}$$

$$\mathcal{I}_n(0,H)=0,\ \mu>0,\ \mathcal{I}_n(H,\mu)=0,\ \mu<0. \tag{I.8}$$

Здесь $\alpha_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,n$, $0<\mu_1<\dots<\mu_n<1$ соответственно веса и узлы КФ, аппроксимирующей интеграл столкновений. Отметим, что переменная $\mu$ в краевой задаче {(I.7),(I.8)} может принимать любые значения из [-I,I] в отличии от {(2.2.2), (2.2.4)}, где $\mu$ принимает лишь дискретные значения $\mu=\pm\mu_j$, $j=1,2,\dots,n$.

Заменой, аналогичной (I.3), краевая задача {(I.7)-(I.8)} сводится к приближенному интегральному уравнению

$$y_n(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_0^H E_1^n(|\tau-s|)\,y_n(s)\,ds+f(\tau). \tag{I.9}$$

Здесь $E_1^n(\tau)=\sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-\tau/\mu_j}\mu_j^{-1}$ – аппроксимация интегральной экспоненты $E_1(\tau)$ при помощи КФ.

Решения (I.9) и {(I.7),(I.8)} связаны формулой

$$\mathcal{I}_n(\tau,\mu)=\begin{cases}\mu^{-1}\int_{\hat a}^{\tau} y_n(s)\exp(-(\tau-s)/\mu)\,ds, & \mu\neq 0,\\ y(\tau) & ,\ \mu=0.\end{cases} \tag{I.10}$$

Обозначая через $T$ и $T_n$ соответственно интегральные операторы уравнений (I.4) и (I.9), имеем

$$y_n-y=(I-T_n)^{-1}(T_n y-Ty). \tag{I.11}$$

Из однозначной разрешимости уравнения (I.4) и сходимости $\|T_n-T\|_{c\to c}$ [59] вытекает, что,по крайней мере, при достаточно больших $n$ (а при $H<\infty$ при всех $n$ ) операторы $(I-T_n)^{-1}$ обратимы и

$$\|(I-T_n)^{-1}\|_{c\to c}\leq C \tag{I.12}$$

Ввиду симметричности операторов $T$ и $T_n$ имеем также

$$\|(I-T_n)^{-1}\|_{L\to L}\leq C. \tag{I.13}$$

На основании интерполяционной теоремы М.Рисса [6, с. 10] из (I.12) и (I.13) вытекает такое же неравенство для всех $L_q$, $1\leq q\leq\infty$.

Из (I.11) следует, что скорость сходимости $y_n\to y$ зависит лишь от малости функции $\varepsilon=T_n y-Ty$ . В предположении что КФ точна для постоянной функции, выражение для погрешности $\varepsilon$ преобразуется к виду [10]

$$(T_n y - Ty)(\tau) = \frac{\lambda}{2}\left\{y(0)v_n(\tau) + y(H)v_n(H-\tau) + w_n(\tau) + w_n^o(\tau)\right\}, \tag{I.14}$$

$$v_n(\tau) = \int_0^1 exp(-\tau/\mu)\,d\mu - \sum_{j=1}^{n} a_j\, exp(-\tau/\mu_j), \tag{I.15}$$

$$w_n(\tau) = \int_0^{\tau} v_n(\tau-\xi)\,y'(\xi)\,d\xi\ , \tag{I.16}$$

$$w_n^o(\tau) = -\int_{\tau}^{H} v_n(\xi-\tau)\,y'(\xi)\,d\xi\,. \tag{I.17}$$

Лемма I. Для определенных в (I.16)-(I.17) функций $w_n$ и $w_n^o$ справедливы оценки

$$\|w_n\|_C \leqslant c\,min\left\{\|v_n\|_C,\ |ln\mu_1|\left[\mu_1\|v_n\|_C + \|v_n\|_L\right]\right\}, \tag{I.18}$$

$$\|w_n^o\|_C \leqslant c\,min\left\{\|v_n\|_C,\ |ln\mu_1|\left[\mu_1\|v_n\|_C + \|v_n\|_L\right]\right\}, \tag{I.19}$$

$$\|w_n\|_L \leqslant c\,\|v_n\|_L\,, \tag{I.20}$$

$$\|w_n^o\|_L \leqslant c\,\|v_n\|_L \tag{I.21}$$

Здесь $\mu_1 > 0$ ближайший к точке 0 узел КФ.

Доказательство. Мы будем оценивать функции $w_n$. Оценки для $w_n^o$ вытекают из аналогичных рассуждений.

Рассмотрим отдельно случаи $0 \leqslant \tau \leqslant 2\mu_1$ и $2\mu_1 \leqslant \tau \leqslant H$. В первом случае на основании (I.6) имеем

$$|w_n(\tau)| \leqslant \int_0^{\tau} |v_n(\tau-\xi)y'(\xi)|\,d\xi \leqslant \|v_n\|_C \int_0^{2\mu_1} |y'(\xi)|\,d\xi \leqslant c\mu_1 |ln\mu_1|\,\|v_n\|_C\,.$$

При $2\mu_1 \leqslant \tau \leqslant H$ разобьем интеграл на три части: от 0 до $\mu_1$; от $\mu_1$ до $\tau-\mu_1$, и от $\tau-\mu_1$ до $\tau$. Первый и третий интеграл легко оцениваются величиной $c\mu_1|ln\mu_1|\,\|v_n\|_C$, а для оценки второго интеграла запишем цепочку неравенств:

$$\int_{\mu_1}^{\tau-\mu_1} |v_n(\tau-\xi)\,y'(\xi)|\,d\xi \leqslant \max_{\mu_1 \leqslant \xi \leqslant H-\mu_1} |y'(\xi)|\,\|v_n\|_L \leqslant c\,|ln\mu_1|\,\|v_n\|_L\,.$$

Оценка $\|w_n\|_C \leqslant c\|v_n\|_C$ очевидна, что и доказывает справедливость (I.18).

Оценка (I.20) вытекает из теоремы Фубини. Действительно, изменением порядка интегрирования находим

$$\int_0^H |w_n(\tau)|d\tau \leqslant \int_0^H |u'(\xi)|d\xi \int_\xi^H |v_n(\tau-\xi)|d\tau \leqslant \|v_n\|_L \int_0^H |u'(\xi)|d\xi .$$

Лемма доказана.

## §2. Интегральные экспоненты

Как мы уже видели, (I.14), скорость сходимости МДО зависит от того, насколько хорошо мы умеем приближать интегральные экспоненты при помощи КФ. Исследуем подробнее функции $E_p(\tau)$, $\tau>0$ , чтобы выяснить особенности такого приближения.

Итак,

$$E_p(\tau) = \int_0^1 \frac{exp(-\tau/\mu)}{\mu^{2-p}} d\mu , \quad p=1,2,\dots, \quad \tau>0. \qquad (2.1)$$

I. Рассмотрим сначала случай $p=1$ . Делая замену $s=\tau/\mu$, получим

$$E_1(\tau) = \int_0^1 \frac{exp(-\tau/\mu)}{\mu} d\mu = \int_\tau^\infty \frac{exp(-s)}{s} ds . \qquad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что $E_1(\tau)$ - убывающая функция и интерес представляет ее поведение около нуля. Разложим функцию $exp(-s)$ в ряд Тейлора и, поделив каждое слагаемое на $s$ , проинтегрируем полученный равномерно сходящийся ряд от $\tau$ до $T$ . Имеем

$$\int_\tau^T \frac{exp(-s)}{s} ds = \left[ \ln s - s + \frac{s^2}{2\cdot 2!} - \frac{s^3}{3\cdot 3!} + \dots \right] \Bigg|_{s=\tau}^{s=T} .$$

Отсюда

$$E_1(\tau) - E_1(T) = \int_\tau^T \frac{exp(-s)}{s} ds = g(\tau) - g(T) , \qquad (2.3)$$

где

$$g(\tau) = -\left( \ln\tau - \tau + \frac{\tau^2}{2\cdot 2!} - \frac{\tau^3}{3\cdot 3!} + \dots \right)$$

есть при $\tau > 0$ аналитическая функция. Деля левые и правые части в (2.3) на $\tau - T$ и переходя к пределу при $\tau \to T$, получим

$$E_1'(\tau) = g'(\tau),$$

откуда

$$E_1(\tau) = g(\tau) - \gamma = -\gamma - \ln\tau + \tau - \frac{\tau^2}{2\cdot 2!} + \frac{\tau^3}{3\cdot 3!} - \ldots, \quad \tau > 0. \qquad (2.4)$$

Здесь $\gamma = 0.5772...$ - постоянная Эйлера.

Получим аналогичное разложение и для остальных $p = 2,3...$ Из (2.I) легко видеть, что

$$E_p'(\tau) = -E_{p-1}(\tau), \quad p = 2,3,\ldots$$

Применяя несколько раз последнее равенство, получим цепочку равенств

$$E_p(\tau) = E_p(0) - \int_0^\tau E_{p-1}(\tau')d\tau' =$$

$$= E_p(0) - \tau E_{p-1}(0) + \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} E_{p-2}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 = \ldots =$$

$$= E_p(0) - \tau E_{p-1}(0) + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{\tau^{p-3}}{(p-3)!}E_3(0) +$$

$$+ (-1)^p \int_0^\tau\int_0^{\tau_1}\ldots\int_0^{\tau_{p-3}} E_2(\tau_{p-2})d\tau_{p-2}\ldots d\tau_2 d\tau_1 .$$

Но, с учетом (2.4), при малых $\tau > 0$ имеем[I]

$$E_2(\tau) = E_2(0) + \int_0^\tau E_2'(\tau')d\tau' = 1 + \tau(\ln\tau - 1 + \gamma) + \mathcal{O}(\tau^2),$$

откуда

$$E_p(\tau) = \sum_{i=1}^{p-2}(-1)^{i-1}\frac{\tau^{i-1}}{(p-i)(i-1)!} + (-1)^p\frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!} +$$

$$+ (-1)^p\int_0^\tau\int_0^{\tau_1}\ldots\int_0^{\tau_{p-3}}\tau_{p-2}\left[\ln\tau_{p-2} - 1 + \gamma + \mathcal{O}(\tau_{p-2})\right]d\tau_{p-2}\ldots d\tau_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}\tau^{i-1}}{(p-i)(i-1)!} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\tau^{p-1}\Big(\ln\tau - \sum_{i=1}^{p-1} i^{-1} + \gamma\Big) + \mathcal{O}(\tau^p) . \qquad (2.5)$$

---

[I] Запись $\alpha = \mathcal{O}(\beta)$ означает, что величина $\alpha/\beta$ ограничена при $\beta \to 0$

Здесь мы учли, что

$$E_p(0)=1/(p-1).$$

Сравнивая (2.4) и (2.5), заключаем, что справедлива

Лемма 2. При малых $\tau>0$ имеет место представление

$$E_p(\tau)=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}\tau^{i-1}}{(p-i)(i-1)!}-\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\tau^{p-1}\Big(\ln\tau+\gamma-\sum_{i=1}^{p-1}i^{-1}\Big)+O(\tau^p),\ p=1,2,\ldots$$

2. Обозначим через $\psi_{\tau,p}(\mu)$ подынтегральную функцию в определении интегральных экспонент (2.I):

$$\psi_{\tau,p}(\mu)=\exp(-\tau/\mu)\,\mu^{p-2},\ p=1,2,\ldots \qquad (2.6)$$

При каждом $p$ будем рассматривать ее как функцию, зависящую от параметра $\tau>0$.

Лемма 3. Пусть $k\geqslant p-1$, тогда $k$-тая производная от функции $\psi_{\tau,p}$ имеет вид

$$\psi^{(k)}_{\tau,p}(\mu)=(-1)^{k+p-1}\frac{(k-p+1)!}{\mu^{k-p+2}}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^{p-1}\exp(-\tau/\mu)\,L^{(p-1)}_{k-p+1}(\tau/\mu), \qquad (2.7)$$

где $L^{(\alpha)}_k(x)$ – обобщенный многочлен Лагерра.

Доказательство. Проведем его по индукции. Для $p=1$ равенство (2.7) верно, ибо

$$\psi^{(k)}_{\tau,1}(\mu)=(-1)^k k!\,\frac{\exp(-\tau/\mu)}{\mu^{k+1}}\,L^{(0)}_k(\tau/\mu).$$

Последнее равенство приведено в [5 7], его также нетрудно получить непосредственными вычислениями. Пусть (2.7) верно для $p=m$. Докажем для $p=m+1$. Из очевидного равенства

$$[x f(x)]^{(k)}=k f^{(k-1)}(x)+x f^{(k)}(x)$$

следует

$$\left(\frac{\exp(-\tau/\mu)}{\mu^{2-m-1}}\right)^{(k)}=k\left(\frac{\exp(-\tau/\mu)}{\mu^{2-m}}\right)^{(k-1)}+\mu\left(\frac{\exp(-\tau/\mu)}{\mu^{2-m}}\right)^{(k)}=$$

$$=k\left[(-1)^{k+m-2}\frac{(k-m)!}{\mu^{k-m+1}}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^{m-1}\exp(-\tau/\mu)\,L^{(m-1)}_{k-m}(\tau/\mu)\right]+$$

$$+\mu\left[(-1)^{k+m-1}\frac{(k-m+1)!}{\mu^{k-m+2}}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^{m-1}\exp(-\tau/\mu)\,L^{(m-1)}_{k-m+1}(\tau/\mu)\right]=$$

$$= (-1)^{k+m} \frac{(k-m)!}{\mu^{k-m+1}} \left(\frac{\tau}{\mu}\right)^m exp(-\tau/\mu) \left[ \frac{\mu}{\tau} k L_{k-m}^{(m-1)} (\tau/\mu) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu}{\tau} (k-m+1) L_{k-m+1}^{(m-1)} (\tau/\mu) \right].$$

В известном равенстве, связывающем обобщенные многочлены Лагерра [48, с. 230]

$$x^{-1} \left[ (n+1+\alpha) L_n^{(\alpha)} (x) - (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)} (x) \right] = L_n^{(\alpha+1)} (x)$$

положим $x = \tau/\mu$, $\alpha = m-1$, $n = k-\alpha-1$. Тогда получим

$$\psi_{\tau, m+1}^{(k)} (\mu) = (-1)^{k+m} \frac{(k-m)!}{\mu^{k-m+1}} \left(\frac{\tau}{\mu}\right)^m exp(-\tau/\mu) L_{k-m}^{(m)} (\tau/\mu),$$

что и доказывает предположение индукции.

Лемма доказана.

Из (2.6) видно, что функция $\psi_{\tau,p} \in C^{\infty}$, а из (2.7) следует, что $\psi_{\tau,p}^{(k)} |_{\mu=0} = 0$, $k = p-1, p, \ldots$, однако, начиная с $k = p-1$ производные порядка $k$ не ограничены в совокупности, причем

$$|\psi_{\tau,p}^{(k)} (\mu)| \leqslant C_{k,p} \mu^{p-k-2}, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \tau \geqslant 0, \ k \geqslant p-2, \tag{2.8}$$

$$|\psi_{\tau,p}^{(k)} (\mu)| \leqslant C_{k,p} \tau^{p-k-2}, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \tau \geqslant 0, \ k \geqslant p-2. \tag{2.9}$$

Используя неравенство "элементарной интерполяции"

$$min \{ r, s \} \leqslant r^{\sigma} s^{1-\sigma}, \quad \sigma \in [0,1],$$

которое верно при всех $r, s \geqslant 0$, получим

$$|\psi_{\tau,p}^{(k)} (\mu)| \leqslant C_{k,p} \frac{1}{\mu^{(k+2-p)\sigma}} \frac{1}{\tau^{(k+2-p)(1-\sigma)}}, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \tau > 0, k \geqslant p-2. \tag{2.10}$$

(Здесь и далее через $c$, $c_k$, $c_{k,p}$ мы будем обозначать положительные постоянные, которые могут принимать различные значения в различных соотношениях)

Чтобы оценить величину константы в неравенствах (2.8)-

(2.10) достаточно воспользоваться оценкой многочленов Лагерра [1,с.593].

$$\exp(-x/2)\left|L_k^{(\alpha)}(x)\right| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k!\,\Gamma(\alpha+1)},\ \alpha\geqslant 0,\ x\geqslant 0, \qquad (2.11)$$

где $\Gamma$ - гамма функция. В частности для $\psi_{\tau,2}^{(k)}$ справедлива оценка

$$|\psi_{\tau,2}^{(k)}(\mu)| \leqslant 2\exp(-1)\,k!\,\mu^{-k},\ 0<\mu\leqslant 1,\ \tau\geqslant 0,\ k=1,2,\ldots \qquad (2.12)$$

В заключение этого параграфа докажем следующий результат.

Лемма 4. При всех $\tau\geqslant 0$ функция $\mu^{k-p}|\psi_{\tau,p+1}^{(k)}(\mu)|$ суммируема от 0 до 1, т.е.

$$\int_0^1 \mu^{k-p}\left|\psi_{\tau,p+1}^{(k)}(\mu)\right| d\mu \leqslant c_{k,p},\ p=1,2,\ldots,\ k\geqslant p \qquad (2.13)$$

Доказательство. С учетом (2.7) имеем

$$\mu^{k-p}\left|\psi_{\tau,p+1}^{(k)}(\mu)\right| = (k-p)!\,\frac{\exp(-\tau/\mu)}{\tau}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^{p+1}\left|L_{k-p}^{(p)}(\tau/\mu)\right|.$$

Отсюда, делая замену переменных и применяя оценку (2.11), получим

$$\int_0^1 \mu^{k-p}\left|\psi_{\tau,p+1}^{(k)}(\mu)\right| d\mu = \frac{(k-p)!}{\tau}\int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^{p+1}\left|L_{k-p}^{(p)}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)\right| d\mu =$$

$$= (k-p)!\int_\tau^\infty x^{p-1}\exp(-x)\left|L_{k-p}^{(p)}(x)\right| dx \leqslant (k!/p!)\int_\tau^\infty x^{p-1}\exp(-x/2)\,dx.$$

Заметим, что $L_0^{(p-1)}(x)=1$ при всех $p>0$ и $x\in[0,\infty)$. Тогда ввиду ортогональности многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ с весом $x^\alpha\exp(-x)$ на интервале $(0,\infty)$ имеем

$$\int_\tau^\infty x^{p-1}\exp(-x/2)\,dx < 2^{p-1}\int_0^\infty x^{p-1}\exp(-x)\left(L_0^{(p-1)}(x)\right)^2 dx \leqslant C_p.$$

Лемма доказана.

## §3. Нестандартная форма остаточного члена для квадратурной формулы

Из предыдущего параграфа следует, что функции $\psi_{\tau,\mu}$ (или ее производные) имеют особенности в точке ноль, т.е. в левом конце отрезка интегрирования. Для аппроксимации интеграла от таких функции естественно использовать КФ, которые имеют сгущение узлов в левом конце отрезка интегрирования. Оценке остаточного члена для таких КФ и посвящен настоящий параграф.

I. Мы будем рассматривать последовательность КФ, приближающих интеграл

$$\int_0^1 f(\mu)d\mu \approx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} f(\mu_j^{(n)}), \qquad (3.1)$$

$\alpha_j^{(n)} \geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n;\ 0<\mu_1^{(n)}<\mu_2^{(n)}<\ldots<\mu_n^{(n)}\leqslant 1,\ n=1,2,\ldots$

(В дальнейшем верхний индекс $n$ мы будем опускать).

Обозначим через $R_n(f)$ остаточный член КФ (3.1), т.е.

$$R_n(f)=\int_0^1 f(\mu)d\mu-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f(\mu_j).$$

Пусть $W^{(N)}(0,1)$ обозначает класс функций, имеющих на $[0,1]$ абсолютно непрерывные производные до порядка $N$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка $N+1$.

Лемма 5. Пусть $f\in W^{(N)}(0,1)$, и пусть КФ точна для многочленов степени $N$. Тогда для всех $s=1,2,\ldots,N+1$ справедливо равенство

$$R_n(f)=\frac{1}{(s-1)!}\int_0^1 \Phi_s(\mu)f^{(s)}(\mu)d\mu, \qquad (3.2)$$

где

$$\Phi_s(\mu)=\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i C_i^{s-1}A_{s-i}(\mu)\mu^i, \qquad (3.3)$$

а

$$A_m(\mu)=\sum_{\mu_j<\mu}\alpha_j\mu_j^{m-1}-\mu^m/m. \qquad (3.4)$$

(Здесь и далее $C_i^s$ - биномиальные коэффициенты).

Доказательство. Разложим функцию $f$ в ряд Тейлора. Учитывая, что КФ точна для многочленов степени $N$, можно выписать известное выражение для остаточного члена КФ (см., например, [41, с. 26])

$$R_n(f) = \frac{1}{(s-1)!} \int_0^1 F_s(\mu) f^{(s)}(\mu)\, d\mu,$$

где

$$F_s(\mu) = \frac{(1-\mu)^s}{s} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_s(\mu_j - \mu),\ s = 1, 2, \dots, N+1,$$

$$K_s(t) = t^{s-1},\ t \geq 0;\ K_s(t) = 0,\ t < 0.$$

Для доказательства леммы нам достаточно показать, что $F_s \equiv \Phi_s$, $s = 1, 2, \dots, N+1$. Действительно. Выпишем цепочку равенств

$$F_s(\mu) = \frac{(1-\mu)^s}{s} - \sum_{\mu_j \geq \mu} \alpha_j (\mu_j - \mu)^{s-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (-1)^s C_i^s s^{-1} \mu^i - \sum_{\mu_j \geq \mu} \alpha_j \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i C_i^{s-1} \mu_j^{s-1-i} \mu^i =$$

$$= (-1)^s \mu^s s^{-1} + \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i C_i^{s-1} \mu^i \left( \frac{1}{s-i} - \sum_{\mu_j \geq \mu} \alpha_j \mu_j^{s-1-i} \right) =$$

$$= (-1)^s \mu^s s^{-1} + \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i C_i^{s-1} \mu^i \sum_{\mu_j < \mu} \alpha_j \mu_j^{s-1-i} \qquad (3.5)$$

Для получения последнего равенства мы использовали точность КФ для многочленов степени $N$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j^{i-1} = i^{-1},\ i = 1, 2, \dots, N+1.$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое в (3.5). Из очевидного равенства

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_i^s = \delta_{0s},$$

где $\delta_{ij}$ – символ Кронекера следует, что при $s \neq 0$ справедлива следующая цепочка

$$-\frac{(-1)^s}{s} = -\frac{(-1)^s}{s} C_s^s = \frac{\delta_{0s}}{s} - (-1)^s \frac{C_s^s}{s} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i C_i^s = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \frac{C_i^{s-1}}{s-i}$$

Продолжая (3.5), имеем

$$F_s(\mu) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i C_i^{s-1} \mu^i A_{s-i}(\mu) \equiv$$

$$\equiv \Phi_s(\mu), \quad s=1,2,\dots,N+1,$$

где $A_m$ определена в (3.4)

Лемма доказана.

2. Мы сделаем дополнительное предположение относительно весов и узлов КФ (3.1). Пусть при некотором целом положительном $s \leq N+1$ имеет место равенство[I]

$$\text{A)}\ \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \mu_j^{i-1} = \frac{\mu_{\ell+1}^i + \mu_\ell^i}{2i} + O(\mu_1)\mu_\ell^{i-1}, \ \ell=1,2,\dots,n, \ i=1,2,\dots,s.$$

(Это требование мы обсудим ниже.)

Рассмотрим функцию $A_m$. Для всех $\mu \in (\mu_\ell, \mu_{\ell+1}]$, $\ell=1,2,\dots,n$; $\mu_{n+1}=1$, с учетом А) имеем

$$A_m(\mu) = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \mu_j^{m-1} - \frac{\mu^m}{m} = \frac{\mu_{\ell+1}^m + \mu_\ell^m}{2m} - \frac{\mu^m}{m} + O(\mu_1)\mu_\ell^{m-1}.$$

Для того, чтобы выписать вид функции $\Phi_s$ при $\mu \in (\mu_\ell, \mu_{\ell+1}]$, найдем сумму $\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i C_i^{s-1}(s-i)^{-1}\left[\frac{A^{s-i}+B^{s-i}}{2}\mu^i - \mu^s\right]$. Цепочка несложных равенств показывает, что

$$\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i C_i^{s-1}(s-i)^{-1}\left[\frac{A^{s-i}+B^{s-i}}{2}\mu^i - \mu^s\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i \frac{C_i^{s-1}}{s-i}A^{s-i}\mu^i +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i \frac{C_i^{s-1}}{s-i}B^{s-i}\mu^i - \mu^s \sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i \frac{C_i^{s-1}}{s-i} =$$

$$= \frac{(-1)^{s+1}}{2s}\mu^s + (2s)^{-1}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i C_i^s A^{s-i}\mu^i + (-1)^{s+1}(2s)^{-1}\mu^s +$$

$$+ (2s)^{-1}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i C_i^s B^{s-i}\mu^i + (-1)^s s^{-1}\mu^s - \mu^s s^{-1}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i C_i^s = (2s)^{-1}\left[(A-\mu)^s + (B-\mu)^s\right].$$

Подставляя вместо $A$ и $B$ узлы $\mu_{\ell+1}$ и $\mu_\ell$, имеем

$$\Phi_s(\mu) = \frac{1}{2s}\left[(\mu_{\ell+1}-\mu)^s + (\mu_\ell-\mu)^s\right] + r_s(\mu), \ \mu \in (\mu_\ell, \mu_{\ell+1}], \tag{3.6}$$

где

$$|r_s(\mu)| = \left|\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i C_i^{s-1} O(\mu_1)\mu_\ell^{s-1-i}\mu^i\right| \leq$$

$$\leq c\mu_1 \sum_{i=0}^{s-1} C_i^{s-1}\mu_\ell^{s-1-i}\mu^i = c\mu_1(\mu_\ell+\mu)^{s-1} \leq c_s \mu_1 \mu^{s-1}$$

---

[I] Запись $\alpha_n = O(\mu_1) = O(\mu_1^m)$ означает, что последовательность $\alpha_n/\mu_1^m$ ограничена при $n\to\infty$

Заметим, что при $\mu \in [0, \mu_1]$ из (3.3) и (3.4) следует

$$\Phi_s(\mu) = (-1)^s s^{-1} \mu^s \tag{3.7}$$

Подставив (3.6) и (3.7) в (3.2), получим вид остаточного члена для КФ, удовлетворяющих условию А):

$$R_n(f) = \frac{1}{2s!} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} \left[ (\mu_{j+1}-\mu)^s + (\mu_j-\mu)^s \right] f^{(s)}(\mu)\, d\mu +$$

$$+ (-1)^s \frac{1}{s!} \int_0^{\mu_1} \mu^s f^{(s)}(\mu)\, d\mu + \frac{1}{(s-1)!} \int_{\mu_1}^{1} r_s(\mu) f^{(s)}(\mu)\, d\mu. \tag{3.8}$$

Обозначим

$$\Delta\mu_j = \mu_{j+1} - \mu_j, \ j = 0, 1, 2, \ldots, n, \ \mu_0 = 0, \ \mu_{n+1} = 1.$$

Далее мы будем рассматривать КФ (3.I), узлы которых удовлетворяют неравенству

B) $$\Delta\mu_j \leqslant C \mu_1^{1-\varrho} \mu_j^{\varrho}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь параметр $\varrho \in [0,1)$ характеризует степень сгущения узлов к точке 0. Более детальное исследование параметра $\varrho$ , а также условия В) мы отложим до §6.

Для первого слагаемого в (3.8) справедлива цепочка равенств

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} \left[ (\mu_{j+1}-\mu)^s + (\mu_j-\mu)^s \right] f^{(s)}(\mu)\, d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} \left[ (\mu_{j+1}-\mu)^s + (\mu-\mu_j)^s \right] |f^{(s)}(\mu)|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant 2C \mu_1^{(1-\varrho)s} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} \mu_j^{\varrho s} |f^{(s)}(\mu)|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant C \mu_1^{(1-\varrho)s} \int_{\mu_1}^{1} \mu^{\varrho s} |f^{(s)}(\mu)|\, d\mu.$$

Отсюда

$$|R_n(f)| \leqslant \int_0^1 G_{s,\varrho}(\mu) |f^{(s)}(\mu)|\, d\mu, \tag{3.9}$$

где

$$G_{s,\varrho} = \mu_1^{(1-\varrho)s} \mu^{\varrho s} + \mu_1 \mu^{s-1}. \tag{3.10}$$

Мы доказали следующий результат:

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 5 и пусть КФ удовлетворяет при некотором натуральном $s \leq N+1$ условию А) и при некотором $\varrho \in [0,1)$ -условию В). Тогда для остаточного члена КФ справедлива оценка (3.9), где функция $G_{s,\varrho}$ определена в (3.10)

Замечание I. Последнюю лемму нетрудно обобщить на случай произвольного отрезка $[a,b], -\infty < a < b < \infty$. В этом случае условия А) и В) принимают вид

$$A') \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mu_j^{i-1} = \frac{\mu_{l+1}^i + \mu_l^i}{2i} - \frac{a^i}{i} + O(\mu_1 - a)(\mu_l - a)^{i-1}, \quad \begin{matrix} l = 1,2,\dots,n; \\ i = 1,2,\dots,s; \end{matrix}$$

$$B') \quad \Delta\mu_j \leq C(\mu_1 - a)^{1-\varrho}(\mu_j - a)^{\varrho}, \; j = 1,2,\dots,n; \; 0 \leq \varrho < 1.$$

Отметим, что в случае отрезка $[a,b]$ функция $A_m$, определенная в (3.4), имеет вид

$$A_m(\mu) = \sum_{\mu_j < \mu} \alpha_j \mu_j^{m-1} + \frac{a^m - \mu^m}{m} .$$

3. Применим к правой части оценки (3.9) полиномиальную аппроксимацию с весом в пространстве суммируемых функций. Мы будем использовать результат работы [89], а именно:

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_M} \int_{-1}^{1} |u - P|(\mu)\omega(\mu)d\mu \leq \frac{C_{t,\omega}}{M^t} \int_{-1}^{1} |u^{(t)}(\mu)|\omega(\mu)(1-\mu^2)^{t/2} d\mu . \qquad (3.11)$$

Здесь $\mathcal{P}_M$ обозначает множество многочленов степени $M$, $t$ - целое положительное число ($t \leq M+1$), $C_{t,\omega}$ - константа, не зависящая от $M$ и $u$, а $\omega$ - весовая функция Якоби

$$\omega_{\alpha,\beta}(\mu) = (1+\mu)^{\alpha}(1-\mu)^{\beta}, \; \alpha,\beta > -1 . \qquad (3.12)$$

Неравенство (3.11) справедливо для всех функций $u$, таких, что произведение $u^{(t)}(\mu)(1-\mu^2)^{t/2}$ интегрируемо на $[-1,1]$.

Нетрудно видеть, что оценка (3.11) распространяется и на весовые функции

$$\omega(\mu) = C_1 \omega_{\alpha_1\beta_1}(\mu) + C_2 \omega_{\alpha_2,\beta_2}(\mu),$$

где $\omega_{\alpha_i,\beta_i}, i=1,2$ - функции Якоби (3.12).

Сделав замену $\mu' = 0.5(\mu+1)$ неравенство (3.11) преобразуется к виду

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_M}\int_0^1 |u-P|(\mu)\omega(\mu)d\mu \le \frac{C_{t,\omega}}{M^t}\int_0^1 |u^{(t)}(\mu)|\omega(\mu)\mu^{t/2}(1-\mu)^{t/2}d\mu, \qquad (3.13)$$

где

$$\omega(\mu)=C_1\mu^{\alpha_1}(1-\mu)^{\beta_1}+C_2\mu^{\alpha_2}(1-\mu)^{\beta_2},\quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>-1 \qquad (3.14)$$

Вернемся к лемме 5. Ввиду того, что КФ точна для многочленов степени $N$, для всех $P\in\mathcal{P}_N$ справедливо равенство

$$R_n(f)=R_n(f-P).$$

Отсюда

$$|R_n(f)|=\inf_{P\in\mathcal{P}_N}|R_n(f-P)|\le C_s\inf_{P\in\mathcal{P}_{N-s}}\int_0^1 G_{s,\varrho}(\mu)|f^{(s)}-P|(\mu)d\mu,\quad s<N.$$

Из (3.10) следует, что функция $G_{s,\varrho}$ имеет вид (3.14), где $C_1=\mu_1^{(1-\varrho)s}$, $\alpha_1=\varrho s$, $\beta_1=0$, $C_2=\mu_1$, $\alpha_2=s-1$, $\beta_2=0$. Таким образом к правой части последнего неравенства мы можем применить оценку (3.13), положив $u=f^{(s)}$, $M=N-s$ и $\omega=G_{s,\varrho}$. Имеем

$$|R_n(f)|\le\frac{C_{s,t}}{(N-s)^t}\int_0^1 G_{s,\varrho}(\mu)|f^{(s+t)}(\mu)|\mu^{\frac{t}{2}}(1-\mu)^{\frac{t}{2}}d\mu\le\frac{C_{s,t}}{(N-s)^t}\int_0^1 G^1_{s,\varrho,t}(\mu)|f^{(s+t)}(\mu)|d\mu,$$

где

$$G^1_{s,\varrho,t}(\mu)=\mu_1^{(1-\varrho)s}\mu^{\varrho s+t/2}+\mu_1\mu^{s-1+t/2}, \qquad (3.15)$$

а $\mu_1>0$ – первый узел КФ.

Покажем, что этот результат остается в силе и в случае, если производные от функции $f$ имеют некоторые особенности в левом конце отрезка $[0,1]$.

$$Y^{(N)}_{s,t,\varrho}=\left\{f\in C[0,1]\cap C^{N-1}(0,1]:\ \int_0^1|f^{(i+j)}(x)|x^{\min\{\varrho i+j/2,\,i-1+j/2\}}dx<\infty,\ \begin{matrix}i=1,2,\dots,s\\ j=0,1,\dots,t\end{matrix}\right\}$$

где $0\le\varrho<1$, $t\le N-s+1$, $s<N-1$.

Теорема I. Пусть точная для многочленов степени $N$ КФ удовлетворяет при некотором натуральном $s<N$ условию A) и при некотором $\varrho\in[0,1)$ условию B). Тогда при всех $N-1$ справедлива оценка

$$|R_n(f)|\le\frac{C_{s,t}}{(N-s)^t}\int_0^1 G^1_{s,\varrho,t}(\mu)|f^{(s+t)}(\mu)|d\mu, \qquad (3.16)$$

где функция $G^1_{s,\varrho,t}$ определена в (3.15), а $t=0,1,\dots,N-s+1$.

Доказательство. Оценка (3.16) верна для всех $f\in W^{(N)}[0,1)$. Но пространство $Y^{(N)}_{s,\rho,t}$ содержит в себе $W^{(N)}(0,1)$ как плотное подмножество. Возьмем произвольную функцию из $Y^{(N)}_{s,\rho,t}$, аппроксимируем ее последовательностью функций $f_m\in W^{(N)}(0,1)$ и перейдем к пределу при $m\to\infty$ в обоих частях неравенства (3.16). Отсюда и вытекает справедливость (3.16) для произвольной $f\in Y^{(N)}_{s,\rho,t}$.

Теорема доказана.

Отметим, что параметры $s$ и $\rho$ определяются в условиях А) и В) и их выбор зависит от конкретной КФ.

Замечание 2. При $t=0$ оценки (3.16) справедливы и при $s=N$ и $s=N+1$ (Это непосредтвенно вытекает из леммы 6 и рассуждений, аналогичных доказательству теоремы I).

Замечание 3. Оценку (3.16) можно уточнить, рассматривая отдельно интегралы от 0 до $\mu_1$, и от $\mu_1$ до I (см. (3.8)), а именно: справедливо неравенство

$$|R_n(f)|\leq C_{s,t}\Big[(N-s)^{-t}\int_{\mu_1}^{1} G'_{s,\rho,t}(\mu)|f^{(s+t)}(\mu)|d\mu+\int_0^{\mu_1}\mu^s|f^{(s)}-P^*|(\mu)\,d\mu\Big], \quad (3.17)$$

где $P^*\in\mathcal{P}_{N-s}$ такой, что

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_{N-s}}\int_{\mu_1}^{1} G_{s,\rho}(\mu)|f^{(s)}-P|(\mu)\,d\mu=\int_{\mu_1}^{1} G_{s,\rho}(\mu)|f^{(s)}-P^*|(\mu)\,d\mu,$$

а функции $G_{s,\rho}$ и $G'_{s,\rho,t}$ определены соответственно в (3.10) и (3.15).

Действительно. Из (3.8) с учетом В) следует оценка

$$|R_n(f)|\leq C_s\Big[\int_{\mu_1}^{1} G_{s,\rho}(\mu)\,|f^{(s)}(\mu)|d\mu+\int_0^{\mu_1}\mu^s|f^{(s)}(\mu)|\,d\mu.$$

Теперь для вывода (3.17) достаточно в последнем неравенстве к первому слагаемому применить полиномиальную аппроксимацию с весом $H_{\mu_1}(\mu)\,G_{s,\rho}(\mu)$ в пространстве суммируемых на $[0,1]$ функций. Здесь $H_a(\mu)$ – функция Хевисайда:

$$H_a(\mu)=\begin{cases}0, & \mu<a,\\ 1, & \mu\geq a.\end{cases}$$

## §4. Аппроксимация интегральных экспонент

Применим результаты предыдущего параграфа к оценке точности аппроксимации интегральных экспонент $E_p$ (см.(2.I)) при помощи КФ

$$E_p^n(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\exp(-\tau/\mu_j)\mu_j^{p-2},\ \tau\geq 0,\ p=2,3,\ldots \quad (4.\mathrm{I})$$

I. Положим в неравенстве (3.I7) $f\equiv\psi_{\tau,p}$ (см. определение (2.6)). Тогда, обозначая через $R_n^p(\tau)$ погрешность аппроксимации $E_p$ при помощи $E_p^n$, получим

$$|R_n^p(\tau)|=|E_p^n(\tau)-E_p(\tau)|\leq c\,(I_1+I_2+I_3), \quad (4.2)$$

где

$$I_1=\frac{1}{(N-s)^t}\int_{\mu_1}^{1}|\psi_{\tau,p}^{(s+t)}(\mu)|\,\mu_1^{(1-\varrho)s}\mu^{\varrho s+t/2}\,d\mu,$$

$$I_2=\frac{1}{(N-s)^t}\int_{\mu_1}^{1}|\psi_{\tau,p}^{(s+t)}(\mu)|\,\mu_1\mu^{s-1+t/2}\,d\mu,$$

$$I_3=\int_0^{\mu_1}\mu^s\,|\psi_{\tau,p}^{(s)}-P^*|\,(\mu)\,d\mu\ .$$

Оценим $I_1$, применив для оценки производных от функции $\psi_{\tau,p}$ неравенство (2.8). Имеем

$$I_1\leq\frac{c\,\mu_1^{(1-\varrho)s}}{(N-s)^t}\int_{\mu_1}^{1}\mu^{p-2-t/2-s(1-\varrho)}\,d\mu.$$

Отсюда

$$I_1\leq c\,\frac{\mu_1^{p-1-t/2}}{(N-s)^t}\cdot\begin{cases}1 & s>(p-1-t/2)/(1-\varrho),\\ |\ln\mu_1|, & s=(p-1-t/2)/(1-\varrho).\end{cases} \quad (4.3)$$

Аналогично

$$I_2\leq c\,\frac{\mu_1^{p-1-t/2}}{(N-s)^t}\cdot\begin{cases}1, & t>2p-4,\\ |\ln\mu_1|, & t=2p-4.\end{cases} \quad (4.4)$$

Для оценки $I_3$ применим лемму 4, положив в ней вместо производных от функции $\psi_{\tau,p}$ разность между $\psi_{\tau,p}^{(s)}$ и $P^*$. Очевидно, что результат леммы остается в силе и

$$I_3 \leqslant \int_0^{\mu_1} \mu^{p-1} \mu^{s-p+1} \left|\psi_{\tau,p} - P^*\right|(\mu)\,d\mu \leqslant c\mu_1^{p-1}. \qquad (4.5)$$

Объединяя (4.2)-(4.5), видим, что справедлива

Лемма 7. Пусть точная для многочленов степени $N$ КФ удовлетворяет условиям А) и В). Тогда имеет место оценка

$$\max_{\tau\geqslant 0}\left|R_n^p(\tau)\right| \leqslant c\mu_1^{p-1}\begin{cases} 1+\varkappa_N(s,t), & \begin{cases} t=2p-3\leqslant N-s+1,\ s_1/2<s<N,\\ 2p-3<t\leqslant N-s+1,\ 0<s<N,\end{cases}\\ 1+\varkappa_N(s,t)\left|\ln\mu_1\right|, & \begin{cases} 2p-4=t\leqslant N-s+1,\ s_1\leqslant s<N,\\ 2p-3=t\leqslant N-s+1,\ s=s_1/2<N,\end{cases}\end{cases} \qquad (4.6)$$

где $s_1=1/(1-\varrho)$, функция

$$\varkappa_N(s,t)=\mu_1^{-t/2}/(N-s)^t, \qquad (4.7)$$

а функции $E_p$ и $E_p^n$ определены соответственно в (2.I) и (4.I).

Следствие. Пусть в условиях леммы 7 $p=2$, тогда

$$\max_{\tau\geqslant 0}\left|v_n(\tau)\right| \leqslant c\mu_1\begin{cases} 1+\varkappa_N(s,t), & \begin{cases} t=1,\ s_1/2<s<N,\\ 1<t\leqslant N-s+1,\ 0<s<N,\end{cases}\\ 1+\varkappa_N(s,t)\left|\ln\mu_1\right|, & \begin{cases} t=0,\ s_1\leqslant s\leqslant N+1\\ t=1,\ s=s_1/2<N.\end{cases}\end{cases} \qquad (4.8)$$

Здесь $v_n(\tau)\equiv R_n^2(\tau)$ (см. определение (I.I5)).

2. Теперь получим поточечные и интегральные оценки аппроксимации $E_p$ при помощи КФ $E_2^n$.

Лемма 8. Пусть выполнены условия леммы 7. Тогда для любого $\sigma\in(1/2,1],\sigma\neq\varrho$ справедливы поточечные оценки

$$\left|v_n(\tau)\right| \leqslant c\mu_1\begin{cases} \left(\frac{\mu_1}{\tau}\right)^{(t+s)(1-\sigma)}\varkappa_N(s,t)+\left(\frac{\mu_1}{\tau}\right)^{s(1-\sigma)}, & \begin{cases} s\geqslant s_1,\ \theta<t/2,\\ s<s_1,\ \theta<t/2+s_2,\end{cases}\\ \left(\frac{\mu_1}{\tau}\right)^{t/2}\varkappa_N(s,t)\left|\ln\mu_1\right|+\left(\frac{\mu_1}{\tau}\right)^{s(1-\sigma)}, & s=s_1,\ \theta=t/2,\end{cases} \qquad (4.9)$$

где $\theta=(s+t)(1-\sigma)$, $s=1/(1-\varrho)$, а $s_2=s(1-\varrho)-1$, причем $s$ и $t$ целые, такие что $0<s<N$, $0\leqslant t\leqslant N-s+1$.

Доказательство. Оценка интегралов $I_i$, $i=1,2,3$ (см.4.2), проводится аналогично доказательству леммы 7, но для оценки производных от функции $\psi_{\tau,2}$ вместо неравенства (2.8) применяется неравенство (2.I0). Рассматривая отдельно случаи, в которых степень $\mu$ под интегралом в $I_i$ меньше -I и равна -I, мы придем к оценке (4.9).

Лемма доказана

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 7. Предположим, что условие A) справедливо при $s = s_1 = 1/(1-\varrho)$. Тогда, если

$$|\ln \mu_1|^2/(N-s) \to 0 \ , \ n \to \infty, \tag{4.10}$$

то справедливо равенство[I]

$$\|v_n\|_{L[0,H]} = o(\mu_1/|\ln\mu_1|), \ H = const < \infty. \tag{4.11}$$

(Напомним, что $\mu_1 = \mu_1^{(n)}$, а $N = N(n)$ ).

Доказательство. В равенстве

$$\|v_n\|_{L[0,H]} = \|v_n\|_{L[0,\mu_1]} + \|v_n\|_{L[\mu_1, H]} \tag{4.12}$$

первое слагаемое оценивается при помощи нижней оценки в (4.8):

$$\|v_n\|_{L[0,\mu_1]} \leqslant c\mu_1 \|v_n\|_C \leqslant c\mu_1^2 (1+|\ln\mu_1|) .$$

Для оценки второго слагаемого в (4.12) возьмем непосредственно интеграл от обоих частей нижней оценки в (4.9), в которой выберем $t = 1$. Отметим, что при $s = s_1 = 1/(1-\varrho)$ для любого $\varrho \in [0,1)$ существует $\sigma = (3-\varrho)/(4-2\varrho)$, $\sigma \in (1/2, 1)$, что $t = 1$. Тогда, с учетом (4.10), следует, что

$$\|v_n\|_{L[\mu_1,H]} = o(\mu_1/|\ln\mu_1|),$$

откуда и следует равенство (4.11)

Лемма доказана.

Замечание 4. Для уточнения (4.11) конкретизируем выбор $s$ и $t$.

Введем целочисленные множества

$$\begin{aligned} L_1(\varrho,\sigma) &= \{(s,t) : 1 < \theta < t/2 ,\ s_1 < s < N,\ 0 \leqslant t \leqslant N-s+1\} , \\ L_2(\varrho,\sigma) &= \{(s,t) : 1 < \theta < t/2 + s_2 ,\ 1 \leqslant s < \min\{s_1, N\}, 0 \leqslant t \leqslant N-s+1\} , \end{aligned} \tag{4.13}$$

[I]Запись $a_n = o(b_n)$ означает, что последовательность $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$ .

где $1/2 < \sigma < 1$, $0 \leq \rho < 1$, $\sigma \neq \rho$, $\theta = (s+t)(1-\sigma)$, $s_1 = 1/(1-\rho)$, $s_2 = s(1-\rho)-1$.

Тогда при всех $(s,t) \in L_1 \cup L_2$, используя для оценки $\|v_n\|_{L[0,\mu_1]}$ первую оценку в (4.8), а для $\|v_n\|_{L[\mu_1, H]}$ первую оценку в (4.9), придем к более точному, чем (4.II), неравенству

$$\|v_n\|_{L[0,H]} \leq C\mu_1^2 \left[ 1 + \varkappa_N(s,t) \right]. \qquad (4.14)$$

Нетрудно видеть, что множества $L_1$ и $L_2$ не пусты. Например, множеству $L_1(1/2, 3/4)$ принадлежат пары (3,4), (3,5) и т.д. $(N \geq t+s-1)$, а множеству $L_2(1/2, 3/4)$ - пары (I,4),(I.5) и т.д. $(N \geq t)$.

## §5. Неулучшаемость оценки погрешности аппроксимации интегральных экспонент

В этом параграфе мы покажем, что интегральную экспоненту $E_n$ при помощи КФ $E_n^*$, удовлетворяющей некоторым естественным требованиям, нельзя равномерно приблизить лучше, чем $\mu_1^{n-1}$, где $\mu_1$ - первый узел КФ (ср. с оценкой (4.6)).

I. Мы предположим, что КФ (3.I) для любого $n$ = I,2,... удовлетворяет следующим требованиям

С) $\mu_l \leq \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \leq \mu_{l+1}$, $l = 1,2,\ldots,n$, $\mu_{n+1} = 1$,

Д) $\mu_{l+1} \leq C\mu_l$, $l = 1,2,\ldots,n$,

Е) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left( \frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_{j+1}} \right) < C_2$.

(Обсуждения этих требований мы также отложим до §6 настоящей главы).

Обозначим[I] $J = [1/\mu_1]$, $J^+ = J+1$, $J^- = J-1$ и введем целочисленные множества

$N_i^+ = \{k > 0 : \mu_{k+1} \leq i^{-1}\}$, $N_i = \{k > 0 : \mu_k \leq i^{-1}\}$, $N_i^- = \{k > 0 : \mu_{k-1} \leq i^{-1}\}$,

для $i$ = I,2,..., $J^+$, положив $\mu_0 = 0$. Очевидно, что $N_{J^+}^+ = N_{J^+} = \emptyset$, а $N_{J^+}^- = \{1\}$. Пусть далее

---

[I] Запись $[A]$ - означает здесь целую часть числа $A$.

$$I_i^+ = \sum_{j\in N_i^+} \alpha_j \ , \ I_i = \sum_{j\in N_i} \alpha_j \ , \ I_i^- = \sum_{j\in N_i^-} \alpha_j$$

Нетрудно видеть, что $0 \leqslant I_i^+ \leqslant I_i^- \leqslant I_i^-, \ i=1,2,\ldots,J^+$ и

$$I_1^+ = I_1 = I_1^- = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, , \tag{5.I}$$

$$I_{J^+}^+ = I_{J^+} = 0 \, , \ I_{J^+}^- = \alpha_1 \, . \tag{5.2}$$

Из условий С) и Д) следуют неравенства

$$I_i^+ \leqslant \mu_{l+1} \leqslant i^{-1}, \ l \in N_i^+, \ l+1 \notin N_i^+ , \tag{5.3}$$

$$I_i^- \geqslant \mu_l > i^{-1}, \ l \in N_i^-, \ l+1 \notin N_i^- , \tag{5.4}$$

$$I_i \geqslant \mu_l \geqslant c\mu_{l+1} > c\, i^{-1}, \ l \in N_i , \ l+1 \notin N_i , \tag{5.5}$$

$$I_i \leqslant \mu_{l+1} \leqslant c\mu_l \leqslant c\, i^{-1}, \ l \in N_i , \ l+1 \notin N_i \, . \tag{5.6}$$

Рассмотрим теперь как связаны $I_i^+$, $I_i$ и $I_i^-$. Справедливы равенства

$$I_i^+ = I_i - \alpha_{l(i)} , \tag{5.7}$$

где

$$\alpha_{l(i)} = \begin{cases} \alpha_l \, , & l \in N_i , \ l \notin N_i^+ , \\ 0 \, , & N_i = N_i^+ \end{cases} ,$$

и

$$I_i^- = I_i + \bar{\alpha}_{l(i)} , \tag{5.8}$$

где

$$\bar{\alpha}_{l(i)} = \begin{cases} \alpha_l \, , & l \in N_i^- , \ l \notin N_i , \\ 0 \, , & N_i = N_i^- \, . \end{cases}$$

Таким образом, $\alpha_{l(i)}$ – это вес КФ, соответствующий узлу $\mu_{l(i)}$ такому, что $\mu_{l(i)} \leqslant i^{-1}$, но $\mu_{l(i)+1} > i^{-1}$ и соответственно $\bar{\alpha}_{\ell(i)}$ такой вес, что $\mu_{\ell(i)-1} \leq i^{-1}, \mu_{\ell(i)} > i^{-1}$. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{J} \alpha_{\ell(i)} = \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$$

где

$$m_j = k' - k \geq 0,$$

а $k'$ и $k$ таковы, что

$$(k+1)^{-1} < \mu_{j+1} \leq k^{-1}, \ (k'+1)^{-1} < \mu_j \leq k'^{-1},$$

т.е. $m_j$ равно числу промежутеов $(1/k, 1/(k+1))$, на которое $j$ -ый узел КФ опережает $j+1$ -ый узел. Аналогично

$$\sum_{i=1}^{J} \bar{\alpha}_{\ell(i)} = \sum_{j=1}^{n} \bar{m}_j \alpha_j,$$

где $\bar{m}_j = m_{j-1}$, $j = 2, \ldots, n$, $\bar{m}_1 = 0$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = J^-,$$

а

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{m}_j = J^- - m_n.$$

Из последних неравенств для $k'$ и $k$ следует, что

$$\mu_j^{-1} - \mu_{j+1}^{-1} - 1 < k' - k < \mu_j^{-1} - \mu_{j+1}^{-1} + 1,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mu_j^{-1} - \mu_{j+1}^{-1}) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j < \sum_{i=1}^{J} \alpha_{\ell(i)} = \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j <$$

$$< \sum_{j=1}^{n} \mu_j^{-1} - \mu_{j+1}^{-1} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

Теперь, учитывая условия C) и E) заключаем, что существует такая постоянная $C$, что справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{J} \alpha_{\ell(i)} < C. \tag{5.9}$$

Аналогичное неравенство имеет место и для суммы $\bar{\alpha}_{\ell(i)}$.

Лемма 10. Пусть КФ удовлетворяет условиям C)-E). Тогда справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\mu_j^k} = \begin{cases} |\ln \mu_1| + O(1), & k=1, \\ C_{n,k}\, \mu_1^{1-k} + O(\mu_1^{2-k}), & k>1, \end{cases} \tag{5.10}$$

причём $0 < C_{n,k} \le C_{0k} < C$, $k = 2, 3, \dots$; $n = 1, 2, \dots$, а

$$|O(\mu_1^{2-k})| \le k \gamma_{n,k} \mu_1^{2-k},$$

где

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $k = 1$ и $k > 1$. При $k = 1$ можно выписать следующую цепочку (мы используем технику, предложенную в [83])

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\mu_j} = \sum_{i=1}^{J} \sum_{j \in N_i \setminus N_{i+1}} \alpha_j \mu_j^{-1} \le \sum_{i=1}^{J} (i+1) \sum_{j \in N_i \setminus N_{i+1}} \alpha_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{J} (i+1)(I_i - I_{i+1}) = \sum_{i=1}^{J} (i+1) I_i - \sum_{i=1}^{J} (i+1) I_{i+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{J} (i+1) I_i - \sum_{i=2}^{J^+} i I_i = 2 I_1 - J^+ I_{J^+} + \sum_{i=2}^{J} I_i \overset{(5.1),(5.2)}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{J} I_i \overset{c),(5.7)}{\le} 1 + \sum_{i=1}^{J} I_i^+ + \sum_{i=1}^{J} \alpha_{l(i)} \overset{(5.3),(5.9)}{<}$$

$$< 1 + c + \sum_{i=1}^{J} i^{-1} = \ln J + O(1).$$

(Здесь и далее в этом параграфе над знаками равенств и неравенств стоят номера используемых условий и соотношений).

Покажем обратное неравенство. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\mu_j} = \sum_{i=1}^{J} \sum_{j \in N_i \setminus N_{i+1}} (\alpha_j / \mu_j) \ge \sum_{i=1}^{J} i \sum_{j \in N_i \setminus N_{i+1}} \alpha_j = \sum_{i=1}^{J} i (I_i - I_{i+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{J} i I_i - \sum_{i=1}^{J} i I_{i+1} = \sum_{i=1}^{J} i I_i - \sum_{i=1}^{J^+} (i-1) I_i = J I_{J^+} + \sum_{i=1}^{J} I_i =$$

$$\overset{(5.2),(5.8)}{=} \sum_{i=1}^{J} I_i^- - \sum_{i=1}^{J} \bar{\alpha}_{l(i)} \overset{(5.4),(5.9)}{>} \sum_{i=1}^{J} i^{-1} - c = \ln J + O(1).$$

Таким образом при $k = 1$ лемма доказана.

Пусть теперь $k > 1$. Тогда, учитывая неравенства

$$(i+1)^k - i^k \le k(i+1)^{k-1}, \tag{5.11}$$

$$i^k - (i-1)^k \ge k(i-1)^{k-1}, \tag{5.12}$$

получим

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j^k}=\sum_{i=1}^{J}\sum_{j\in N_i\setminus N_{i+1}}\alpha_j/\mu_j^k<\sum_{i=1}^{J}(i+1)^k\sum_{j\in N_i\setminus N_{i+1}}\alpha_j=\sum_{i=1}^{J}(i+1)(I_i-I_{i+1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{J}(i+1)^k I_i-\sum_{i=1}^{J}i^k I_i-(J^+)^k I_{J^+}+I_1\overset{(5.2)}{=}\sum_{i=1}^{J}\left[(i+1)^k-i^k\right]I_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\leqslant k\sum_{i=1}^{J}(i+1)^{k-1}I_i+1\overset{(5.6)}{\leqslant}1+kc\sum_{i=1}^{J}\frac{(i+1)^{k-1}}{i}\leqslant c_{n,k}J^{k-1}+O(J^{k-2}).$$

Из известного равенства

$$\sum_{i=1}^{J}i^{k-2}=\frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}C_{k-1}^{i}(J+1)^{k-1-i}B_i=\frac{(J+1)^{k-1}}{k-1}-\frac{(J+1)^{k-2}}{2}+$$

$$+\left((k-2)/12\right)(J+1)^{k-3}-\ldots,$$

где $C_k^i$ – биномиальные коэффициенты, а $B_i$ числа Бернулли, следует, что $C_{n,k}\leqslant C_{0,k}\leqslant C$, $k=1,2,\ldots,n$, а $|O(J^{k-2})|\leqslant k\gamma_{nk}J^{k-2}$, где $\gamma_{n,k}<\gamma_{0,k}<\gamma$, $k=2,3,\ldots,n=1,2,\ldots$. Обратное неравенство показывается аналогично, применяя вместо (5.6) и (5.II) соответственно неравенства (5.5) и (5.I2).

Принимая во внимание, что $J=[1/\mu_1]$, приходим к равенствам (5.I0)

Лемма доказана.

2. Положим дополнительно, что КФ точны для многочленов степени $p-2$. Теперь разложим в определении $E_p^n$ (см.(4.I)) экспоненту в ряд. Получим

$$E_p^n(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^{p-2}\left(1-\tau/\mu_j+\ldots(-1)^p\frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!\,\mu_j^{p-2}}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^{p-2}\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\tau^{p-1}\left(\frac{1}{\mu_j^{p-1}}-\frac{\tau}{p\mu_j^p}+\frac{\tau^2}{p(p+1)\mu_j^{p+1}}-\ldots\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^i}{(i-1)!}\tau^{i-1}A_n^i-\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\tau^{p-1}A_n^p(\tau),$$

где

$$A_n^i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j^{p-i-1},\quad i=1,2,\ldots,p-1.$$

$$A_n^p(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{\mu_j}-\frac{\tau}{p}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{\mu_j^2}-\frac{\tau}{p+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{\mu_j^3}+\frac{\tau^2}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{\mu_j^4}-\dots\right.$$

В последнем равенстве обозначим $s=\tau/\mu_1$. Тогда, учитывая результат леммы 10, имеем

$$A_n^p(\tau)=C_{n,1}+|\ln\mu_1|-\frac{s}{p}\left\{C_{n,2}+O(1)-\frac{s}{p+1}\left[C_{n,3}+O(1)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{s^2}{(p+1)(p+2)}\left[C_{n,4}+O(1)\right]-\dots\right\}=-\ln\mu_1+\left\{C_{n,1}-\frac{C_{n,2}+O(1)}{p}s+\right.$$

$$\left.+\frac{C_{n,3}+O(1)}{p(p+1)}s^2-\frac{C_{n,4}+O(1)}{p(p+1)(p+2)}s^3+\dots\right\}=-\ln\mu_1+d_n^p, \qquad (5.13)$$

причем $|d_n^p(s)|\le d_0^p(s)$, а последняя функция ограничена, по крайней мере, при $s<1$, ибо ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\gamma_{n,k}+C_{n,k}}{(p+k)!}$ является абсолютно сходящимся при всех $p=2,3,\dots$

Сопоставим теперь асимптотические разложения $E_p$ и $E_p^n$, определенные в (2.5) и (5.13) соответственно. Имеем

$$E_p(s\mu_1)-E_p^n(s\mu_1)=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}(s\mu_1)^{i-1}\left[(p-i)^{-1}-A_n^i\right]+$$

$$+\frac{(-1)^p}{(p-1)!}(s\mu_1)^{p-1}\left[\ln s+\ln\mu_1-\sum_{i=1}^{p-1}i^{-1}-\ln\mu_1+\gamma+d_n^p(s)\right]+O\left[(s\mu_1)^p\right]$$

Принимая во внимание точность КФ для многочленов степени $p-2$, имеем $A_n^i=1/(p-i)$. Отсюда

$$E_p(s\mu_1)-E_p^n(s\mu_1)=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}(s\mu_1)^{p-1}\left[\ln s+\bar d_n^p(s)+O\left[(s\mu_1)^p\right]\right],$$

$$\bar d_n^p(s)=d_n^p(s)+\gamma-\sum_{i=1}^{p-1}i^{-1}.$$

Теперь зафиксируем $s\in(0,1)$ так, чтобы $\ln s+\bar d_n^p(s)\ne 0$, $n\ge n_0$. На возможность этого указывает тот факт, что функция $\ln s+d_0^p(s)+\gamma-\sum_{i=1}^{p-1}i^{-1}$ суть аналитическая неравная тождественно нулю. Значит существует $C_p=const>0$, такая, что

$$|E_p(s\mu_1)-E_p^n(s\mu_1)|\ge C_p\mu_1^{p-1},\ n\ge n_0$$

Итак справедлива

Теорема 2. Пусть точная для многочленов степени КФ удовлетворяет условиям С)-Е). Тогда справедлива оценка

$$\max_{\tau\ge 0}\left|E_p(\tau)-E_p^n(\tau)\right|\ge C_p\mu_1^{p-1},\ n\ge n_0, \qquad (5.14)$$

где $\mu_1$ - первый узел КФ, а функции $E_p$ и $E_p^n$ определяются в (2.I) и (4.I) соответственно

Замечание 5. Проводя аналогичным образом аппроксимацию функции $\tau^\ell E_p(\tau), \ell \geq 0$, можно показать, что имеет место оценка

$$\max_{\tau \geq 0} \left|\tau^\ell \left[ E_p(\tau) - E_p^n(\tau)\right]\right| \geq C_{p,\ell}\mu_1^{p+\ell-1}, \quad n \geq n_0', \ \ell \geq 0.$$

Замечание 6. Теорема 2 остается в силе, если вместо точности КФ для многочленов степени $p-2$ потребовать выполнения следующих соотношений

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j^{k-1} - k^{-1} \right| = O(\mu_1^k), \quad k = 1, 2, \ldots, p-1.$$

§6. Обсуждение условий А)-Е)

В этом параграфе мы посмотрим насколько естественны требования предъявляемые к КФ.

I. Требование А) имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \mu_j^{i-1} = \frac{\mu_{\ell+1}^i + \mu_\ell^i}{2i} + O(\mu_1)\mu_\ell^{i-1}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, n; \ i = 1, \ldots, s,$$

где $s$ некоторое целое положительное число меньшее, чем $N+1$, а $N$ - точность КФ.

Предположим, что веса и узлы КФ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\mu_\ell^i}{i} < \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \mu_j^{i-1} < \frac{\mu_{\ell+1}^i}{i}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, n, \ i = 1, 2, \ldots, s. \qquad (6.I)$$

Это условие вполне естественно и основные КФ удовлетворяют ему (например, для КФ Гаусса на [0,I] неравенства (6.I) при $i=1$ непосредственно вытекают из теоремы Чебышева-Маркова-Стильтьеза [43, с. 62]). Заметим, что величины, стоящие слева и справа в (6.I), есть интегралы от $0$ до $\mu_\ell$ и от $0$ до $\mu_{\ell+1}$ от функции $\mu^{i-1}$. Отсюда асимптотическое равенство А) требует, чтобы сумма $\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \mu_j^{i-1}$ лежала "недалеко" от середины отрезка между последними интегралами, а именно на расстоянии $O(\mu_1)\mu_\ell^{i-1}$

Отметим, что при построении оптимальной КФ на некоторых простейших классах функций требуется, чтобы сумма $\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \mu_j^{i-1}$ лежала точно в середине между ограничивающими ее интегралами, т.е. чтобы $O(\mu_1)\mu_\ell^{i-1} \equiv 0$ [29, с. I5I]. Очевидно, что уже при $s > 2$ таких КФ не существует, т.к.число уравнений $(ns)$ превышает число неизвестных $(\alpha_j, \mu_j, j=1,2,\dots,n)$

Рассмотрим КФ средних прямоугольников. Она точна для многочленов первого порядка. Отсюда требование А) должно выполняться для $s \le 2$. Действительно, при $i=1$ КФ средних прямоугольников является оптимальной на классе дифференцируемых функций и сумма $\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j$ лежит точно в середине между $\ell$-тым и $\ell+1$ узлом. При $i=2$ непосредственная проверка легко устанавливает справедливость А) (на самом деле, КФ средних прямоугольников удовлетворяет А) при всех $s$).

Для других КФ процесс проверки А) более трудоемкий. Мы докажем следующий результат, облегчающий эту проверку.

Лемма II. Условие А) равносильно выполнению равенств

$$\begin{cases} \alpha_1 \mu_1^{i-1} - (2i)^{-1}(\mu_2^i + \mu_1^i) = \mu_1 C_1^{n,i}, & j=1, \\ \alpha_j \mu_j^{i-1} - (2i)^{-1}(\mu_{j+1}^i - \mu_{j-1}^i) = \mu_1 C_j^{n,i}, & j=2,3,\dots,\ell, \end{cases} \tag{6.2}$$

где величины $C_j^{n,i}$ таковы, что

$$\sum_{j=1}^{\ell} C_j^{n,i} = \mathcal{O}(\mu_\ell^{i-1}), \quad \ell=1,2,\dots,n, \; i=1,2,\dots,s. \tag{6.3}$$

Доказательство. Пусть КФ удовлетворяет равенствам (6.2) -(6.3). Тогда

$$\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \mu_j^{i-1} = \frac{\mu_2^i + \mu_1^i}{2i} + C_1^{n,i}\mu_1 + (2i)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell}(\mu_{j+1}^i - \mu_{j-1}^i) +$$

$$+\mu_1 \sum_{j=2}^{\ell} C_j^{n,i} = (2i)^{-1}\left[\mu_1^i + \mu_2^i - \mu_1^i + \mu_3^i - \mu_2^i + \mu_4^i - \dots\right.$$

$$\left. - \mu_{\ell-1}^i + \mu_{\ell+1}^i\right] + \mu_1 \sum_{j=1}^{\ell} C_j^{n,i} = \frac{\mu_{\ell+1} + \mu_\ell}{2i} + \mathcal{O}(\mu_1)\mu_\ell^{i-1}.$$

Для доказательства обратного применим математическую индукцию. При $j=1$ выполнение (6.2) очевидно. Пусть $j=2$, тогда

$$\alpha_2 \mu_2^{i-1} = \frac{\mu_3^i + \mu_2^i}{2i} + \mu_1 \mathcal{O}(\mu_2^{i-1}) - \alpha_1 \mu_1^{i-1} = \frac{1}{2i}(\mu_3^i - \mu_1^i) +$$

$$+ \mu_1 \mathcal{O}(\mu_2^{i-1}) - \mu_1 C_1^{n,i} = \frac{1}{2i}(\mu_3^i - \mu_1^i) + \mu_1 C_2^{n,i};$$

где

$$C_2^{n,i} = \mathcal{O}(\mu_2^{i-1}) - C_1^{n,i},$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{2} C_j^{n,i} = \mathcal{O}(\mu_2^{i-1}).$$

Пусть теперь (6.2)-(6.3) выполнены при $j \leq p$. Покажем для $j=p+1$. Имеем

$$\alpha_{p+1}\mu_{p+1}^{i-1} = \frac{\mu_{p+2}^{i}+\mu_{p+1}^{i}}{2i} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mu_j^{i-1} + O(\mu_1)\mu_{p+1}^{i-1} =$$

$$= \frac{\mu_{p+2}^{i}+\mu_{p+1}^{i}}{2i} - \frac{1}{2i}\sum_{j=2}^{p}(\mu_{j+1}^{i}-\mu_{j-1}^{i}) - \frac{\mu_2^{i}+\mu_1^{i}}{2i} +$$

$$+\mu_1 O(\mu_{p+1}^{i-1}) - \mu_1 \sum_{j=1}^{p} C_j^{n,i} = \frac{1}{2i}(\mu_{p+2}^{i}-\mu_p^{i}) + \mu_1 C_{p+1}^{n,i},$$

где

$$C_{p+1}^{n,i} = O(\mu_{p+1}^{i-1}) - \sum_{j=1}^{p} C_j^{n,i},$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{p+1} C_j^{n,i} = O(\mu_{p+1}^{i-1}).$$

Лемма доказана.

При помощи последней леммы в приложении I доказывается что КФ Кленшоу-Куртиса [62,65] на [0,I] удовлетворяют условию А).

Лемма I2. КФ Гаусса на [0,I] удовлетворяет условию А).

Доказательство. Из приложения 2 следует, что веса и узлы КФ Гаусса на [0,I] представимы в виде

$$\begin{cases} \alpha_j = \dfrac{\pi}{2n+1}\sin\theta_j + O\left(\dfrac{1}{n^3\sin\theta_j}\right), & j=1,2,\dots,n, \\ \mu_j = \sin^2\dfrac{\theta_j}{2}, & j=1,2,\dots,n. \end{cases} \tag{6.4}$$

Здесь $\theta_j = \arccos x_j$, где $x_j$ есть $j$-ый корень многочлена Лежандра степени $n$.

Покажем вначале справедливость условия А) при $i=1$, т.е. что

$$A_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j - \frac{\mu_{\ell+1}+\mu_\ell}{2} = O(\mu_1), \quad \ell=1,2,\dots,n. \tag{6.5}$$

Действительно, рассматривая разность $A_\ell - A_{\ell-1}$, нетрудно видеть, что

$$A_\ell - A_{\ell-1} = \alpha_\ell - \frac{\mu_{\ell+1}-\mu_{\ell-1}}{2}.$$

Принимая во внимание соотношения (6.4), получим, что

$$|A_\ell - A_{\ell-1}| = O\left(\frac{1}{n^3\sin\theta_\ell}\right)$$

и, более того, величина $|A_\ell|$ убывает при $1\leq \ell \leq n/2$ и возрастает при $n/2<\ell<n$, достигая своих максимальных значений

при крайних $\ell$ . Но

$$A_1 = \alpha_1 - \frac{\mu_2-\mu_1}{2} = O(\mu_1),\ A_{n-1} = -A_1,\ A_n = \mu_1/2,$$

откуда и следует справедливость (6.5).

Пусть $\bar{\alpha}_j = \pi(2n+1)^{-1}\sin\theta_j,\ \bar{\mu}_j = \mu_j,\ j=1,2,\dots n$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы III (приложение I), можно показать, что веса и узлы $\bar{\alpha}_j$ и $\bar{\mu}_j$ соответственно удовлетворяют равенствам (6.2)-(6.3), а следовательно, в силу леммы II и условию А). Тогда для доказательства настоящей леммы достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^{\ell} |\alpha_j - \bar{\alpha}_j|\,\mu_j^{i-1} = O(\mu_1)\mu_\ell^{i-1},\ \ell=1,2,\dots,n,\ i=1,2,\dots,s. \quad (6.6)$$

Заметим, что ввиду очевидного неравенства

$$\mu_j \leqslant \mu_\ell\ ,\ j=1,2,\dots,\ell.$$

достаточно показать справедливость (6.6) при $i=2$ , а остальные случаи легко следуют из индукции.

Итак, пусть $i=2$ . Покажем, что равенство (6.6), а следовательно и равенство А) имеют место при $1\leqslant \ell \leqslant n/2$.
Действительно:

$$\sum_{j=1}^{\ell} |\alpha_j - \bar{\alpha}_j|\,\mu_j \leqslant Cn^{-3}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{\sin^2\theta_j/2}{\sin\theta_j} \leqslant Cn^{-3}\sum_{j=1}^{\ell}\sin\theta_j \leqslant$$

$$\leqslant Cn^{-2}\sin^2\theta_\ell \leqslant Cn^{-2}\sin^2\frac{\theta_\ell}{2} = O(\mu_1)\,\mu_\ell\ .$$

Пусть теперь $n/2 < \ell \leqslant n$ . Покажем, что если условие А) выполняется при $1\leqslant \ell \leqslant n/2$ , то оно выполняется и при $n/2 < \ell \leqslant n$

Обозначим

$$B_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j\mu_j - \frac{\mu_{\ell+1}^2 + \mu_\ell^2}{4}$$

Так как А) справедливо при $1\leqslant \ell \leqslant n/2$, то $B_\ell = O(\mu_1)\mu_\ell,\ 1\leqslant\ell\leqslant n/2$.
Но

$$B_{n-\ell} = \sum_{j=1}^{n-\ell}\alpha_j\mu_j - \frac{\mu_{n-\ell+1}^2 + \mu_{n-\ell}^2}{4} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu_j - \sum_{j=n-\ell+1}^{n}\alpha_j\mu_j -$$

$$-\frac{(1-\mu_\ell)^2 + (1-\mu_{\ell+1})^2}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{\ell}\alpha_j + \sum_{j=1}^{\ell}\alpha_j\mu_j - \frac{1}{2} +$$

$$+ (\mu_{\ell+1}+\mu_\ell)/2 - (\mu_\ell^2 + \mu_{\ell+1}^2)/4 = B_\ell - A_\ell\ .$$

Отсюда с учетом (6.5) следует, что

$$B_{n-\ell} = \mathcal{O}(\mu_1)\mu_\ell + \mathcal{O}(\mu_1) = \mathcal{O}(\mu_1)\mu_{n-\ell}, \quad 1\le \ell \le n/2,$$

а $B_n = \mu_1/2 - \mu_1^2/4$.

Лемма доказана.

2. Рассмотрим теперь условие В):

$$\Delta\mu_j \le c\mu_1^{1-\varrho}\mu_j^{\varrho}, \quad j=1,2,\dots,n, \quad 0\le\varrho<1.$$

Параметр $\varrho$ характеризует степень сгущения узлов к точке $0$. Если $\varrho=0$, то случаю $\Delta\mu_j \le c\mu_1$ соответствует равномерное разбиение (например, КФ Ньютона-Котеса, в которых первый узел не совпадает с левым концом отрезка. Значение $\varrho=0.5$ соответствует КФ Гаусса на $[0,1]$. Действительно: из (6.4) следует, что

$$\Delta\mu_j \le cn^{-1}\sqrt{\mu_j(1-\mu_j)} \tag{6.7}$$

Хороший пример, характеризующий скорость сгущения узлов к левому концу отрезка $[0,1]$ дают степенные КФ: $\mu_j = (j/n)^\theta, j=1,2,\dots,n, \theta\ge 1$. Для них

$$\Delta\mu_j \le c\mu_1^{1/\theta}\mu_j^{(\theta-1)/\theta}, \quad j=1,2,\dots,n$$

т.е. $\varrho=1-1/\theta$. (Отсюда в частности видно, что $0\le\varrho<1$). С увеличением $\theta$ увеличивается и $\varrho$ и скорость сгущения узлов. Например: $\theta=1$ – равномерное разбиение, $\theta=2$ – КФ Гаусса на $[0,1]$, КФ Кленшоу-Куртиса на $[0,1]$ и т.д. (Требование целочисленности $s_1=1/(1-\varrho)$ в этом случае сводится к требованию целочисленности $\theta$, ибо $s_1=\theta$)

Обсуждение условий А), В) для произвольного конечного отрезка $[a,b]$ можно провести аналогично.

Замечание 7. Мы показали, что КФ Гаусса и Кленшоу-Куртиса удовлетворяют условиям А) и В). Тогда, беря $s=2$ и учитывая, что $\varrho=1/2$, получим оценку аппроксимации интеграла от функции из пространства $Y^{(N)}_{2,1/2,t}$, где $N=2n-1$ для формулы Гаусса и [70] $N=n$ для формулы Кленшоу-Куртиса, а именно (см. теорему 1)

$$|R_n(f)| \le \frac{c}{(N-2)^t}\int_0^1 \mu_1\mu^{t/2+1}\left|f^{(t+2)}(\mu)\right|d\mu \le$$

$$\le cn^{-q}\int_0^1 \mu^{q/2}\left|f^{(q)}(\mu)\right|d\mu,$$

где $q = \ell+2 = 2, 3, \dots, N+1$.

Отметим, что последняя оценка для КФ Гаусса была независимо от нас получена в работе [89], а для КФ Кленшоу-Куртиса, насколько нам известно, получена впервые.

3. Условие С)

$$\mu_\ell \leq \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \leq \mu_{\ell+1}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n,$$

тесно связано с условием А). Можно показать, что теорема 2 остается в силе, по крайней мере для случая $p = 2$, если условие С) заменить на условие А) при $s = 1$.

4. Прежде, чем проверять выполнение условий Д)

$$\mu_{\ell+1} \leq C\mu_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

и Е)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mu_j^{-1} - \mu_{j+1}^{-1}) < C$$

заметим, что эти условия не связаны между собой, а именно

Утверждение 1. Существуют КФ, удовлетворяющие С) и Д), но не удовлетворяющие Е).

Утверждение 2. Существуют КФ, удовлетворяющие С) и Е), но не удовлетворяющие Д).

В качестве доказательства приведем примеры таких формул КФ, узлы и веса которой есть

$$\mu_j = a^{j-1}\mu_1, \quad a \geq 3, \quad \alpha_j = a^{j-1/2}\mu_1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

удовлетворяет условиям С) и Д). Действительно

$$\mu_\ell = a^{\ell-1}\mu_1 \leq \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j = \mu_1 \frac{\sqrt{a}}{a-1}(a^\ell - 1) \leq a^\ell \mu_1 = \mu_{\ell+1}$$

и

$$\mu_{\ell+1} \leq a\mu_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, n.$$

Однако

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j \Delta\mu_j}{\mu_j \mu_{j+1}} = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\mu_j} = \sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{a}\right) n \to \infty$$

при $n \to \infty$.

С другой стороны КФ

$$\mu_1 = 1/n^2, \quad \alpha_1 = 1.5/n^2, \quad \mu_j = (j-1)/n, \quad \alpha_j = 1/n, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

не удовлетворяет условию Д), ибо $\mu_2/\mu_1 = n$. Но

$$\mu_\ell = \frac{\ell-1}{n} < \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j = \frac{1.5}{n^2} + \frac{\ell-1}{n} < \frac{\ell}{n} = \mu_{\ell+1}, \quad \ell = 2, 3, \dots, n.$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j \, \Delta\mu_j}{\mu_j \, \mu_{j+1}} = 1.5\left(1-\frac{1}{n}\right) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j\,(j-1)} < C .$$

Утверждения I и 2 доказаны.

Проверка справедливости условий Д) и Е) для основных КФ не представляет трудности. Условие Д) обсуждалось в работе [83], а выполнение Е) для КФ Гаусса и Кленшоу-Куртиса следует из результатов приложений I и 2.

Отметим, что условие Д) является следствием условия В) Действительно, нетрудно видеть, что В) равносильно требованию выполнения неравенства

$$\left(\frac{\mu_j}{\mu_1}\right)^{1-\varrho}\left(\frac{\mu_{j+1}}{\mu_j}-1\right) \leqslant C, \; j=1,2,\ldots,n, \; 0 \leqslant \varrho < 1, \tag{6.8}$$

из которого следует, что второй сомножитель в (6.8) должен быть по крайней мере ограниченным, а отсюда немедленно вытекает условие Д)

(На самом деле, ввиду того, что при любом $\varrho \in [0,1)$ первый сомножитель не ограничен при $n \to \infty$, неравенство (6.8) требует стремление к нулю второго сомножителя).

Замечание 8. Из сказанного выше следует, что оценка (5.14) остается справедливой по крайней мере при $p = 2$ для точных для постоянных КФ, удовлетворяющих условиям А) при $s = 1$, В) при $\varrho \in [0,1)$ и Е)

## §7. Составные квадратурные формулы

1. Разделим отрезок $[0,1]$ на $m+1$ отрезков точками

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m+1} = 1.$$

Применяя на каждом отрезке $[a_j, a_{j+1}]$, $j=1,2,\ldots,m$ КФ с узлами $\xi_i \in (0,1)$ и весами $\omega_i > 0$, $i=1,2,\ldots,n$, получим узлы $\mu_k$ и веса $\alpha_k$, $k=1,2,\ldots,mn$ новой КФ, а именно:

$$\begin{cases} \mu_{jn+i} = a_j + \xi_i \Delta a_j, \\ \alpha_{jn+i} = \omega_i \Delta a_j, \\ \Delta a_j = a_{j+1} - a_j, \; j=0,1,\ldots,m, \; i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{7.1}$$

Предположим, что $\xi_i, \omega_i$, $i=1,2,\ldots,n$ удовлетворяют условиям С) и Д). Покажем, что тогда и составные КФ, узлы и веса которых определены в (7.1), также удовлетворяют этим условиям.

Пусть $\ell = \ell' n + \ell''$ , где $0 < \ell'' < n$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = \sum_{j=0}^{\ell'-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{jn+i} + \sum_{i=1}^{\ell''} \alpha_{\ell' n+i} = \sum_{j=0}^{\ell'-1} \Delta a_j \sum_{i=1}^{n} \omega_i +$$

$$+ \Delta a_{\ell'} \sum_{i=1}^{\ell''} \omega_i = a_{\ell'} + \Delta a_{\ell'} \sum_{i=1}^{\ell''} \omega_i .$$

(Мы предположили, что КФ на каждом отрезке точна для постоянной).

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \le a'_\ell + \Delta a_{\ell'} \xi_{\ell''+1} = \mu_{\ell' n+\ell''+1} = \mu_{\ell+1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \ge a'_\ell + \Delta a_{\ell'} \xi_{\ell''} = \mu_{\ell' n+\ell''} = \mu_\ell .$$

Случай $\ell'' = n$ проверяется без труда. Условие С) проверено.

Справедливость Д) при $0 < \ell'' < n$ следует из следующей цепочки

$$\mu_{\ell+1} = \mu_{\ell' n+\ell''+1} = a_{\ell'} + \xi_{\ell''+1} \Delta a_{\ell'} \le a_{\ell'} + c\, \xi_{\ell''} \Delta a_{\ell'} =$$

$$= c \mu_{\ell' n+\ell''} + a_{\ell'} (1-c) < c \mu_\ell .$$

В случае $\ell'' = n$ для проверки Д) достаточно предположить, что

$$a_{\ell+1} \le c\, a_\ell \qquad (7.2)$$

Теперь рассмотрим условие Е). Заметим, что

$$\begin{cases} \Delta \xi_i \Delta a_j & i \ne n, \\ \Delta a_j (1-\xi_n) + \Delta a_{j+1} \xi_1 , & i = n, \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{mn} \frac{\alpha_k \Delta \mu_k}{\mu_{k+1} \mu_k} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{jn+i} \Delta \mu_{jn+i}}{\mu_{jn+i+1} \mu_{jn+i}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{jn+n} \Delta \mu_{jn+n}}{\mu_{(j+1)n+1} \mu_{jn+n}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_i \Delta \xi_i}{\left(\frac{a_j}{\Delta a_j} + \xi_{i+1}\right)\left(\frac{a_j}{\Delta a_j} + \xi_i\right)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\omega_n (1-\xi_n)}{\left(\frac{a_{j+1}}{\Delta a_j} + \xi_n\right)\left(\frac{a_j}{\Delta a_j} + \xi_n\right)} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \frac{\omega_n \xi_1}{\left(\frac{a_{j+1}}{\Delta a_{j+1}} + \xi_n\right)\left(\frac{a_j}{\Delta a_j} + \xi_n\right)} . \qquad (7.3)$$

Конкретизируем теперь выбор узлов и весов (7.I). Пусть отрезки $a_k$ строятся согласно рекурентным соотношениям

$$a_{k+1} = 2a_k = 2^k a_1,\ a_{m+1} = 2^m a_1 = 1,\ a_1 = 2^{-m}, \tag{7.4}$$

а на каждом отрезке $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 1,2,\dots,m+1$ применяется КФ Гаусса с весами $\omega_i > 0$ и узлами $\xi_i \in (0,1)$, $i = 1,2,\dots,n$. (Очевидно, что условие (7.2) в этом случае выполнено).

Пусть $m = 4n$ т.е. $a_1 = 2^{-4n}$. (Причины такого выбора мы объясним ниже). Легко видеть, что в этом случае первое слагаемое в правой части (7.3) ограничено постоянной, а два других слагаемых имеют порядок $\mathcal{O}(n^{-2})$. Условие E) проверенно.

Таким образом КФ, узлы и веса которой определены в $\{(7.1),(7.4)\}$, где $m = 4n$ удовлетворяет условиям C)-E).

Заметим, что

$$\mu_1 = a_1 + \xi_1 \Delta a_2 = a_1(1 + 2\xi_1) = a_1(1 + \mathcal{O}(n^{-2})),$$

откуда $a_1 = \mathcal{O}(\mu_1)$. Далее, пусть $N = mn$, тогда

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{jn+i} = \sum_{j=1}^{m} (a_{j+1} - a_j) = a_{m+1} - a_1 = 1 - a_1 = 1 - \mathcal{O}(\mu_1)$$

и согласно теореме 2 при $p = 2$ и замечанию 6 §5 справедлива оценка

$$\max_{\tau \geq 0} \left| E_2(\tau) - E_2^N(\tau) \right| \geq c\, 2^{-2\sqrt{N}}. \tag{7.5}$$

2. Покажем, что имеет место и обратное неравенство.

Теорема 3. Пусть аппроксимирующая интегральную экспоненту $E_2$ функция $E_2^N$ есть составная КФ, узлы и веса которой определены в (7.I), (7.4), где $m = 4n$, а $N = mn$. Тогда имеет место двухсторонняя оценка

$$c\, 2^{-2\sqrt{N}} \leq \max_{\tau \geq 0} \left| E_2(\tau) - E_2^N(\tau) \right| \leq C_1 2^{-2\sqrt{N}} \tag{7.6}$$

Доказательство. Нам достаточно показать лишь оценку справа. Известно [29, с. 107], что для КФ Гаусса справедлива оценка остаточного члена

$$I_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\mu)\,d\mu - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{kn+i} f(\mu_{kn+i}) = \frac{(\Delta a_k)^{2n+1}}{2n+1} \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\tilde{\mu}),$$

где $\tilde{\mu}_k \in [a_k, a_{k+1}]$, $k = 1,\dots,n$. Положим в последнем равенстве $f = \varphi_{\tau,2}$ (см. (2.6)). Тогда с учетом оценки (2.12) и формулы Стирлинга, получаем

$$I_k \leqslant c\,\frac{(\Delta\alpha_k)^{2n+1}}{\alpha_k^{2n}}\,2^{-4n}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{m}|I_k| \leqslant c\,2^{-4n}\sum_{k=1}^{m}\frac{(\Delta\alpha_k)^{2n+1}}{\alpha_k^{2n}} = c\,2^{-4n}\sum_{k=1}^{m}\Delta\alpha_k \leqslant c\,2^{-4n}.$$

Ввиду того, что $N=4mn=4n^2$, имеем

$$|E_2(\tau)-E_2^N(\tau)| \leqslant \int_0^{a_1}|\psi_{\tau,2}(\mu)|\,d\mu + \sum_{k=1}^{m}\Big|\int_{a_k}^{a_{k+1}}\psi_{\tau,2}(\mu)\,d\mu -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}d_{kn+i}\,\psi_{\tau,2}(\mu_{kn+i}) \leqslant c\,a_1 + \sum_{k=1}^{m}|I_k| \leqslant c\,2^{-2\sqrt{N}}, \qquad (7.7)$$

что и требовалось доказать.

В заключении этого параграфа мы покажем, что если на каждом частичном отрезке $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $k=1,2,\dots,m$ применяется $n$ -точечная КФ Гаусса, то для аппроксимации $E_2$ при помощи $E_2^N$, где $N=mn$, предложенный выше способ разбиения отрезка $[0,1]$ на частичные отрезки является оптимальным.

Пусть $A=1+2^{-\beta}$ и $\alpha_{k+1}=A\alpha_k=\dots=A^k\alpha_1$. Тогда $\Delta\alpha_k=\alpha_k(A-1)$ и

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta\alpha_k^{2n+1}}{\alpha_k^{n}} = (A-1)^{2n+1}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k = (A-1)^{2n+1}\alpha_1\sum_{k=1}^{m}A^{k-1} = a_1(A-1)^{2n}(A^m-1).$$

Аналогично (7.7) имеем

$$\|E_2-E_2^N\| \leqslant c\alpha_1\Big(1+2^{-4n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta\alpha_k^{2n+1}}{\alpha_k^{2n}}\Big) = c\alpha_1\Big(1+\frac{(A-1)^{2n}(A^m-1)}{2^{4n}}\Big). \qquad (7.8)$$

Число $m$ естественно выбирать из условия

$$2^{-4n}(A-1)^{2n}(A^m-1)=const,$$

что равносильно тому, что

$$m = n\,\frac{2(\beta+2)\ln 2}{\ln A} + const.$$

Возьмем в последнем равенстве для определенности $const=0$, тогда

$$N=mn=n^2\,\frac{2(\beta+2)\ln 2}{\ln A},$$

откуда

$$m=\sqrt{N}\sqrt{\frac{2(\beta+2)\ln 2}{\ln A}}$$

Из (7.8) следует, что

$$\inf_{\beta} \| E_2 - E_2^N \|_C = \inf_{\beta} \alpha_1(\beta) = \sup_{\beta} | \ln \alpha_1(\beta) |,$$

где $\alpha_1(\beta) = A^{-m} = (1+2^{-\beta})^{-m}$ . Отсюда

$$\sup_{\beta} | \ln a_1(\beta) | = \sqrt{N} \sqrt{2 \ln 2} \sup_{\beta} \sqrt{(\beta+2) \ln (1+2^{-\beta})} ,$$

и нетрудно видеть, что супремум последней функции достигается при $\beta = 0$ , т.е. $A=2$, и разбиение (7.4) является оптимальным.

## §8. Скорость сходимости линейно-алгебраической модели

В этом параграфе мы сформулируем и докажем основные результаты главы.

I. Теорема 4. Пусть точная для многочленов степени $N$ КФ удовлетворяет условиям A) и B). Тогда, если $f \in C^1[0,H]$ ,то справедливы оценки

$$\| y_n - y \|_{L^q[0,H]} \leq c \mu_1^{1+1/q} \left[ 1 + \varkappa_N(s,t) \right] \tag{8.1}$$

и

$$\max_{1 \leq \mu \leq 1} \| \mathcal{J}_n - \mathcal{J} \|_{L^q[0,H]} \leq c \mu_1 \left[ 1 + \varkappa_N(s,t) \right] . \tag{8.2}$$

при всех $1 \leq q \leq \infty$ . Здесь целые параметры $t$ и $s$ принадлежат множеству $L_1 \cup L_2$ , определенному в (4.13), функция $\varkappa_N$ определена в (4.7), а $\mu_1$ - первый узел КФ.

Доказательство. Оценка (8.1) при $q=1$ следует из (1.11), (1.13), (1.14), (4.14),(1.20) и (1.21). Случай $q=\infty$ следует из (1.11), (1.12), (1.14), (4.8), (1.18) и (1.19). Для остальных $1<q<\infty$ оценка (8.1) вытекает из интерполяционной теоремы [6, с. 10].

Оценка (8.2) при $q=\infty$ следует из (8.1) и очевидного равенства

$$| \mathcal{J}_n(\tau,\mu) - \mathcal{J}(\tau,\mu) | \leq \| y_n - y \|_C \tag{8.3}$$

Поменяв в (1.5) и (1.10) порядок интегрирования и пользуясь оценкой (8.1), придем к (8.2) при $q=1$ .Общий случай вытекает из интерполяции.

Теорема доказана.

В дополнении к полученным оценкам (8.1)-(8.2) можно вывести поточечные оценки. Для этого заметим, что

$$y_n - y = (T_n - T)y + (I - T_n)^{-1} T_n (T_n y - Ty),$$

откуда

$$|y_n(\tau) - y(\tau)| \leqslant |(T_n y - Ty)(\tau)| + \|(I - T_n)^{-1}\|_{C\to C} \|T_n\|_{L\to C} \|T_n y - Ty\|, \tau\in[0,H]$$

Разность $(T_n y - Ty)(\tau)$ оценивается при помощи (4.8), (4.9) и (I.I4)-(I.2I), а из (4.I4) и (I.20)-(I.2I) следует, что

$$\|T_n - T\| \leqslant c\mu_1^2 \left[ 1 + \varkappa_N(s,t) \right].$$

Далее с учетом (5.I0) получим

$$\|T_n\|_{L\to C} = \frac{\lambda}{2} \max_{0\leqslant\tau,\tau'\leqslant H} \left| E_1^n(|\tau-\tau'|)\right| = \frac{\lambda}{2} E_1^n(0) = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\mu_j} \leqslant c|\ln\mu_1|.$$

Объединяя полученные неравенства, приходим к поточечной оценке. Из этой оценки нетрудно получить поточечную оценку для разности $J_n - J$. Для этого достаточно использовать неравенство (8.3), и

$$\left| J_n(\tau,\mu) - J(\tau,\mu) \right| \leqslant \frac{1}{|\mu|} \|y_n - y\|_L$$

которое вытекает из (I.5) и (I.I0).

Замечание 9. В случае КФ средних прямоугольников поточечная оценка имеет вид [I0]:

$$|y_n(\tau) - y(\tau)| \leqslant c_1 \min\left\{\mu_1, \frac{\mu_1^3}{\tau^2} + \mu_1^2|\ln\mu_1|, \frac{\mu_1^3}{(H-\tau)^2} + \mu_1^2|\ln\mu_1|\right\},$$

$$|J_n(\tau,\mu) - J(\tau,\mu)| \leqslant c_1 \min\left\{\mu_1, \mu_1^2/|\mu|\right\},$$

где $0\leqslant\tau\leqslant H,\ -1\leqslant\mu\leqslant 1,\ \mu_1 = n^{-1}$.

Наконец докажем равномерную оценку.

Теорема 5. Пусть точная для многочленов степени $N$ КФ удовлетворяет условиям А), В) и Е) и пусть выполняется хотя бы одно из неравенств

$$y(0)\neq 0,\ y(H)\neq 0 \tag{8.4}$$

Тогда, если $s = 1/(1-g)$ и имеет место сходимость (4.I0), то справедливы оценки

$$c_0\mu_1 \leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant H} |y_n(\tau) - y(\tau)| \leqslant c\mu_1 \min\left\{|\ln\mu_1|, 1+\varkappa_N(s,t)\right\}, \tag{8.5}$$

$$c_0\mu_1 \leqslant \max_{\substack{0\leqslant\tau\leqslant H\\ -1\leqslant\mu\leqslant 1}} |J_N(\tau,\mu) - J(\tau,\mu)| \leqslant c\mu_1 \min\left\{|\ln\mu_1|, 1+\varkappa_N(s,t)\right\}, \tag{8.6}$$

где $0 \leqslant l \leqslant N-s+1$ , а параметр $\rho$ определен в условии В).

Доказательство. Из (I.I5), (5.I4) при и замечания 8 имеем

$$|\vartheta_n(\tau)| \geqslant c\mu_1, \quad n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant H,$$

а из (4.9) следует, что при малых $\tau$ функция $|\vartheta_n(H-\tau)| = \Theta(\mu_1)$, с учетом (4.I0) из (I.I8), (I.I9) и (4.8), (4.II) следует, что

$$|\omega_n(\tau)| = O(\mu_1), \quad |\omega_n^0(\tau)| = O(\mu_1).$$

Отсюда и из (I.I4) в случае $y(0) \neq 0$ получаем

$$|(T_n y - Ty)(\tau)| \geqslant C_0\mu_1, \quad n \geqslant n_0,$$

а из (I.II) имеем

$$\|y_n - y\|_C \geqslant (1 + \|T_n\|_{C\to C})^{-1} \|T_n y - Ty\|_C \geqslant C_0\mu_1, \quad n \geqslant n_0.$$

Мы доказали нижнюю оценку (8.5) при условии $y(0) \neq 0$ , случай $y(H) \neq 0$ аналогичен. Верхняя оценка (8.5) немедленно следует из (4.8), (I.II), (I.I2) и (I.I4)-(I.I9).

Поскольку из (I.5) и (I.I0) следует, что

$$J_n(\tau,0) - J(\tau,0) = y_n(\tau) - y(\tau),$$

то тем самым установлена и нижняя оценка (8.6). Верхняя оценка (8.6) вытекает из (8.5) и (8.3).

Теорема доказана.

Замечание I0. Верхние оценки (8.5) и (8.6) верны и без предположений о справедливости хотя бы одного из неравенств (8.4) и сходимости (4.I0).

Из результатов теоремы 3 следует оценка скорости сходимости МДО при использовании составных КФ, а именно:

Теорема 6. Пусть в МДО применяется составная КФ, в которой отрезки $a_j, j=1,\dots,m$ выбираются согласно (7.4), а узлы и веса согласно (7.I). Тогда справедливы оценки

$$\|y_N - y\|_{C[0,H]} \leqslant c\mu_1 \max_{1\leqslant\mu\leqslant 1} \|J_N - J\|_{C[0,H]} \leqslant c\mu_1,$$

где $\mu_1 = 2^{-2\sqrt{N}}$.

2. Посмотрим как реализуются результаты последних теорем для КФ Гаусса и Кленшоу-Куртиса.

Из результатов §6 следует, что для этих КФ условия А)-Е) выполнены, причем условие В) справедливо при $\rho = 1/2$ .Эти КФ точны для $N = 2n-1$ (КФ Гаусса) и [70] $N = n$ (КФ Кленшоу-Куртиса), а первый узел $\mu_1 = \mathcal{O}(1/n^2)$. Отсюда следует, что величина $\varkappa_N(s,t)$ ограничена при всех целых неотрицательных $t$ и целых $s$ таких, что $0<s<cN$, где $c<1$.

Согласно (4.6) и (5.14) для этих КФ справедлива равномерная двусторонняя оценка

$$c_1 \mu_1^{p-1} \leqslant \max_{\tau \geqslant 0} \left| E_p(\tau) - E_p^n(\tau) \right| \leqslant c_0 \mu_1^{p-1}, \quad p = 2,3,\ldots$$

Теперь в первой из оценок (4.9) выберем $\sigma \in [3/4, 1)$. Тогда при всех $s = t \geqslant 1/(1-\sigma)$ имеет место поточечная оценка

$$|v_n(\tau)| \leqslant c\mu_1 (\mu_1/\tau)^{\gamma} (1+\mu_1/\tau), \quad \gamma = s(1-\sigma), \quad 4 \leqslant s < N, \quad \tau > 0.$$

Неравенство (4.17) дает нам интегральную оценку

$$\| v_n \|_L \leqslant c\mu_1^2,$$

а из оценок (1.18)-(1.21) следует, что

$$\|\omega_n\|_C \leqslant c\mu_1 |\ln\mu_1|, \quad \|\omega_n^0\|_C \leqslant c\mu_1 |\ln\mu_1|, \quad \|\omega_n\|_L \leqslant c\mu_1^2, \quad \|\omega_n^0\|_L \leqslant c\mu_1^2.$$

Теперь сформулируем основные теоремы для КФ Гаусса и Кленшоу-Куртиса.

Теорема 4$'$. Пусть $f \in C^1[0,H]$. Тогда для решений уравнений (1.4) и (1.9) справедливы оценки

$$\|y_n - y\|_{L^q[0,H]} \leqslant c\mu_1^{1+1/q}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{8.7}$$

$$|y_n(\tau) - y(\tau)| \leqslant c \min\left\{ \mu_1, \frac{\mu_1^2}{\tau} + \frac{\mu_1^3}{\tau^2} + \mu_1^2 |\ln\mu_1|, \right.$$
$$\left. \frac{\mu_1^2}{(H-\tau)} + \frac{\mu_1^3}{(H-\tau)^2} + \mu_1^2 |\ln\mu_1| \right\}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant H,$$

а для решений краевых задач (1.1), (1.2) и (1.7),(1.8) оценки

$$\max_{-1 \leqslant \mu \leqslant 1} \| J_n - J \|_{L^q[0,H]} \leqslant c\mu_1^{1+1/q}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

и

$$|J_n(\tau,\mu) - J(\tau,\mu)| \leqslant c \min\{\mu_1, \mu_1^2/|\mu|\}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant H, \ -1 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Теорема 5$'$. Пусть выполнены условия теоремы 4$'$ и пусть выполняется хотя бы одно из неравенств

$$y(0) \neq 0, \quad y(H) \neq 0.$$

Тогда справедливы оценки

$$c_0\mu_1 \leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant H} |y_n(\tau)-y(\tau)| \leqslant c\mu_1,$$

$$c_0\mu_1 \leqslant \max_{\substack{0\leqslant\tau\leqslant H\\ -1\leqslant\mu\leqslant 1}} |J_n(\tau,\mu)-J(\tau,\mu)| \leqslant c\mu_1 .$$

Доказательство этих теорем немедленно следует из приведенных выше оценок. Отметим, что частично результаты теорем 4 и 5 были доказаны в работах [36, 57, 63, 83].

Замечание II. Пусть $\lambda_0^{-1}$ есть наибольшее собственное значение оператора $T$, а $\lambda_n^{-1}$ – наибольшее собственное значение оператора $T_n$, а $\varphi$ и $\varphi_n$ – соответствующие им нормированные ($\|\varphi\|_{L^q} = \|\varphi_n\|_{L^q} = 1$) собственные функции операторов $T$ и $T_n$. Тогда $\lambda_0^{-1}$ и $\lambda_n^{-1}$ простые собственные значения, причем последнее, по крайней мере, при достаточно больших $n$. Нетрудно видеть, что справедлива оценка

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{L^q} \leqslant |\lambda_0-\lambda_n| + \|\varphi-\varphi_n\|_{L^q} \leqslant c\,\|y-y_n\|_{L^q},$$

откуда

$$|\lambda_0-\lambda_n| \leqslant c\,\|y-y_n\|_{L^1}$$

и

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{L^q} \leqslant c\,\|y-y_n\|_{L^q}, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty .$$

Учитывая оценки (8.I) и (8.7), получим соответствующие аппроксимации собственных значений и собственных функций оператора $T$.

Отметим, что последние оценки для КФ Гаусса на [-I, I] и на [0, I] получены в работах [63], [82] и [83].

## §9. Сходимость и скорость сходимости линейно-алгебраической модели к решению уравнения переноса

В этом параграфе мы предположим, что индикатриса рассеяния $g(\gamma)$ представима в виде конечной суммы (4.3.I) и рассмотрим ЛАМ, приведенную в §2.2.I. При достаточно большом $p$ ($p \geqslant 2N$) решение ЛАМ, согласно теореме 4.4 представимо в виде

$$J_{ik}(\tau) = \sum_{m=0}^{N-1} J_i^m(\tau)\cos\frac{2\pi k m}{p} ,$$

причем функции $J_i^m(\tau)$ удовлетворяют системе

$$\mu_i \frac{dJ_i^m(\tau)}{d\tau} + J_i^m(\tau) = \frac{\lambda}{2} \sum_{|j|=1}^{n} g_m(\mu_i,\mu_j)\alpha_{|j|} p_{|j|} J_j^m(\tau) + (2-\delta_{0m}) p_0(\tau) f_m$$

Здесь

$$p_i = \frac{2}{\sum_{|j|=1}^{n} g_0(\mu_i,\mu_j)\alpha_{|j|}}, \; i=1,2,\ldots,n, \; p_0(\tau) = \frac{\int_{-1}^{1} f(\tau,\mu)\, d\mu}{\sum_{|j|=1}^{n} f_0(\tau,\mu_j)\alpha_{|j|}}$$

Последнюю систему можно рассматривать как результат дискретизации интегро-дифференциального уравнения

$$\mu \frac{\partial J(\tau,\mu)}{\partial \tau} + J(\tau,\mu) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} g(\mu,\mu') J(\tau,\mu')\, d\mu' + f(\tau,\mu), \tag{9.I}$$

$$J(0,\mu) = 0, \; \mu>0, \; J(H,\mu) = 0, \; \mu<0.$$

(Здесь опущены индексы $m$ при $J^m(\tau,\mu)$ и $g_m(\mu,\mu')$. При изложении материала этого параграфа этот индекс мы будем опускать).

Отсюда, вопрос о сходимости и скорости сходимости ЛАМ к точному решению уравнения переноса в однородной анизотропно рассеивающей среде сводится к изучению сходимости и скорости сходимости МДО применительно к задаче (9.I).

Приведем (9.I) к интегральному уравнению. Пусть операторы $S$ и $Q$ определяются как

$$(Su)(\tau,\mu) = \int_{\hat{a}(\mu)}^{\tau} \mu^{-1} u(\tau,\mu') \exp[(\tau'-\tau)/\mu]\, d\tau', \tag{9.2}$$

$$(Qu)(\tau,\mu) = \int_{-1}^{1} g(\mu,\mu') u(\tau,\mu')\, d\mu', \tag{9.3}$$

где $\hat{a}(\mu)$ определена формулой (I.2.3)

Делая замену

$$y = \frac{\lambda}{2} QJ + f, \tag{9.4}$$

придем к интегральному уравнению

$$y = \frac{\lambda}{2}(QS)y + f. \tag{9.5}$$

Решив уравнение (9.5), решение краевой задачи (9.I) можно восстановить по формуле

$$J = Sy \tag{9.6}$$

Если $f$ непрерывно дифференцируема по $\tau\in[0,H]$ и непрерывна по $\mu\in[-1,1]$, а $g\in C_{[-1,1]\times[-1,1]}$, то решение уравнения (9.5) непрерывно дифференцируемо по $\tau\in(0,H)$, причем (ср. с (I.6))

$$\max_{-1\le\mu\le1}\left|\frac{\partial y(\tau,\mu)}{\partial\tau}\right|\le c\left(|\ln\tau|+|\ln(H-\tau)|\right),\ 0<\tau<H.$$

Теперь рассмотрим МДО решения уравнения (9.5). Пусть

$$y_n=\frac{\lambda}{2}P_n(Q_nS)y_n+P_nf, \tag{9.7}$$

где

$$(Q_nu)(\tau,\mu)=\sum_{|j|=1}^{n}d_j\,g(\mu,\mu_j)\,u(\tau,\mu_j),$$

а проектор $P_n:\Omega^q\longrightarrow C^{q,n}$, $(P_nf)_i(\tau)=f(\tau,\mu_i)$, $|i|=1,2,\dots,n$. Здесь $\Omega^q$ есть пространство функций $f(\tau,\mu)$ таких, что $f\in L^q_{[0,H]}$ при фиксированном $\mu\in[-1,1]$, и $f\in C_{[-1,1]}$ при фиксированном $\tau\in[0,H]$, причем $\|f\|_q=\max\limits_{-1\le\mu\le1}\|f\|_{L^q_{[0,H]}}$, $1\le q\le\infty$, а $C^{q,n}=\{f:f=(f_1,f_2,\dots,f_n,f_{-1},\dots,f_{-n}),\ f_i\in L^q_{[0,H]},$

$1\le q\le\infty$; $\|f\|_{q,n}=\max\limits_{1\le|i|\le n}\|f\|_{L^q_{[0,H]}}\}$

Легко видеть, что

$$(P_ny-y_n)=\frac{\lambda}{2}\left(I-\frac{\lambda}{2}P_nQ_nS\right)^{-1}\left(P_nQSy-P_nQ_nSP_ny\right). \tag{9.8}$$

Известно [78, 79, 80], что

$$\|P_nQS-P_nQ_nSP_n\|_{\Omega^q\to C^{q,n}}\to0,\ n\to\infty, \tag{9.9}$$

откуда следует равномерная сходимость $y_n\to y$ для всех тех $\lambda$, при которых оператор $(I-\frac{\lambda}{2}P_nQ_nS)^{-1}$ существует и ограничен.

Рассмотрим теперь функцию $(P_nQSy-P_nQ_nSy)_k(\tau)$. Проинтегрируем ее по частям. После несложных преобразований получим равенство

$$(P_nQSy-P_nQ_nSy)_k(\tau)=(Q-Q_n)y(\tau,\mu_k)+$$

$$+(Q-Q_n)\left[\exp\left(\frac{\hat a-\tau}{\mu}\right)y(\hat a,\mu_k)\right]+(Q-Q_n)S\mu_k\frac{\partial y}{\partial\tau}(\tau,\mu_k). \tag{9.10}$$

Предположим, что у индикатрисы $g$ существует достаточное число ограниченных производных по $\mu$ (соответственно по $\mu'$). Тогда, если функция $f$ также имеет достаточное число ограниченных производных по $\mu$, то решение $y(\tau,\mu)$ интегрального уравнения (9.5) таково, что

$$\left|\frac{\partial^m y(\tau,\mu,\varphi)}{\partial\mu^m}\right| \leqslant c_m , \tag{9.11}$$

где $c_m$ не зависит от $\tau$ и $\mu$. Отсюда, а также из (9.8) - (9.11) видно, что скорость сходимости $y_n$ к $P_n y$ зависит от того, насколько хорошо КФ (3.1) аппроксимирует интегралы от функции $\theta(\mu)\exp(-\tau/\mu), \mu\in[0,1]$, где $\theta(\mu)$ - достаточно гладкая функция, и справедлива оценка

$$\| P_n y - y_n \|_{q,n} \leqslant c \| E_2 - E^n \|_{L_q} , \quad 1\leqslant q\leqslant\infty . \tag{9.12}$$

Таким образом, результаты, полученные в предыдущих параграфах данной главы, могут быть обобщены на анизотропные среды и анизотропные источники.

Отметим, [78], что если вместо краевых условий (1.2) рассматривать периодические краевые условия [35, с.82], то также имеет место неравенство (9.12) и следовательно оценки §8 остаются справедливыми.

Замечание 12. В случае реальных индикатрис рассеивания предположение об ограниченности производных по $\mu$ от $g$ не выполняется, т.к. $g$ представима в виде

$$g(\mu,\mu') = \varkappa(\mu,\mu')\left(1+\sqrt{(1-\mu'^2)(1-\mu^2)}\right), \ \mu,\mu'\in[-1,1],$$

где $\varkappa$ - достаточно гладкая функция по обеим переменным. Тогда (ср. с (9.11)) производные по $\mu$ от функции $g$ имеют в точке $\mu=1$ особенности сходные по структуре с особенностями производных от функции $(1-\mu^2)^{1/2}$. Следовательно в этом случае скорость сходимости $y_n \to P_n y$ зависит от степени аппроксимации интеграла от функции $\theta(\mu)\exp(-\tau/\mu)$, где $\theta(\mu)=(1-\mu)^{1/2}, \mu\in[0,1]$. При построении КФ функцию $\theta(\mu)$ разумно принять за весовую функцию.

Замечание 13. К оценке (9.12) можно прийти и из следующих рассуждений.

В [15, с. 239-240] доказано, что скорость сходимости $\mathcal{Y}_n\to\mathcal{Y}$ при $n\to\infty$ зависит от того насколько хорошо оператор $Q_n$ аппроксимирует интеграл столкновений $Q$ на точном решении $\mathcal{Y}$ краевой задачи (9.1). Однако [15, с. 159], у границ раздела сред справедливо представление

$$J(\tau,\mu) = y(\tau,\mu) \pm \delta_\tau y(\hat{a}(\mu),0) \exp[(\hat{a}(\mu)-\tau)/\mu] + \psi(\tau,\mu), \quad (9.13)$$

где $\delta_\tau y(\hat{a}(\mu),0)$ - скачок функции $y$ на границе среды, а $\psi$ - достаточно гладкая функция. Далее, ввиду сглаживающих свойств оператора $QS$ [15, с. 161] функция $y$ на границе области является более гладкой, чем $J$. Отсюда, из (9.13) следует, что при условии представимости индикатрисы в виде конечной суммы многочленов Лежандра, точность аппроксимации $J$ при помощи $J_n$ определяется тем, насколько хорошо КФ приближают интеграл от функций $\exp(-\tau/\mu)$ и $\exp(-(H-\tau)/\mu)$, т.е. от малости функции $\vartheta_n(\tau)$, $\tau \in [0,H]$.

Так как представление (9.13) имеет место и для кусочно однородной среды, то полученные выше оценки переносятся и на этот случай.

## Заключение

Для построения приближенных методов решения уравнения переноса надо учитывать особенности и локальные свойства решений этих уравнений. В работе [34] авторы строят базисные функции, которые имеют характерные для решений особенности. Мы предложили учитывать эти особенности в построении КФ, аппроксимирующих интеграл столкновений в МДО. В виду того, что при $|\mu| \to 0$ решения уравнения переноса имеют особенности на границе раздела сред, то степень аппроксимации сильно зависит от выбора первого узла $\mu_1$ в КФ на отрезке [0,1]. Приведенные выше оценки и показывают эту зависимость, а построенные в §7 составные КФ учитывают особенности функции $\exp(-\tau/\mu), \tau \geq 0, \mu \in [0,1]$ для разбиения отрезка [0,1] на подотрезки, на которых применяется КФ Гаусса. При этом $\mu_1 = O(2^{-2\sqrt{N}})$ [39].

Отметим, что выбор первого узла КФ $\mu_1$ и знание зависимости быстроты сходимости метода от $\mu_1$ важно для построения конечно-разностных и проекционных схем решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений {(1.7)-(1.8)}, ибо выбор шага дискретизации по пространственной переменной должен быть увязан со значением $\mu_1$ (подробнее о связи между дискретизациями по угловой и пространственной переменным см. [82-83]).

Приложение I.

## Квадратурные формулы Кленшоу-Куртиса

Рассмотрим КФ Кленшоу-Куртиса [62, 65]

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{s=1}^{n} b_s f(x_s), \ n\text{-четное}, \qquad (\text{П}1.1)$$

где

$$\begin{cases} x_s = -\cos(\pi s/n), & s=1,2,\dots,n, \\ b_s = 4n^{-1} \sum\limits_{j=0}^{n/2}{}'' (1-4j^2)^{-1} \cos \frac{2\pi j s}{n}, & s=1,2,\dots,n-1, \\ b_n = 1/(n^2-1). \end{cases} \qquad (\text{П}1.2)$$

Здесь знак $\sum''$ означает, что первый и последний член взяты с коэффициентам 0.5.

Известно [70], что $b_s > 0$. Если добавить $x_0 = -1$, $b_0 = 1/(n^2-1)$ и суммирование в (П1.1) начинать с нуля, то полученная КФ будет точна для многочленов степени, не превосходящей $n$. (Отметим, что при $n = 2$ эти КФ совпадают с классической КФ трапеции).

В этом приложении мы покажем, что КФ Кленшоу-Куртиса, отображенные на отрезок [0,1] удовлетворяет условию А).

1. Параллельно с КФ (П1.1)-(П1.2) мы рассмотрим ее предельный случай

$$\begin{cases} \bar{x}_s = x_s, & s=1,2,\dots,n, \\ \bar{b}_s = \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi s}{n}, & s=1,2,\dots,n-1, \\ \bar{b}_n = b_n. \end{cases} \qquad (\text{П}1.3)$$

Посмотрим насколько КФ (П1.1)-(П1.3) отличается от КФ {(П1.1)-(П1.2)} т.е. оценим разность $\bar{b}_s - b_s$, $s=1,2,\dots,n-1$. Для этого оценим остаток ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = \frac{\pi}{4}, \quad t \in (0,\pi). \qquad (\text{П}1.4)$$

Лемма П1. Для любого $t \in [0,\pi]$ и $M$ = 1,2,... имеет место асимптотическое равенство

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = \frac{1}{\sin t}\Big\{-\frac{\sin^2 Mt}{2M+1} - \frac{1}{2(2M+1)} +$$

$$+ \frac{\sin(2M+1)t}{2\sin t\,(2M+1)(2M+3)} - \frac{1}{\sin^2 t}\,\frac{\cos(2M+2)t}{(2M+1)(2M+3)(2M+5)}\Big\} + O\Big(\frac{1}{M^4 \sin^3 t}\Big). \quad \text{(П1.5)}$$

Доказательство. Применим технику, предложенную в [51, с.535]. Имеем

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)}{2k-1} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sum_{j=1}^{k} \sin(2j-1)t -$$

$$- \sum_{k=M}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)-1} \sum_{j=1}^{k} \sin(2j-1)t =$$

$$= \frac{1}{2(M+1)-1} \sum_{j=1}^{M} \sin(2j-1)t + \sum_{k=M+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) \sum_{j=1}^{k} \sin(2j-t).$$

Учитывая, что [16, с. 44]

$$\sum_{j=1}^{M} \sin(2j-1)t = \frac{\sin^2 Mt}{\sin t}, \quad t \in (0,\pi),$$

получим

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = -\frac{1}{2M+1}\,\frac{\sin^2 Mt}{\sin t} + \frac{2}{\sin t} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\sin^2 kt}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Остаток последнего ряда преобразуем аналогично, с учетом того, что [16, с. 27, 22, 44]

$$\sum_{k=1}^{M} \sin^2 kt = \frac{2M+1}{4} - \frac{\sin(2M+1)t}{4\sin t}$$

и

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+3)} = \frac{M+1}{(2M+1)(2M+3)}$$

Имеем

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = \frac{1}{\sin t}\Big\{-\frac{\sin^2 Mt}{2M+1} + \frac{1}{2(2M+1)} +$$

$$+\frac{1}{\sin t}\Big[\frac{\sin(2M+1)t}{2(2M+1)(2M+3)} - 2\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)t}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}\Big]\Big\} \quad \text{(П1.6)}$$

Но

$$\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)t}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2\sin t}\,\frac{\cos(2M+2)t}{(2M+1)(2M+3)(2M+5)} -$$

$$-\frac{3}{\sin t}\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\cos(2k+2)t}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)}. \quad \text{(П1.7)}$$

Здесь мы использовали полученные из [16, с. 17,23,44] равенства

$$\sum_{k=1}^{M}\sin(2k+1)t = -\frac{1}{2\sin t}\Big[\cos(2M+2)t + \cos 2t\Big],$$

$$\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(2M+1)(2M+3)(2M+5)}$$

Наконец, аналогичным образом оценивается последний ряд в (П1.7)

$$\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\cos(2k+2)t}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = O\Big(\frac{1}{\sin t\, M^4}\Big). \quad \text{(П1.8)}$$

Подставляя (П1.8) и (П1.7) в (П1.6), приходим к (П1.5).

Лемма доказана.

Лемма П2. При всех $s = 1,2,\dots,n-1$ для определенных в (П1.2) и (П1.3) весов КФ справедливо равенство

$$\bar{b}_s - b_s = \frac{(-1)^s}{\sin^2\frac{\pi s}{n}}\cdot\frac{2}{(n-1)(n+1)(n+3)n} + O\Big(\frac{1}{n^5\sin^3\frac{\pi s}{n}}\Big). \quad \text{(П1.9)}$$

Доказательство. Пусть $t = \pi s/n$. Тогда, следуя [70], получим

$$\frac{n}{2}b_s = 1 + \frac{\cos\pi s}{1-n^2} + \sum_{j=1}^{n/2-1}\Big(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j-1}\Big)\cos 2jt =$$

$$= \frac{\cos \pi s}{1-n^2} + \sum_{j=1}^{n/2-1} \frac{\cos(2j-2)t - \cos 2jt}{2j-1} + \frac{\cos(n-2)t}{n-1} =$$

$$= \frac{\cos \pi s}{1-n^2} + \frac{\cos \pi s \cos 2t}{n-1} + 2\sin t \sum_{j=1}^{n/2-1} \frac{\sin(2j-1)t}{2j-1} =$$

$$= \frac{(-1)^{s+1}}{n^2-1} + \frac{(-1)^s \cos 2t}{n-1} + 2\sin t \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2j-1)t}{2j-1} - \sum_{j=n/2}^{\infty} \frac{\sin(2j-1)t}{2j-1} \right).$$

Далее, учитывая (ПI.4), имеем

$$\frac{n}{2} b_s = \frac{n}{2} \bar{b}_s + \frac{(-1)^{s+1}}{n^2-1} + \frac{(-1)^s \cos 2t}{n-1} - 2\sin t \sum_{j=n/2}^{\infty} \frac{\sin(2j-1)t}{2j-1} .$$

Подставим теперь в равенство (ПI.5) $M = n/2-1$, $t = \pi s/n$. Тогда

$$\sum_{j=n/2}^{\infty} \frac{\sin(2j-1)t}{2j-1} = \frac{1}{\sin t} \left\{ \frac{(-1)^s \cos 2t}{2(n-1)} - \frac{(-1)^s}{2(n^2-1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^s}{\sin^2 t} \frac{1}{(n-1)(n+1)(n+3)} \right\} + O\left(\frac{1}{n^4 \sin^3 t}\right),$$

откуда

$$\frac{n}{2} b_s = \frac{n}{2} \bar{b}_s + \frac{(-1)^s}{\sin^2 t} \frac{1}{(n-1)(n+1)(n+3)} + O\left(\frac{1}{n^4 \sin^3 t}\right) .$$

Умножая левые и правые части последнего равенства на $2/n$, приходим к (ПI.9)

Лемма доказана.

3. Отобразим теперь КФ (ПI.I) с весами и узлами, определенными в (ПI.2) и (ПI.3), на отрезок [0,I]. В результате получим КФ (6.3.I), где

$$\begin{cases} \mu_j = \sin^2(\pi s)/2n , \quad j = 1,2,\dots,n \\ d_j = 2n^{-1} \sum_{i=0}^{n/2} (1-4i^2)^{-1} \cos \frac{2\pi i j}{n} , \; j = 1,2,\dots,n-1, \\ d_n = 0.5/(n^2-1) \end{cases} \qquad \text{(ПI.I0)}$$

соответствуют КФ Кленшоу-Куртиса, а

$$
\begin{cases}
\bar{\mu}_j = \mu_j, & j = 1,2,\ldots,n, \\
\bar{\alpha}_j = \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi j}{n}, & j = 1,2,\ldots,n-1, \\
\bar{\alpha}_n = \alpha_n
\end{cases}
\qquad (\text{П1.11})
$$

ее предельному случаю.

Покажем, что КФ (6.3.1) с узлами и весами, определенными в (П1.11), удовлетворяет условию (6.6.2)-(6.6.3). Для этого сначала докажем несколько лемм.

Лемма П3. Пусть $a$ и $b$ - некоторые действительные числа. Тогда справедливо равенство

$$
\sum_{i=1}^{k} (a+b)^{2k-2i} (a-b)^{2i-2} = k\left(a^{2k-2} + b^{2k-2}\right) +
$$

$$
+ \sum_{m=1}^{k-2} d_{k,m}\, a^{2k-2m-2}\, b^{2m}, \quad k = 2,3,\ldots, \qquad (\text{П1.12})
$$

где

$$
d_{k,m} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=0}^{2m} (-1)^l C_{2k-2i}^{2m-l} C_{2i-2}^{l}, \quad m = 0,1,\ldots,k-1. \qquad (\text{П1.13})
$$

(Здесь $C_k^i$ - биномиальные коэффициенты).

Доказательство. Обозначим левую часть равенства (П1.12) через A. Непосредственно возводя в степень сомножители в A, получим

$$
A = \sum_{i=1}^{k} \left[ \sum_{j=0}^{2k-2i} C_{2k-2i}^{j} a^{2k-2i-j} b^{j} \sum_{l=0}^{2i-2} (-1)^l C_{2i-2}^{l} a^{2i-2-l} b^{l} \right] =
$$

$$
= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{2k-2i} \sum^{2i-2} (-1)^l C_{2k-2i}^{j} C_{2i-2}^{l} a^{2k-2-(j+l)} b^{j+l}.
$$

Пусть $j+l=m$, тогда

$$
A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=0}^{2k-2} \left[ \sum_{l=0}^{m} (-1)^l C_{2k-2i}^{m-l} C_{2i-2}^{l} \right] a^{2k-2-m} b^{m}. \qquad (\text{П1.14})
$$

Покажем, что в сумме по $m$ отличны от нуля только члены при четном $m$. Предположим, что $k$ четное. Тогда, объединяя во внешней сумме члены с $i=p$ и $i=k-p+1$, получим

$$
A = \sum_{p=1}^{k/2} \sum_{m=0}^{2k-2} \left[ \sum_{l=0}^{m} (-1)^l C_{2k-2p}^{m-l} C_{2p-2}^{l} + \right.
$$

$$+\sum_{l=0}^{m} (-1)^l C_{2p-2}^{m-l}\, C_{2k-2p}^{l} \Big]\, a^{2k-2-m}\, b^m .$$

Нетрудно видеть, что при нечетных $m$ выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Действительно, ибо первый член первой суммы и последний член второй суммы, второй член первой и предпоследний второй и т.д., равны по модулю, но имеют разные знаки.

Теперь проверим при нечетном $k$. В этом случае

$$A=\sum_{m=0}^{2k-2}\Big\{\sum_{p=1}^{(k+1)/2}\Big[\sum_{l=0}^{m}(-1)^l C_{2k-2p}^{m-l}\, C_{2p-2}^{l}+\sum_{l=0}^{m}(-1)^l C_{2p-2}^{m-l}\, C_{2k-2p}^{l}\Big]+$$

$$+\sum_{l=0}^{m}(-1)^l C_{k-1}^{m-l}\, C_{k-1}^{l}\Big\}\, a^{2k-2-m}\, b^m ,$$

причем при нечетном $m$ последняя сумма равна нулю.

Итак мы показали, что в равенстве (П1.14) члены при нечетных $m$ равны нулю. Отсюда

$$A=\sum_{m=0}^{k-1}\Big[\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m}(-1)^l C_{2k-2i}^{2m-l}\, C_{2i-2}^{l}\Big]\, a^{2k-2m-2}\, b^{2m} .$$

В последнем равенстве выделяя слагаемые с $m=0$ и $m=k-1$, приходим к (П1.12).

Лемма доказана.

Лемма П5. Пусть $\alpha=\pi/2n$. Тогда справедливо асимптотическое равенство

$$\alpha\sum_{j=1}^{l}\sin^k \alpha j\cos^m \alpha j = O(\sin^{k+1}\alpha l), \qquad \text{(П1.15)}$$

$$k=1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots,\ l=1,2,\ldots,n=1,2,\ldots$$

Доказательство. Зафиксируем $m\geqslant 1$ и проведем индукцию по $k$. При $k=1$ имеем

$$\alpha\sum_{j=1}^{l}\sin\alpha j\cos^m\alpha j=\frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{l}\sin 2\alpha j\cos^{m-1}\alpha j\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{l}\sin 2\alpha j=\frac{\alpha}{2\sin\alpha}\sin\alpha l\sin\alpha(l+1)=O(\sin^2\alpha l).$$

Пусть (П1.15) справедливо при $k=k'$, тогда

$$\alpha\sum_{j=1}^{l}\sin^{k'+1}\alpha j\cos^m\alpha j\leqslant\alpha\sin\alpha l\sum_{j=1}^{l}\sin^{k'}\alpha j\cos^m\alpha j=$$

$$=\sin\alpha l\, O(\sin^{k'+1}\alpha l)=O(\sin^{k'+2}\alpha l).$$

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать, что имеет место

Теорема П1. Узлы и веса КФ $\{(6.3.1)-(\Pi.11)\}$ удовлетворяют условиям (6.6.2)-(6.6.3).

Доказательство. Вместо КФ $\{(6.3.1)-(\Pi.11)\}$ рассмотрим КФ, которая отличается от нее лишь величиной последнего веса, а именно: пусть $\alpha_n = 0$, т.е. узлы и веса новой КФ есть $\mu_j = \sin^2\frac{\pi j}{2n}$, $\alpha_j = \frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi j}{n}$, $j = 1, 2, \ldots n$. Очевидно, что если условия (6.6.2)-(6.6.3) выполнены для этой КФ, то они выполнены и для КФ (6.3.1)-(П.11), т.к. у последней $\alpha_n = \mathcal{O}(1/n^2)$.

Положим вначале, что в (6.6.2) $i > 1$. Обозначим левую часть равенства (6.6.2) через $A_j^i$, тогда при всех $j = 2, 3, \ldots, \ell$ имеем

$$A_j^i = \alpha_j \mu_j^{i-1} - \frac{\mu_{j+1}^i - \mu_{j-1}^i}{2i} = a\sin 2aj \sin^{2(i-1)} aj -$$

$$- \frac{\sin^{2i} a(j+1) - \sin^{2i} a(j-1)}{2i} = \sin 2aj\,\Big\{a\sin^{2(i-1)} aj -$$

$$-(a + \mathcal{O}(a^3))\, i^{-1}\sum_{m=1}^{i} \sin^{2i-2m} a(j+1)\sin^{2m-2} a(j-1)\Big\},$$

где $a = \pi/2n$. Рассмотрим последнюю сумму. Учитывая (П.12), имеем

$$\sum_{m=1}^{i} \sin^{2i-2m} a(j+1)\sin^{2m-2} a(j-1) = \sum_{m=1}^{i}\Big[\sin aj\cos a +$$

$$+\cos aj\sin a\Big]^{2i-2m}\Big[\sin aj\cos a - \cos aj\sin a\Big]^{2m-2} =$$

$$= i\Big[\sin aj\cos a\Big]^{2(i-1)} + \sum_{p=1}^{i-2} d_{i,p}\Big[\sin aj\cos a\Big]^{2(i-p-1)} \times$$

$$\times\Big[\cos aj\sin a\Big]^{2p} + i\Big[\cos aj\sin a\Big]^{2(i-1)},$$

где коэффициенты $d_{i,p}$ определены в (П.13). Отсюда

$$A_j^i = a\sin 2aj\sin^{2(i-1)} aj\,\Big[1 - \cos^{2(i-1)} a\Big] -$$

$$- a\sin(2aj)\cdot i^{-1}\sum_{p=1}^{i-1} d_{i,p}\Big[\sin aj\cos a\Big]^{2(i-p-1)} \times$$

$$\times\Big[\cos aj\sin a\Big]^{2p} +$$

$$+\mathcal{O}(a^3)\sin(2aj)\, i^{-1}\sum_{p=0}^{i-1} d_{i,p}\left[\sin aj\cos a\right]^{2(i-p-1)}\times$$

$$\times\left[\cos aj\sin a\right]^{2p}=\mathcal{O}(a)\sum_{p=1}^{i-1}\left[\sin aj\right]^{2(i-p)-1}\times\left[\cos aj\right]^{2p-1}\sin a^{2p},$$

$$j=2,3,\dots,n.$$

Нетрудно заметить, что при $j=1$ справедливо равенство

$$A_1^i=\alpha_1\mu_1^{i-1}-(2i)^{-1}(\mu_2^i+\mu_1^i)=\mathcal{O}(a^{2i}).$$

Теперь с учетом (ПI.I5) получим

$$\sum_{j=1}^{\ell}A_j^i=\mathcal{O}(a^2\sin^{2i-2}a\ell)=\mu_1\mathcal{O}(\mu_\ell^{i-1}).$$

Итак мы доказали, что КФ $\{$(6.3.I)-(ПI.II)$\}$ удовлетворяет условиям (6.6.2)-(6.6.3) при всех $i$ = 2,3,... Случай $i$ = I легко проверяется непосредственно.

Теорема ПI доказана.

Из предыдущей теоремы и лемм П2 и П3 следует

Теорема П2. КФ Кленшоу-Куртиса $\{$(6.3.I)-(ПI.I0)$\}$ удовлетворяет условию А).

Доказательство. Из теоремы ПI и леммы 6.II вытекает, что КФ (6.3.I)-(ПI.II) удовлетворяет условию А), т.е.

$$\sum_{j=1}^{\ell}\bar{\alpha}_j\mu_j^{i-1}=(2i)^{-1}\left[\mu_{\ell+1}^i+\mu_\ell^i\right]+\mu_1\mathcal{O}(\mu_\ell^{i-1}),\ \ell=1,2,\dots,n.$$

Отсюда для доказательства теоремы П2 достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^{\ell}|\alpha_j-\bar{\alpha}_j|\mu_j^{i-1}=\mu_1\mathcal{O}(\mu_\ell^{i-1}),\ \ell=1,2,\dots,n,\qquad\text{(ПI.I6)}$$

где $\alpha_j,\bar{\alpha}_j,\mu_j,\ j=1,2,\dots,n$ определены в (ПI.I0)-(ПI.II).

Равенство (ПI.I6) докажем по индукции. Пусть $i$ = I, тогда, учитывая (ПI.9), получим

$$\sum_{j=1}^{\ell}|\alpha_j-\bar{\alpha}_j|=\mathcal{O}(n^{-4})\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi j}{n})}+\mathcal{O}(n^{-5})\sum_{j=1}^{\ell}\left|\frac{1}{\sin^3(\frac{\pi j}{n})}\right|\qquad\text{(ПI.I7)}$$

$$\ell=1,2,\dots,n-1.$$

Предположим, что $1\leqslant\ell\leqslant n/2$, тогда для всех $j=1,2,\dots,\ell$ справедливо неравенство $\sin(\pi j/n)\geqslant 2j/n$, и

$$\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{\sin^p(\frac{\pi j}{n})}\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^p\sum_{j=1}^{\ell}j^{-p}\leqslant C_p n^p,\ p=2,3.$$

При $n/2 < \ell \leqslant n-1$ можно записать

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\sin^p\left(\frac{\pi j}{n}\right)} \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n/2} \frac{1}{\sin^p\left(\frac{\pi j}{n}\right)} \leqslant C_p n^p, \quad p = 2, 3.$$

Подставляя последние неравенства в (ПI.I7), получаем

$$\sum_{j=1}^{\ell} |\alpha_j - \bar{\alpha}_j| = O(\mu_1).$$

Дальнейшие шаги индукции и равенство (ПI.I6) вытекают из очевидного неравенства

$$\mu_j \leqslant \mu_\ell, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell.$$

Теорема доказана.

## Приложение 2.

## Квадратурные формулы Гаусса

В этом приложении мы покажем, что веса КФ Гаусса на отрезке $[0,1]$ представимы в виде

$$\alpha_j = \pi(2n+1)^{-1}\sin\theta_j + O\left(\frac{1}{n^3\sin\theta_j}\right), \tag{П2.1}$$

где $\theta_j = \arccos x_j$, а $x_j$ есть $j$-ый корень многочлена Лежандра степени $n$. Отметим, что в [43, с. 358] для весов КФ Гаусса выводится соотношение

$$\alpha_j = \pi(2n)^{-1}\sin\theta_j\,(1+o(1)),\ j=1,2,\dots,n$$

которое является более грубым по сравнению с (П2.1).

Рассмотрим КФ Гаусса на $[0,1]$. Хорошо известно [29, с. 103], что ее веса и узлы представимы в виде

$$\alpha_j = \left\{(1-x_j^2)\left[P_n'(x_j)\right]^2\right\}^{-1},\ j=1,2,\dots,n, \tag{П2.2}$$

$$\mu_j = \sin^2(\theta_j/2),\ j=1,2,\dots,n,$$

где $P_n(x)$ - многочлен Лежандра степени

1. Остановимся на представлении (П2.2). Из очевидного равенства

$$P_n'(x) = \frac{dP_n}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = -\frac{dP_n}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}$$

где $x=\cos\theta$, следует, что

$$(1-x_j^2)\left[P_n'(x_j)\right]^2 = \left[\frac{dP_n}{d\theta_j}(\cos\theta_j)\right]^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha_j = \left[\frac{dP_n}{d\theta_j}(\cos\theta_j)\right]^{-2},\ j=1,2,\dots,n, \tag{П2.3}$$

причем для арккосинусов корней многочленов Лежандра (углов $\theta_j$) имеет место асимптотическое равенство [1, с. 594]

$$\theta_j = \bar\theta_j + \frac{\operatorname{ctg}\bar\theta_j}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),\ j=1,2,\dots,n, \tag{П2.4}$$

$$\bar{\theta}_j = \frac{j-1/4}{N}\pi, \quad N = n+1/2, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{П2.5}$$

или равенство [43, с. 145]

$$\theta_j = \frac{j-\varepsilon_j}{N}\pi, \quad \varepsilon_j \in (0, 1/2), \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Ниже мы будем пользоваться техникой, развитой в [48], несколько уточняя некоторые оценки.

Из известного выражения [48, с. 138]

$$(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos[N\theta - \pi/4] + R_n(\theta), \tag{П2.6}$$

где

$$\lambda_n = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \tag{П2.7}$$

а

$$R_n(\theta) = N^{-1}\int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin[N(t-\theta)]}{4\sin^2 t}\sqrt{\sin t}\, P_n(\cos t)\,dt, \tag{П2.8}$$

получим соответствующее равенство для производной от многочлена Лежандра. Для этого продифференцируем почленно равенство (П2.6) (в [48, с. 141] дается обоснование этому шагу ).

Имеем

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,P_n(\cos\theta) + \sqrt{\sin\theta}\,\frac{dP_n}{d\theta}(\cos\theta) =$$

$$= -\lambda_n N \sin(N\theta - \pi/4) + R_n'(\theta).$$

Отсюда с учетом (П2.6) получим

$$\frac{dP_n}{d\theta}(\cos\theta) = -\left[\lambda_n N \sin(N\theta - \pi/4) - \psi_n(\theta)\right]\sin^{-\frac{1}{2}}\theta, \tag{П2.9}$$

где

$$\psi_n(\theta) = -\frac{\lambda_n}{2}\operatorname{ctg}\theta\cos(N\theta - \pi/4) - \frac{1}{2}R_n(\theta)\operatorname{ctg}\theta + R_n'(\theta). \tag{П2.10}$$

Равенство (П2.9) имеется в [48, с. 142], но для $\psi_n$ там приведена лишь оценка.

Из (П2.6) и (П2.8) вытекает выражение для $R_n'$, а именно

$$R_n'(\theta) = -\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{\cos N(t-\theta)}{4\sin^2 t}\sqrt{\sin t}\; P_n(\cos t)\,dt =$$

$$= -\lambda_n \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos N(t-\theta)}{4\sin^2 t} \cos(Nt-\pi/4)dt - \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos N(t-\theta)}{4\sin^2 t} R_n(t)dt. \quad (П2.11)$$

2. Обозначим в равенстве (П2.11) первый интеграл через $\varphi_n(\theta)$, а второй через $\gamma_n(\theta)$ и распишем подробнее функцию Согласно [48, с. 143] имеем

$$\varphi_n(\theta) = -\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos N(t-\theta)}{4\sin^2 t} \cos(Nt-\pi/4)dt =$$

$$= -\cos N\theta \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos Nt \cos(Nt-\pi/4)}{4\sin^2 t} dt - \sin N\theta \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin Nt \cos(Nt-\pi/4)}{4\sin^2 t} dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\cos N\theta \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos(2Nt-\pi/4)}{\sin^2 t} dt - \frac{1}{8}\sin N\theta \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin(2Nt-\pi/4)}{\sin^2 t} dt +$$

$$+ 1/8\, \operatorname{ctg}\theta + [\cos N\theta \cos\pi/4 + \sin N\theta \sin\pi/4].$$

Здесь мы учли, что интегралы от $1/\sin^2 t$ легко вычисляются. Обозначим в последнем равенстве первый и второй интегралы через $C_n(\theta)$ и $\mathcal{D}_n(\theta)$ соответственно. Тогда

$$\varphi_n(\theta) = -\frac{1}{8}\left[\cos N\theta\, C_n(\theta) + \sin N\theta\, \mathcal{D}_n(\theta) - \operatorname{ctg}\theta \cos(N\theta-\pi/4)\right].$$

Отсюда и из (П2.11) имеем

$$R_n'(\theta) = \frac{\lambda_n}{8} \operatorname{ctg}\theta \cos(N\theta-\pi/4) + H_n(\theta), \quad (П2.12)$$

где

$$H_n(\theta) = \frac{-\lambda_n}{8}\left[\cos N\theta\, C_n(\theta) + \sin N\theta\, \mathcal{D}_n(\theta)\right] + \gamma_n(\theta) \quad (П2.13)$$

Учитывая (П2.4) и (П2.5), оценим $\cos(N\theta-\pi/4)$. Нетрудно видеть, что

$$\cos(N\theta_j - \pi/4) = (-1)^j \sin\left[\frac{N}{8n^2}\operatorname{ctg}\bar{\theta}_j + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из последнего равенства вытекает оценка

$$|\cos(N\theta_j - \pi/4)| \le cn^{-1} |\operatorname{ctg}\theta_j|, \; j = 1, 2, \ldots, n \quad (П2.14)$$

Действительно, т.к.

$$\operatorname{ctg}\theta_j = \frac{1 + \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}(\theta_j - \bar{\theta}_j)}{\operatorname{tg}\theta_j - \operatorname{tg}(\theta_j - \bar{\theta}_j)}$$

то

$$|\operatorname{ctg}\bar\theta_j| < c\,|\operatorname{ctg}\theta_j|,\ j=1,2,\ldots,n,$$

откуда и следует (П2.14).

Теперь оценим $H_n$. Следуя [48, с. 138], с учетом неравенства [48, с. 134]

$$\sqrt{\sin t}\,|P_n(\cos t)| < \sqrt{2/(\pi n)}\,,\quad 0\leqslant t\leqslant \pi,$$

при $0<\theta<\pi/2$ имеем

$$|R_n(\theta)| \leqslant \frac{1}{4N}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{dt}{\sin^2 t} \leqslant c n^{-3/2}\operatorname{ctg}\theta. \tag{П2.15}$$

Отсюда

$$|\gamma_n(\theta)| = \left|\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{\cos N(t-\theta)}{4\sin^2 t}R_n(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant c n^{-3/2}\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{\cos t}{\sin^3 t}\,dt \leqslant c n^{-3/2}\operatorname{ctg}^2\theta,\ 0<\theta<\pi/2 \tag{П2.16}$$

(Оценка при $\pi/2<\theta<\pi$ проводится аналогично).

Нам осталось оценить функции $C_n(\theta)$ и $\mathcal{D}_n(\theta)$. Взяв интеграл в определении $C_n(\theta)$ по частям, получим

$$C_n(\theta) = \int_{\pi/2}^{\theta}\frac{\sin(2Nt-\pi/4)}{\sin^2 t}\,dt = -\frac{1}{2N}\,\frac{\cos(2Nt-\pi/4)}{\sin^2 t}\Bigg|_{\pi/2}^{\theta} -$$

$$-\frac{1}{N}\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{\cos(2Nt-\pi/4)}{\sin^3 t}\cos t\,dt.$$

Отсюда справедлива оценка

$$|C_n(\theta)| \leqslant c n^{-1}\operatorname{ctg}^2\theta,\ 0<\theta<\pi \tag{П2.17}$$

Аналогичная оценка имеет место и для $\mathcal{D}_n(\theta)$. Подставив (П2.15)-(П2.17) в (П2.13) и учитывая (П2.7), имеем

$$|H_n(\theta)| \leqslant c n^{-3/2}\operatorname{ctg}\theta,\quad 0<\theta<\pi.$$

Отсюда и из (П2.7), (П2.12) и (П2.14) получим такую же оценку и для $R_n'$, а именно

$$|R_n'(\theta_j)| \leqslant c n^{-3/2}\operatorname{ctg}^2\theta_j,\ j=1,2,\ldots,n \tag{П2.18}$$

Сравнивая (П2.18) с оценкой для $R_n'$, приведенной в [48, с. 141]:

$$|R_n'(\theta)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{c}{\theta\sqrt{n}}(\pi/2-\theta), & 0<\theta\leqslant\pi/2, \\ \dfrac{c}{(\pi-\theta)\sqrt{n}}(\theta-\pi/2), & \frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi, \end{cases} \qquad (\text{П}2.19)$$

можно заключить, что оценка (П2.19) завышена на порядок, по крайней мере, вдали от концов отрезка $[0,\pi]$.

3. Вернемся к равенствам (П2.9)-(П2.10). Учитывая (П2.7), (П2.14), (П2.15) и (П2.18) из (П2.10) следует оценка

$$|\psi_n(\theta_j)| \leqslant c n^{-3/2} \operatorname{ctg}^2\theta_j, \; j=1,2,\ldots,n \qquad (\text{П}2.20)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sin(N\theta_j-\pi/4)=(-1)^{k+1}\cos\left(\frac{N}{8n^2}\operatorname{ctg}\bar\theta_j+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \; j=1,2,\ldots,n. \qquad (\text{П}2.21)$$

Отсюда, с учетом равенства

$$\operatorname{ctg}\bar\theta_j = O(\operatorname{ctg}\theta_j), \qquad j=1,2,\ldots,n,$$

следует, что $\sin^2(N\theta_j-\pi/4)$ представим в виде

$$\sin^2(N\theta_j-\pi/4) = 1+O\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\theta_j}{n}\right), \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

Подставляя теперь в выражение для производной от многочленов Лежандра (П2.9) равенства (П2.7) и (П2.21) и учитывая оценку (П2.20), получим

$$\left[\frac{dP_n}{d\theta}(\cos\theta_j)\right]^2 = \left[\frac{2N}{\pi}+O\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\theta_j}{n}\right)\right]/\sin\theta_j,$$

$$j=1,2,\ldots,n. \qquad (\text{П}2.22)$$

Наконец, мы в состоянии найти $\alpha_j$, $j=1,2,\ldots,n$. Из (П2.3) и (П2.22) имеем

$$\alpha_j = \left[\frac{dP_n}{d\theta}(\cos\theta_j)\right]^{-2} = \frac{\pi}{2N}\sin\theta_j\left[1+O\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\theta_j}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2N}\sin\theta_j\left[1+O\left(\frac{1}{n^2\sin^2\theta_j}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2N}\sin\theta_j + O\left(\frac{1}{n^3\sin\theta_j}\right), \; j=1,2,\ldots,n,$$

что и требовалось доказать.

## Приложение 3.

### Циркулянты. Основные свойства

1. Циркулянтом порядка $p$ называется матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{p-1} \\ c_{p-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{p-2} \\ c_{p-2} & c_{p-1} & c_0 & \dots & c_{p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix} \qquad (\text{П3.1})$$

Упорядоченный набор $(c_0, c_1, c_2 \dots c_{p-1})$ называется образующим вектором циркулянта. Всякий циркулянт однозначно определяется своим образующим вектором.

Теорема П1. Матрица $C = (c_{m\ell})_{m,\ell=1,p}$ является циркулянтом тогда и только тогда, когда ее элементы выражаются формулой

$$c_{m\ell} = \begin{cases} c_{\ell-m}, & \ell \geq m, \\ c_{p-m+\ell}, & \ell < m. \end{cases} \qquad (\text{П3.2})$$

2. Если матрица (П3.1) есть симметричная матрица, то в этом случае $C$ называется симметричным циркулянтом. Из (П3.2) следует следующая структура симметричного циркулянта: образующий вектор симметричного циркулянта четного порядка есть

$$(c_0\ c_1 \dots c_{q-1}\ c_q\ c_{q-1} \dots c_1),\ p = 2q,$$

а нечетного

$$(c_0\ c_1 \dots c_{q-1}\ c_q\ c_q\ c_{q-1} \dots c_1),\ p = 2q+1.$$

Всякий симметричный циркулянт однозначно определяется заданием первых $q+1$ чисел образующего вектора.

3. Собственное значение циркулянта (П3.1) определяется формулой

$$\lambda_k = c_0 + \sum_{j=1}^{p-1} c_j z_k^j,\quad k = 0, 1, \dots, p-1, \qquad (\text{П3.3})$$

а соответствующий ему собственный вектор $e_k$ есть

$$e_k = (1\ z_k\ z_k^2 \dots z_k^{p-1})^T, \qquad (\text{П3.4})$$

где $r_k$ есть $k$-й корень уравнения $r^p = 1$. Нетрудно показать, что

$$(e_k, e_j) = p\,\delta_{kj}, \quad (x, y) = \sum_{j=1}^{p} x_j y_j \,. \qquad \text{(П3.5)}$$

4. Из(П3.3)-(П3.5)следует, что любой циркулянт порядка $p$ при помощи унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & r_1 & \ldots & r_{p-1} \\ 1 & r_1^2 & \ldots & r_{p-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & r_1^{p-1} & \ldots & r_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}, \quad UU^* = I_p \qquad \text{(П3.6)}$$

не зависящего от конкретного циркулянта, приводится к диагональному виду

$$C = U \Lambda U^*, \quad \Lambda = (\lambda_k \delta_{kj})_{k,j=1,p}.$$

5. Все циркулянты порядка $p$ коммутируют между собой.

6. Рассмотрим симметричный циркулянт четного порядка $p=2q$. Из пп. 2-3 следует, что $k$-тое собственное значение циркулянта есть

$$\lambda_k = c_0 + (-1)^k c_q + 2\sum_{l=1}^{q-1} c_l \cos\frac{\pi k l}{q}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

7. Собственные значения симметричного циркулянта четного порядка удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_{q-k} = \lambda_{q+k}, \quad \lambda_k = \lambda_{p-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, q-1.$$

Это выражение следует из следующей цепочки равенств

$$\lambda_{p-k} = c_0 + (-1)^k c_q + \sum_{l=1}^{q-1} c_l \cos\frac{\pi(p-k)l}{q} =$$

$$= c_0 + (-1)^k c_q + \sum_{l=1}^{q-1} c_l \cos\left(2\pi - \frac{\pi k l}{q}\right) = \lambda_k \,.$$

8. Рассмотрим операцию умножения циркулянта на вектор. Поставим каждому вектору $x \in R^p$

$$x = (x_0\ x_1\ \ldots\ x_{p-1})^T$$

в соответствие циркулянт $\mathcal{X}$ с образующим вектором

$$\mathscr{X} \sim (x_0\ x_{p-1} \dots x_1)$$

Нетрудно убедиться, что соответствие $x \to \mathscr{X}$ есть изоморфизм. Очевидные выкладки показывают, что образующий вектор циркулянта $C\mathscr{X}$ совпадает с вектором $Cx \in R^p$. Следовательно, операция умножения циркулянта $C$ на вектор $x$ эквивалента произведению двух циркулянтов $C$ и $\mathscr{X}$.

9. Обозначим через $Cir(p)$ множество всех циркулянтов порядка $p$ а через $Cir^*(p)$ множество всех симметричных циркулянтов. Очевидно, что

$$Cir^*(p) \subset Cir(p).$$

Кроме того, имеют место следующие свойства:

10. $A, B \in Cir^*(p) \Rightarrow \alpha A + \beta B \in Cir^*(p)$,

11. $A, B \in Cir^*(p) \Rightarrow AB \in Cir^*(p)$,

12. $A \in Cir^*(p)\ \&\ \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \in Cir^*(p)$,

13. $A, B \in Cir^*(p) \Rightarrow AB = BA$.

14. Свойства 10-13 остаются в силе и для множества $Cir(p)$

15. Рассмотрим величину

$$\Delta^L_{nm} = \sum_{k=0}^{L} \cos\frac{2\pi mk}{L} \cos\frac{2\pi nk}{L}$$

Теорема П2. Имеет место соотношение

$$\Delta^L_{nm} = \begin{cases} 0, & m+n \notin \mathcal{P}\ \&\ |m-n| \in \mathcal{P}, \\ L/2, & \{m+n \in \mathcal{P}\ \&\ |m-n| \notin \mathcal{P}\} \vee \{m+n \notin \mathcal{P}\ \&\ |m-n| \in \mathcal{P}\}, \\ L, & m+n \in \mathcal{P}\ \&\ |m-n| \in \mathcal{P}, \end{cases} \tag{П3.7}$$

$$\mathcal{P} = \{0, L, 2L, \dots\}$$

Доказательство. Применяя формулу произведения тригонометрических функций, получим

$$\Delta^L_{nm} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} \left(\cos\frac{2\pi(m+n)k}{L} + \cos\frac{2\pi(m-n)k}{L}\right).$$

Рассмотрим величину $\sum_{k=0}^{L-1} \cos(2\pi(m+n)k/L)$. Она определяет собственные значения циркулянта

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\sum_{k=0}^{L-1} \cos\frac{2\pi(m+n)k}{L} = \begin{cases} L, & m+n = 0, L, 2L, \ldots, \\ 0, & m+n \neq 0, L, 2L, \ldots, \end{cases}$$

аналогично

$$\sum_{k=0}^{L-1} \cos\frac{2\pi(m-n)k}{L} = \begin{cases} L, & |m-n| = 0, L, 2L, \ldots, \\ 0, & |m-n| = 0, L, 2L, \ldots . \end{cases}$$

Отсюда получаем формулу (П3.6)

## Библиографическая справка

Теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от исходных данных (в соответствующих пространствах) исследовались во многих работах и для более общего случая [2,11,17,18,21,40,71]. В первой главе воспроизводятся доказательства этих теорем для уравнения переноса в плоско-параллельной анизотропно рассеивающей среде.

Отказ от представления индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра, по видимому, впервые был сделан в [86]. Получение расчетных схем на основе вывода уравнения переноса в терминах дискретных переменных подробно исследовалось в обзоре [20]. Термин линейно-алгебраическая модель переноса излучения введен в [42].

Решению уравнения переноса методом Зейделя посвящено довольно много работ (см. например, [58,61,66,69]). Зависимость сходимости этого метода от вытянутости и "направления" анизотропности изучалась в [23].

Структура ЛАМ в случае равномерной сетки по азимуту исследовалась в [22,23,25,26].

Первые результаты по описанию точного решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений МДО приведены в [84,85,91]. Дальнейшие исследования решения МДО для более сложных случаев можно найти в [9,21,37,56,78]. Построение решения ЛАМ в наиболее общем случае (анизотропном рассеянии, азимутальной зависимости) приведено в [24].

Свойства сходимости МДО изучались многими авторами. Достаточно указать работы [44,49,50,57,59,60,72-74,77,79,80,90]. (Более детально см. обзоры [3,4]). Однако вопросы быстроты сходимости метода до сих пор окончательно не выяснены. Впервые вопросы скорости сходимости затронуты в работе [57], в которой получены оценки аппроксимации в случае использования КФ Гаусса. Затем в [63] были получены оценки для приближенного решения проблемы собственных значений, где в качестве КФ были выбраны также КФ Гаусса. Надо отметить также работы [2] и [10], в которых развита методика оценивания скорости сходимости метода и выведены оценки для КФ прямоугольников. В монографии [4] на основе детального анализа дифференциальных свойств решения уравнения переноса также рассматриваются вопросы оценки погрешности МДО в общей постановке. Наиболее полная работа, посвященная скорости сходимости МДО с дискретизацией, как по угловой, так и по пространственной переменной, была проведена в [82, 83].

## Литература


I. А б р а м о в и ц  М.И., С т и г а н  И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. - М.: Наука, 1979. - 832 с.

2. А г о ш к о в  В.И. О гладкости решений уравнений переноса и приближенных методах их построения. - В кн.: Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, с. 44-72.

3. Б а с с  Л.П. Конечно-разностные методы решения уравнения переноса в задачах со сложной геометрией. - М.: ИПМ АН СССР, 1975. Препринт № 14.

4. Б а с с  Л.П., В о л о щ е н к о  А.М., Г е р м о г е н о в а  Т.А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. - М.: ИПМ АН СССР, 1986.

5. Б е л л м а н  Р. Введение в теорию матриц. - М.: Наука, 1976. - 352 с.

6. Б е р г  Й., Л е ф с т р е м  Й. Интерполяционные пространства. Введение. - М.: Мир, 1980. - 246 с.

7. В а й н и к к о  Г.М. Транспортное приближение к средней интенсивности излучения в разорванной облачности. - Метеорологические исследования, 1973, № 21, с. 38-51.

8. В а й н и к к о  Г.М. Уравнение средней интенсивности излучения в разорванной облачности. - Метеорологические исследования, 1973, № 21, с. 21-37.

9. В а й н и к к о  Г., К а р п е н к о  Л., Ш и л м а н  А. Решение интегральных уравнений с экпоненциальными ядрами. Изв. АН ЭССР, сер. физ. матем., 25, № 2, с. 118-123.

10. В а й н и к к о  Г.М., М а р ш а к  А.Л. О быстроте сходимости метода дискретных ординат в задаче переноса излучения. - Изв. ВУЗов, Матем., 1978, № 11, с. 11-22.

11. В л а д и м и р о в  В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. - Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1961, № 61. - 160 с.

12. В о е в о д и н  В.В., Т а р т ы ш н и к о в  Е.Е. Численные методы решения задач с матрицами типа теплицевых. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 3, с. 531-544.

13. Г е р м о г е н о в а  Т.А., Д я т л о в а  А.С. Решение уравнения переноса с высокой степенью точности. Программа TEST.- М.:ИПМ АН СССР,1985,Препринт №139.- 25 с.

14. Г е р м о г е н о в а Т.А. О решении уравнения переноса при сильно неизотропном рассеянии. - Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2, с. 297-300.
15. Г е р м о г е н о в а Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса. - М.: Наука, 1986. - 272 с.
16. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963 - 1100 с.
17. Д э в и с о н Б. Теория переноса нейтронов. - М.: Атомиздат, 1960. - 520 с.
18. Е р ш о в Ю.И., Ш и х о в С.Б. Методы решения краевых задач теории переноса. - М.: Атомиздат, 1977. - 193 с.
19. К а н т о р о в и ч Л.В., А к и л о в Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. - 741 с.
20. К а р л с о н Б., Л а т р о п К. Теория переноса. Метод дискретных ординат. - В кн.: Вычислительные методы в физике реакторов, М.: Атомиздат, 1972, с. 102-157.
21. К е й з К., Ц в а й ф е л ь П. Линейная теория переноса. - М.: Мир, 1972. - 384 с.
22. К н я з и х и н Ю. Метод дискретных ординат применительно к решению уравнения переноса излучения в однородной плоскопараллельной анизотропно рассеивающей атмосфере. I. - Изв. АН ЭССР, сер.: физ.-матем., 1982, т. 31, № 1, с. 1-10.
23. К н я з и х и н Ю. Метод дискретных ординат применительно к решению уравнения переноса излучения в однородной плоскопараллельной анизотропно рассеивающей атмосфере. 2 - Изв. АН ЭССР, сер.: физ.-матем., 1983, т. 32, № 2, с. 185-197.
24. К н я з и х и н Ю. Структура решения некоторых систем интегральных уравнений, связанных с приближенным решением задач переноса излучения. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, № 500, с. 73-91.
25. К н я з и х и н Ю. В. Решение уравнения переноса с произвольной индикатрисой рассеяния методом дискретных ординат. - В кн.: Защита от ионизирующих излучений ядерно-технических установок: Труды Третьей Всесоюзной научной конф. Тбилиси, 1983, с. 106-113.
26. К н я з и х и н Ю. Об эффективности одного метода решения уравнения переноса. - В кн.: Теоретические и прикладные вопросы математики. II: Тез.докл., Тарту, 1985, с. 60-62.

27. К о л л а т ц Л. Функциональный анализ и вычислитель - ная математика. - М.: Мир, 1969. - 448 с.
28. К р а с н о с е л ь с к и й М.А., В а й н и к к о Г.М., З а б р е й к о П.П., Р у т и ц к и й Я.Б., С т е - ц е н к о В.Я. Приближенное решение операторных урав - нений. - М.: Наука, 1969. - 456 с.
29. К р ы л о в В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Физматгиз. 1959. - 327 с.
30. К у р п е л ь Н.С., Ш у в а р Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. - Киев: Наукова думка, 1980. - 267 с.
31. Л а н к а с т е р П. Теория матриц. - М.: Наука, 1978. 280 с.
32. М а л ь ц е в А.И. Основы линейной алгебры. - М.: Наука 1975. - 400 с.
33. М а р к у с М., М и н к Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука, 1972. - 232 с.
34. М а р ч у к Г.И., А г о ш к о в В.И. О выборе коорди - натных функций в обобщенном методе Бубнова-Галеркина. - Докл. АН СССР, 1977, 232, № 6, с. 1253-1256.
35. М а р ч у к Г.И., Л е б е д е в В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. - М.: Атомиздат, 1981. - 456 с.
36. М а р ш а к А.Л. О быстроте сходимости метода дискретных ординат в случае квадратур Гаусса. - Уч. зап. Тартуского ун-та, 1979, 500, с. 92-104.
37. М а р ш а к А. О решении уравнения переноса в неодно - родной среде методом дискретных ординат. - Изв. АН ЭССР, сер.: физ.-матем., т. 30, № 3, с. 190-201.
38. М а р ш а к А. О решении уравнения переноса методом дискретных ординат в сферической геометрии. - Изв. АН ЭССР, сер.: физ.-матем., 1981, т. 30, № 4, с. 364-375.
39. М а р ш а к А.Л. О приближении интегральной экспоненты с помощью квадратурных формул. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, т. 22, № 5, с. 1044-1051.
40. М а с л е н н и к о в М.В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием. - Труды матем. ин-та АН СССР, 1968, т. 97. - 133 с.
41. Н и к о л ь с к и й С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1979. - 254 с.

42. Румянцев Т.Я. Линейно-алгебраическая теория переноса нейтронов в плоских решетках. - М.: Атомиздат, 1979. - 224 с.
43. Сегё Г. Ортогональные многочлены. - М.: Физматгиз, 1962. - 500 с.
44. Скобликов В.С. Сильная сходимость метода сферических гармоник. Препринт, Новосибирск, 1972.
45. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. - М.: Гостехиздат, 1956. - 392 с.
46. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет - М.: Наука, 1972. - 336 с.
47. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под общ. ред. Дж. Холли и Дж.Уатт - М.: Мир, 1979. - 312 с.
48. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены - М.: Наука, 1979. - 415 с.
49. Султангазин У.М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. - Алма-Ата: Наука, Каз.ССР, 1979. - 267 с.
50. Сыдыков Г.М. О скорости сходимости метода сферических гармоник в пространстве $C([0,T];L_2)$ - В кн.: Численные методы решения уравнения переноса. Тарту, АН ЭССР, 1986, с.112-115.
51. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. - М.: Физматгиз, 1960. - 624 с.
52. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматгиз, 1960. - 656 с.
53. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1980. - 280 с.
54. Форсайт Дж., Моулер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: Мир, 1969. - 168 с.
55. Функциональный анализ: Справочная математическая библиотека/ Под общ. ред. С.Г. Крейна и др. - М.: Наука, 1972. - 544 с.
56. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. - М. ИЛ, 1953. - 432 с.
57. Чуянов В.А. О сходимости приближенного решения кинетического уравнения (метод квадратур типа Гаусса). - В кн.: Некоторые математические задачи нейтронной фи-

зики, М.: МГУ, 1960, с. 199-220.
58. Ahmad Z., Fraser R.S. An iterative Radiative transfer code for ocean atmosphere system. - J. Atmosph. Sci, 1982, v. 39, No 3, pp. 656-665.
59. Anselone P.M. Collectively compact operator approximation theory. - Prentice-Hall, New Jersy, 1971, - 196 p.
60. Anselone P.M. Convergence of Chandrasekhar's method for inhomogeneous transfer problems. - J.Mech., 1961, No 10, pp. 537-546.
61. Braslau N., Dave J.V. Effect of aerosols on the transfer of solar energy through realistic model atmospheres. 1. - J.App. Meteor., 1973, No 12, pp.601-615.
62. Clenshaw C.W., Curtis A.R. A method for numerical integration on an automatic computer.- Numer. Math., 1960, No 2, pp. 197-205.
63. Davison B. On the rate of convergence of the spherical harmonics method (for the plane case, isotropic scattering) - Canadian J.Physics, 1960, v. 38, No 11, p. 1526.
64. Eddington A.S. Der innere Aufbau der Sterne. - Berlin, Verlag von Aulius Springer, 1928, - 514 p.
65. El - Gendi S.E. Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations. Computer Journal, 1969, No 12, pp. 282-287.
66. Eschelbach G. A direct method for the integration of the equation of radiative transfer in a turbid atmosphere. - J.Quant. Spectrosc. Radiat.Transfer, 1971, v. 11, No 6, pp. 757-765.
67. Gast R. On the equivalence of the spherical harmonics method and the discrete ordinate method using Gauss quadratur for the Boltzmann eqution. - Beftis Report, WARD-TM-118, 1958, pp. 1-10.
68. Hansen J.E. Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres. Part II. Sunlight reflected by terrestrial water clouds. - J.Atmosph. Sci., 1971. v. 28, No 8, pp. 1400-1426.
69. Herman B.M. Browning S.R. A numerical solution to the equation of radiative transfer. - J.Atmosph. Sci., 1978. v. 22, pp. 559-566.

the linear transport equation . - Numer. Math., 1980, v. 34, No 4, pp. 353-370.

82. P i t k ä r a n t a J. Numerical solution of the discrete ordinate transport equation in slab geometry: error bounds for projection schemes. - Report - Mat - A233, Institute of Mathematics Helsingi University of Technology, 1986.

83. P i t k ä r a n t a J., S c o t t L.R. Error estimates for the combined spatial and angular approximations of the transport equation for slab geometry. - SIAM J. Numer. Anal., 1983, v. 20, p. 922.

84. S c h u s t e r A. Radiation through a foggy atmosphere, Ap. J., 1905, v. 21, No 1, pp. 24-36.

85. S c h w a r z c s h i l d K. Über des Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, Göttinger Nacher., 1906, v. 41, pp. 27-39.

86. S e k e r a Z. Investigation of polarization of skylight: - Final Report, Contract AF 19 (1220-239), 1955. - 120 p.

87. V a i n i k k o G., P e d a s A. The properties of solutions of weakly singular integral equations - J. of the Australian Math. Society, Series B, 1981, 22, Part 4, pp. 424-435.

88. V i c t o r y H.D. Convergence properties of discrete-ordinates solutions for neutron transport in three--dimensional media. - SIAM J. Nemer. Anal., 1980, v. 17, No 1, pp. 71-83.

89. D e V o r e R.A., S c o t t L.R. Error bounds for Gaussian quadrature and weighted-$L^1$ polynomical approximation. - SIAM J. Numer Anal., 1984, v. 21, pp. 400-412.

90. W e n d r o f f B. On the convergence of the discrete ordinate method. - J. SIAM, 1960, v. 8, No 4, pp. 508-513.

91. W i c k C.G. Über Ebene Diffusions Probleme. - Zeits. Physik, 1943, v. 121, No 11-12, pp. 702-718.

70. I m h o f I.P. On the method for numerical integration of Clenshaw and Curtis. - Numer.Math., No 5, pp. 138-141, 1963.
71. K a p e r H.G., K e l l o g g R.E. Asymptotic behavior of the solution of the integral transport equation in slab geometry. - SIAM Appl.Math., 1977, v. 32, No 1, pp. 191-200.
72. K e l l e r H.B. Approximate solution of transport problems. Part II. Convergence and applications of the discrete ordinate method. - J. SIAM, 1960, v. 8, No 4, pp. 43-73.
73. K e l l e r H.B. Convergence of the discrete ordinate method for the anisotropic-scattering transport equation. In Symposium Provisional International Computation Centre. Basel Birkhauser, 1960.
74. K e l l e r H.B. On the pointwise convergence of the discrete ordinate method. - J. SIAM, 1960, v. 8, No 4, pp. 560-567.
75. L i o u K. A numerical experiment on Chandrasekhar's discrete-ordinate method for radiative transfer: Applications to cloudy and hare atmospheres. - J.Atmosph. Sci., 1973, v. 30, No 7, pp. 1303-1326.
76. L e n o b l e J. Standard procedures to compute radiative transfer in a scattering atmosphere. - Colorado 80307, USA, 1977, 1, pp. 1-125.
77. M a d s e n N.K. Pointwise convergence of the three--dimensional discrete ordinate method. - SIAM J. Numer. Anal., 1971, v. 8, No 2, pp. 266-269.
78. M a r s h a k A.L. On the solution of the transport equation with periodic boudary conditions by the method of discrete ordinates. - Transport Theory and Statistical Physics, 1985, v. 14, No 3, pp. 323-351.
79. N e l s o n P. Convergence of the discrete ordinate method for anisotropically scattering multiplying particles in a subcritical slab. - SIAM J. Numer. Anal., 1973, No 10, pp. 175-181.
80. N e l s o n P., V i c t o r y H.D. Theoretical properties of one- dimensional discrete ordinates. - SIAM J. Numer. Anal., 1979, v. 16, No 2, pp. 270-283.
81. N e l s o n P., V i c t o r y H.D. Convergense of two-dimensional Nyström discrete-ordinates in solving

1 руб. 20 коп.

# МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

1 руб. 20 коп.

# МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА