TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

matemaatilise analüüsi praktikum

I

TARTU 1967

T A R T U   R I I K L I K   Ü L I K O O L

Matemaatilise analüüsi kateeder

S.Baron, E.Jürimäe, E.Reimers, T.Sõrmus, M.Tõnnov

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

I

Toimetanud E. Reimers

Tartu 1967

УДК 517 (07)

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

С. Барон, Э. Юримяэ, Э. Реймерс, Т. Сырмус, М. Тыннов

Настоящее издание является руководством для проведения практикума математического анализа по следующим разделам: I Введение в анализ; II Функции; III Предел и непрерывность функции; IV Производная и дифференциал функции; V Исследование функции и VI Применение дифференциального исчисления. В начале каждой главы даны необходимые определения, методические указания и примеры. Всего приведено 1225 задач. Ответы расположены в конце издания. Для некоторых задач, отмеченных звездочкой (*), дано полное решение или вспомогательное указание.

34 рисунка.

S I S U K O R D.

E E S S Õ N A .

Ülesannete kogu sisaldab näiteid ja ülesandeid matemaatilise analüüsi alalt diferentsiaalarvutuse ulatuses ja on mõeldud matemaatilise analüüsi praktikumi läbiviimiseks prof. G.Kangro õpiku "Matemaatiline analüüs "I järgi TRÜ matemaatika- ja füüsikaosakonna esimesel kursusel sügissemestril.

Ülesannete kogu igas osas on antud lühike teoreetiline sissejuhatus, kus on ära toodud põhilised mõisted, valemid ja teoreemid, mida läheb vaja vastava osa ülesannete lahendamisel. Samuti on toodud rohkesti näiteid tüüpiliste lahendusvõtete rakendamise kohta. See teeb ülesannete kogu kaunis sõltumatuks matemaatilise analüüsi kursuse õpikutest, võimaldab ülesannete kogu kasutada ka iseseisvalt õppijail ja teistes õppeasutustes, kus matemaatilise analüüsi programmid on väiksema ulatusega.

Ülesannete kogu üksikud peatükid on koostanud järgmised autorid: I peatükk - E.Reimers, II peatükk - T.Sõrmus, III peatükk - S.Baron, IV peatükk - E.Reimers ja M.Tõnnov, V peatükk - E.Reimers, S.Baron ja T.Sõrmus, VI peatükk - E.Jürimäe.

Kõigile arvutusülesannetele on antud vastused. Tärnikesega (*) märgitud ülesannetele on vastustes antud kas lahendust põhjendav märkus, juhised lahendamiseks või on ära toodud kogu lahendus.

Toimetaja.

Kreeka tähestik.

Α α – alfa	Ν ν – nüü
Β β – beeta	Ξ ξ – ksii
Γ γ – gamma	Ο ο – omikron
Δ δ – delta	Π π – pii
Ε ε – epsilon	Ρ ρ – roo
Ζ ζ – dzeeta	Σ σ – sigma
Η η – eeta	Τ τ – tau
Θ ϑ – teeta	Φ φ – fii
Ι ι – joota	Χ χ – hii
Κ ϰ – kapa	Υ υ – ypsilon
Λ λ – lambda	Ψ ψ – psii
Μ μ – müü	Ω ω – oomega

I. SISSEJUHATUS ANALÜÜSI.

§ 1. Summa sümbol.

Järjestikuliste indeksitega suuruste $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ summa kirjutatakse üles summa sümboli $\sum$ (kreeka täht "sigma", vastab ladina tähele "s") abil lühidalt järgmiselt:

$$(1) \qquad a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = \sum_{i=k}^{n} a_i,$$

kus sümboli $\sum$ all ja peal olevad indeksid k ja n näitavad vastavalt summa esimese ja viimase liikme indeksit. Sümboli järel kirjutatakse avaldis, millest saame summa kõik liikmed, andes summeerimisindeksile (milleks võrduses (1) on täht "i") vastavad väärtused. Tõepoolest, $i = k$ korral saame summa esimese liikme a_k, $i = k + 1$ korral saame teise liikme a_{k+1} jne., kuni $i = n$ korral saame summa viimase liikme a_n.

Näide 1. Kirjutame sümboli $\sum$ abil summa

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4.$$

Olgu summeerimisindeksiks täht j, siis summa liikmed saame näiteks avaldisest 2^j, kui $j = 0,1,2,3,4$. Seega

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = \sum_{j=0}^{4} 2^j.$$

Sama summa liikmed saame näiteks ka avaldisest 2^{m-2}, kui $m = 2,3,4,5,6$. Seega ka

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = \sum_{m=2}^{6} 2^{m-2}.$$

Võib leida ka veel teisi kirjutisi antud summale sümboli $\sum$ abil.

Näide 2. Kirjutame summa sümboli abil summa

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7.$$

Selle summa liikmed saame näiteks avaldisest $(-1)^{k+1}k$, kui $k = 1,2,\ldots,7$. Seega

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1}k.$$

Ülesanded.

Kirjutada sümboli $\sum$ abil järgmised summad.

1. $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$.
2. $b_0 + b_1 + \ldots + b_m$.
3. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.
4. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$.
5. $1 - 4 + 9 - 16 + 25$.
6. $1 + q + q^2 + \ldots + q^k$.
7. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.
8. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}$.
9. $20 + 8 + 1 + 2 + 4 + 16$.
10. $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + 7$.
11. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{4}{x^3+9} + \frac{8}{x^4+16} + \frac{16}{x^5+25}$.
12. $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$.
13. $(a + b)^n$.

Märkus. Viimase ülesande 13 lahendamisel kasutada Newtoni binoomvalemit.

Kirjutada ilma summa sümbolita järgmised avaldised.

14. $\sum_{k=1}^{6} b_k$.

15. $\sum_{j=5}^{10} 3^j$.

16. $\sum_{i=0}^{4} (2 + i)$.

17. $\sum_{s=0}^{3} a_{s+1}$.

18. $\sum_{k=2}^{n} \sqrt[k]{2}$.

19. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \log k$.

20. $\sum_{n=1}^{1} (-1)^n 5^n$.

21. $\sum_{k=\ell}^{m} \frac{(a + k)^k}{k + 1}$.

22. $\sum_{k=0}^{5} 1$.

23. Tõestada järgmised summa sümboli omadused:

a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$;

b) $\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$, kus $1 \leq k < n$;

c) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$, kus c = const;

d) $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$;

e) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$;

f) $\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right)$.

Märkus. Viimase omaduse f) tõestamisel kasutada omadust c).

Lihtsustada järgmised avaldised.

24. $\sum_{i=2}^{n} \frac{i - 1}{i^2} + \frac{n}{(n + 1)^2}$.

25. $\sum_{i=1}^{n} \sin^2 i + \sum_{i=3}^{n+2} \cos^2(i-2).$

26. $\sum_{i=0}^{n-4}(1+\cos i) - 2\sum_{k=4}^{n} \cos^2 \frac{k-4}{2}.$

27. $\sum_{i=1}^{4} 1 + \sum_{k=5}^{5} k + 3\sum_{k=2}^{4} (-1)^k.$

28. $-\sum_{i=1}^{3}(1^2+2^2+\ldots+i^2).$

29. $\sum_{i=0}^{3} 2(i+t)$ (t on suvaline arv).

30. $\sum_{t=0}^{n+1} 2^t - \sum_{j=-v}^{n-v} 2^{j+v}$ (v on suvaline täisarv).

§ 2. Reaalarvu absoluutväärtus ja radikaalid.

Reaalarvu a absoluutväärtuseks nimetatakse arvu $|a|$, mis rahuldab tingimust

(2) $$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{kui } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Ülesanded.

31. Tõestada järgmised reaalarvu absoluutväärtuse omadused:

1) $|a| \geqslant 0$,
2) $|-a| = |a|$,
3) $a \leqslant |a|$,
4) $-a \leqslant |a|$,
5) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$,
6) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|$,
7) $|ab| = |a|\,|b|$,
8) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

32. Näidata, et järgmiste võrratuste paarid on samaväärsed:

1) $|a| < b$ ja $-b < a < b$ (kus $b > 0$),

2) $|a| \leq b$ ja $-b \leq a \leq b$ (kus $b \geq 0$).

Arvu ξ nimetatakse reaalarvu a n-astme juureks, kui $\xi^n = a$. Naturaalse n korral kehtivad järgmised väited:

1° Kui n on paarisarv ja $a > 0$, siis eksisteerib kaks reaalarvu ξ_1 ja ξ_2, mis osutuvad arvu a n-astme juurteks. Need arvud on absoluutväärtuselt võrdsed ja erinevate märkidega, s.t. $\xi_1 = -\xi_2$. Näiteks, kui $a=4$, siis 2-astme juurteks (ruutjuurteks) on arvud 2 ja -2. Paarisarvulise n korral arvul $a < 0$ juuri ~~ei ole~~.

2° Kui n on paaritu arv, siis igal arvul a eksisteerib vaid üks n-astme juur ξ, kusjuures $a > 0$ korral on $\xi > 0$ ja $a < 0$ korral on $\xi < 0$. Näiteks arvu $a = 8$ korral on 3-astme juureks (kuupjuureks) arv $\xi = 2$ ja $a = -8$ korral on 3-astme juureks arv $\xi = -2$.

Arvu $a = 0$ juureks on $\xi = 0$.

Sümboliga $\sqrt[n]{a}$ tähistatakse

1) paarisarvulise n korral arvu a seda n-astme juurt ξ, mis on mittenegatiivne (s.t. $\xi \geq 0$),

2) paarituarvulise n korral arvu a ainsat juurt ξ.

Seega võime definitsiooni põhjal kirjutada:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{kui } n \text{ on paarisarv,} \\ a, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv.} \end{cases}}$$

Erijuhul, kui $n = 2$, kirjutatakse

(3) $$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Sümbolit $\sqrt[n]{}$ nimetatakse <u>radikaaliks</u>.

Näiteks võrrandi $x^2 = 9$ lahendamisel saame $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, sest valemi (3) järgi on $\sqrt{9} = 3$.

<u>Näide 1</u>. Juurime radikaali $\sqrt{x^2y}$. Saame võrduste (3) ja (2) põhjal

$$\sqrt{x^2y} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{y} = |x|\,\sqrt{y} = \begin{cases} x\sqrt{y}, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x\sqrt{y}, & \text{kui } x \leq 0. \end{cases}$$

<u>Näide 2</u>. Viime avaldises $x\sqrt{y}$ arvu x juuremärgi alla. Saame

$$x\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{x^2y}, & \text{kui } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^2y}, & \text{kui } x \leq 0. \end{cases}$$

<u>Ülesanded</u>.

Juurida järgmised radikaalid.

33. $\sqrt{(x-2)^2y}$.

34. $(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{(a-b)^2}}$.

35. $\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)^2}$.

36*. $\sqrt{(x-1)(x-x^2-1)^2}$.

37*. $\sqrt{50x^3y^3}$.

38. $x + \sqrt{(x-1)^2}$.

39. $\sqrt[4]{(x^2-4x+4)^2}$.

40. $\sqrt{a^3x} + \sqrt{ax^3} - x\sqrt{16ax} + 3a\sqrt{9ax}$.

Järgmistes avaldistes viia radikaali ees olev kordaja juuremärgi alla.

41. $x\sqrt{2}$.

42*. $(1-m)\sqrt{m-2}$.

43*. $(3 - x)\sqrt{\dfrac{x + 3}{x - 3}}$.

47. $x^3\sqrt{y - 2}$.

44. $(x^2 - 1)\sqrt{\dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}}$.

48. $|x^2 - 2|\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 2}}$.

45. $(x^2 + x + 1)\sqrt{5}$.

49. $(y^2 - 1)\sqrt{y - 10}$.

46. $x\sqrt{x - 1}$.

50. $z\sqrt{1 - z^2}$.

§ 3. Matemaatilise induktsiooni meetod.

Olgu antud seeria mingeid väiteid $V_n (n = k, k + 1, \ldots)$

Matemaatilise induktsiooni meetod ütleb, et antud seerias iga väide V_n on õige, kui

1° V_k on õige, s.t. seerias esimene väide on õige;

2° $V_n \rightarrow V_{n+1}$, s.t. oletusest, et suvaline väide V_n on õige, järeldub, et järgnev väide V_{n+1} on õige.

Tingimust 1° nimetatakse induktsiooni baasiks ja tingimust 2° implikatsiooniks.

Sageli ülesannete lahendamisel matemaatilise induktsiooni meetodi abil tuleb eelnevalt püstitada väidete seeria, lähtudes ülesande sisust.

Näide 1. Leida summa

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Lahendus. Arvutades selle summa juhtudel $n = 1,2,3$, saa-

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = S_1 + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = S_2 + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}.$$

Saadud erijuhtude põhjal võime teha oletuse, et

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

iga $n = 1,2,3,\dots$ korral. Tehtud oletuse (väite) õigsuse kontrollimiseks kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit. Väiteks V_n $(n = 1,2,\dots)$ on meil oletus, et $S_n = \frac{n}{n+1}$. Kontrollime, kas induktsiooni baas ja implikatsioon on õiged.

1° Esimene väide V_1 on õige. Seega on induktsiooni baas õige.

2° Oletame, et väide V_n, s.t. $S_n = \frac{n}{n+1}$, on õige suvalise n korral. Siis

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Saime väite V_{n+1}. Seega suvalise n korral $V_n \longrightarrow V_{n+1}$, s.t. implikatsioon on õige.

Matemaatilise induktsiooni meetodi põhjal võime öelda, et tehtud oletus on õige. Seega iga $n = 1,2,\dots$ korral on

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Ülesanded.

51. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

52. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

53. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

54. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$.

55. $1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

56. $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

Leida järgmised summad S_n.

57. $S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$.

58. $S_n = 2 + 4 + \ldots + 2n$.

59. $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

60. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, kus $a_k = a_1 + (k - 1)d$.

Tõestada järgmised võrdused (kus $n = 0,1,2,\ldots$).

61. $\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right] : 9 =$ naturaalarv.

62. $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i\sin \frac{n\pi}{4}\right)$.

63. $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos \frac{n\pi}{6} - i\sin \frac{n\pi}{6}\right)$.

64. $\cos x \cos 2x \cos 4x \ldots \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$.

65. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i\sin nx.$

Tõestada järgmised võrratused.

66. a) $2^n > 2n + 1 \quad (n = 3,4,\ldots);$

b) $2^n > n^2 \quad (n = 5,6,\ldots).$

67. $(1 + x)^n > 1 + nx$, kui $x > -1$, $x \neq 0$, $n = 2,3,\ldots$,

68. $|\sin nx| \leq n\,|\sin x| \quad (n = 0,1,\ldots).$

§ 4. Absoluutväärtustega esimese astme võrratused.

Vaatleme esimese astme võrratusi, kus tundmatu x esineb avaldistes kujuga $|ax + b|$, näit.

$$|x - 1| + x > |2x + 1|.$$

Selliste võrratuste lahendamiseks toimime järgmiselt.

1° Leiame x väärtused, mille puhul absoluutväärtuse märkide vahel olevad avaldised saavad võrdseks nulliga.

2° Jaotame leitud x väärtuste abil x-telje osadeks.

3° Lahendame võrratuse x-telje iga saadud osa kohta eraldi, kõrvaldades igal osal absoluutväärtused absoluutväärtuse definitsiooni abil (vt. § 2). Tulemuseks saame osavastused V_1, V_2, ... , millest igaüks annab võrratuse lahendid x-telje vastava osa kohta.

4° Ühendame saadud osavastused V_1, V_2, ... kokku üldvastuseks V.

Näide 1. Lahendada võrratus

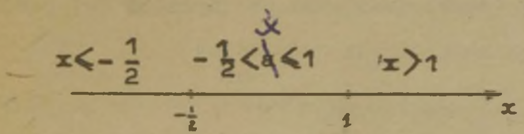
$$|x - 1| + x > |2x + 1|. \tag{4}$$

Lahendus.

1° Leiame absoluutväärtuste nullkohad:

$$x - 1 = 0, \qquad 2x + 1 = 0,$$
$$x = 1, \qquad x = -\frac{1}{2}.$$

2° Jaotame x-telje osadeks saadud punktidega $x = 1$ ja $x = -\frac{1}{2}$ (vt. joon.1).



Joon.1.

3° Lahendame võrratuse (4) x-telje igal osal eraldi.

1) Kui $x < -\frac{1}{2}$, siis $|x - 1| = -(x - 1)$,

$$2x + 1 = -(2x + 1),$$

seega võime võrratuse (4) kirjutada kujul

$$-(x - 1) + x > -(2x + 1),$$
$$-x + 1 + x > -2x - 1,$$
$$2x > -2,$$
$$x > -1. \qquad x \leq -\frac{1}{2}$$

Näeme, et x-telje vaadeldaval osal on võrratus (4) rahuldatud, kui $-1 < x < -\frac{1}{2}$. Seega oleme saanud esimese osavastuse

$$\underline{V_1 : x \in (-1, -\frac{1}{2}]}.$$

2) Kui $-\frac{1}{2} < x \leq 1$, siis $|x - 1| = -(x - 1)$, $|2x + 1| = 2x + 1$.

Seega

$$-(x - 1) + x > 2x + 1,$$
$$1 > 2x + 1,$$
$$0 > 2x,$$
$$x < 0.$$

Näeme, et x-telje vaadeldaval osal on võrratus (4) rahuldatud, kui $x < 0$. Seega saime teise osavastuse

$$\underline{V_2 : x \in (-\frac{1}{2}, 0).}$$

3) Kui $x > 1$, siis $|x - 1| = x - 1$, $|2x + 1| = 2x + 1$ ja

$$(x - 1) + x > 2x + 1,$$
$$2x - 1 > 2x + 1,$$
$$-1 > 1.$$

Tulemuseks saime vastuolu. Seega saime kolmanda osavastuse

V_3 : x-telje osal $(1, \infty)$ võrratusel (4) lahendeid ei ole.

4° Kirjutame osavastuste põhjal üldvastuse

$$\underline{V : x \in (-1, 0)}.$$

Seega võrratuse (4) lahenditeks on vahemiku $(-1, 0)$ punktid.

Näide 2. Lahendada võrratus

(5) $$\left|\frac{1 - x}{x + 1}\right| \geq 1.$$

Lahendus. Näeme, et kohal $x = -1$ kaotab võrratus mõtte, s.t. $x = 1$ ei saa olla võrratuse lahendiks. Seepärast eeldame, et $x \neq -1$. Absoluutväärtuse omaduse 8 põhjal (vt. § 3) võime kirjutada võrratuse (5) kujul

$$\frac{|1 - x|}{|x + 1|} \geqslant 1. \tag{6}$$

Korrutame võrratuse (6) mõlemaid pooli positiivse suurusega $|x + 1|$ (meil ju $x \neq -1$). Saame võrratuse kujul

$$\begin{cases} |1 - x| \geqslant |x + 1|, \\ x \neq -1. \end{cases} \tag{7}$$

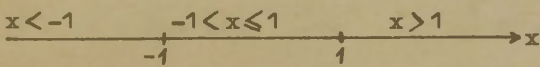
Edasine võrratuse (7) lahenduskäik on analoogiline eelmise näitega 1.

1° Leiame absoluutväärtuste nullkohad:

$$x - 1 = 0 \qquad x + 1 = 0$$

$$x = 1, \qquad x = -1.$$

2° Jaotame x-telje osadeks saadud punktidega $x = 1$, $x = -1$. (Vt. joon. 2).



Joon.2.

Saadud jaotustest jätame välja punkti $x = -1$, mis, nagu eespool nägime, ei ole võrratuse lahendiks.

3° Lahendame võrratuse (7) arvtelje igal osal eraldi:

1) kui $x < -1$,

siis $-(x-1) > -(x+1)$,

$1-x > -x-1$,

$1 > -1$.

Seega iga $x < -1$ rahuldab võrratust.

V_1: $x \in (-\infty, -1)$.

2) kui $-1 < x \leq 1$,

siis $-(x-1) > x+1$,

$1-x > x+1$,

$-2x > 0$,

$x < 0$.

V_2: $x \in (-1, 0]$.

3) kui $x > 1$,

siis $x-1 > x+1$

$-1 > 1$

Seega vastuolu.

V_3: piirkonnas $(1, \infty)$ lahendeid pole.

4° Kirjutame osavastuste põhjal üldvastuse

V: $x \in \{(-\infty, -1), (-1, 0]\}$.

Seega võrratuse (5) lahendiks on iga x, mis asub vahemikus $(-\infty, -1)$ või poollõigul $(-1, 0]$.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrratused.

69. $|x - 1| < |x + 1|$.

70. $|2x - 1| \leq |x - 1|$.

71. $|x| > |x + 1|$.

72. $2|x + 1| > 3x - |x + 2|$.

73. $|x + 1| < 0{,}01$.

74. $|x| > x$.

75. $|x + 2| - |x - 2| \leq x$.

76. $|x - 3| - |2 - x| > |x - 1|$.

77. $\left|\dfrac{x - 3}{1 - x}\right| > 1$.

78. $\left|\dfrac{2x - 1}{x - 1}\right| > 2$.

79. $1 - \dfrac{2|x|}{|x + 2|} < 0$.

80. $\dfrac{10}{|x - 2|} < \dfrac{20}{|x - 1|}$.

81. $4x - 3|x - 1| > 1 + |1 - 3x|$.

82. $5x - 2|3 - x| \leq 2 - |3x - 1|$.

83. $\left|\frac{5x - 3}{4x + 7}\right| < 3$.

84. $\left|\frac{2x - 5}{2 - 5x}\right| \geq 3$.

§ 5. Kõrgema astme võrratused.

Vaatleme võrratusi, mis sisaldavad ruutavaldisi, kuupavaldisi ja kõrgema astme avaldisi tundmatu x suhtes, kusjuures võrratuses võivad esineda ka absoluutväärtustega liikmed, näit.

$$x^2 - 2|x + 2| - 4 \leq 0.$$

Ruutvõrratuste (mõnikord ka kõrgema astme võrratuste) lahendamisel on sobiv kasutada näidetes 1 ja 2 antud meetodeid.

Näide 1. Lahendada võrratus

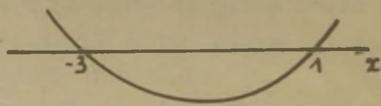
$$x^2 + 2x - 3 < 0. \tag{8}$$

Lahendus. Muudame võrratuse (8) vasaku poole täisruuduks. Selleks liidame võrratuse mõlemale poolele 4, saame

$$x^2 + 2x + 1 < 4,$$
$$(x + 1)^2 < 4,$$
$$|x + 1| < 2,$$
$$-2 < x + 1 < 2,$$
$$-3 < x < 1.$$

Seega võrratuse lahenditeks on $x \in (-3, 1)$.

Lahendame võrratuse (8) veel teise nn. graafilise meetodiga. Selleks leiame võrratuse (8) vasaku poole nullkohad, see on kohad, kus $x^2 + 2x - 3 = 0$. Need on $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Et ruutpolünoomi $x^2 + 2x - 3$ pealiikme kordaja on positiivne, siis vastava ruutparabooli $y = x^2 + 2x - 3$ graafik asetseb allpool x-telge ($y < 0$) selle polünoomi nullkohtade vahel (vt. joon. 3).



Joon. 3.

Võrratuse (8) lahenditeks on parajasti need punktid, kus $y < 0$, s.t. $x \in (-3, 1)$.

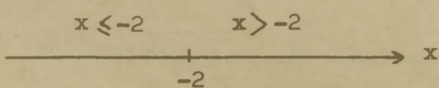
Näide 2. Lahendada võrratus

(9) $\quad x^2 - 2|x + 2| - 4 \leq 0.$

Lahendus. Leiame nagu esimese astme võrratuste korral absoluutväärtuste nullkohad. Saame

$$x + 2 = 0 \quad \text{ehk} \quad x = -2.$$

Kanname leitud nullkohad x-teljele, mille tulemusena x-telg jaotub osadeks (vt. joon.4).



Joon.4.

Lahendame võrratuse x-telje igal saadud osal eraldi.

1) Kui $x \leqslant -2$, siis $|x + 2| = -(x + 2)$. Selles piirkonnas esitub võrratus (9) kujul

$-x-2$

$$x^2 - 2[-(x + 2)] - 4 \leqslant 0$$

$x^2 + 2x + 2 - 4$

ehk

$$x^2 + 2x \leqslant 0,$$

mille lahendamine annab $-2 \leqslant x \leqslant 0$. Et aga x-telje vaadeldaval osal on $x \leqslant -2$, siis võrratuse lahenditeks x-telje sel osal sobib vaid $x = -2$. Seega osavastus

$$\underline{V_1 : x = -2.}$$

2) kui $x > -2$, siis $|x + 2| = x + 2$, seega sel korral esitub võrratus (9) järgmiselt:

$$x^2 - 2(x + 2) - 4 \leqslant 0$$

ehk

$$x^2 - 2x - 8 \leqslant 0.$$

Viimase võrratuse lahenditeks on $x \in [-2,4]$, s.t. $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Et x-telje vaadeldaval osal $x > -2$, siis vastavaks osavastuseks on

$$V_2 : x \in (-2,4] .$$

Osavastuste V_1 ja V_2 põhjal saame üldvastuse

$$\underline{V: x \in [-2,4].}$$

Seega võrratuse (9) lahenditeks on lõigu $[-2, 4]$ punktid.

Ülesanded.

Lahendada järgmised ruutvõrratused.

85. $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0.$

86. $x^2 + 2x + 2 > 0.$

87. $x^2 - |x| - 6 < 0.$

88. $x^2 - 6|x - 1| + 11 \geqslant 0.$

89. $x^2 - |4x - 5| > x - 1.$

90. $2x^2 + |3x - 2| > x + 2.$

91. $x^2 + 2x + 3|x + 1| > -3.$

92. $2|2x + 3| + 2x + 3 > -x^2.$

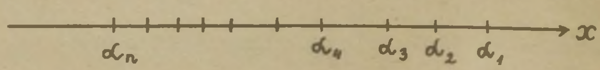
93. $|5x + 3| > x^2 + 2x + 3.$

94. $|5x + 7| < x^2 + 2x + 3.$

Üldiselt kõrgema astme võrratuste lahendamine taandub polünoomi

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \tag{10}$$

kus $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$, märgi hindamisele. Seda teeme järgmiselt. Polünoomi $p(x)$ avaldisest näeme, et $p(x) = 0$ vaid sel juhul, kui $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, ... Kanname need nullkohad x-teljele, millega ta jaotub osadeks (vt. joon.5).

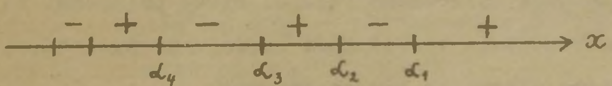


Joon. 5.

Seejärel uurime polünoomi $p(x)$ tegurite märke x-telje igal saadud osal eraldi. Tulemuse võime ülevaatlikult esitada järgmise tabelina.

Tegurid \ Piirkond	$x > \alpha_1$	$\alpha_2 < x < \alpha_1$	$\alpha_3 < x < \alpha_2$	$\alpha_4 < x < \alpha_3$	...
$x - \alpha_1$	+	-	-	-	
$x - \alpha_2$	+	+	-	-	
$x - \alpha_3$	+	+	+		
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
$p(x)$	+	-	+	-	

Tabelist näeme, et x-telje kõige parempoolses osas, kus $x > \alpha_1$, on polünoomi (10) kõik tegurid alati positiivsed ja seega polünoom (10) on x-telje selles osas alati positiivne (s.t. + -märgiga). Aga x-telje järgmises osas $\alpha_2 < x < \alpha_1$ on esimene tegur $x - \alpha_1$ juba negatiivne, kuid ülejäänud tegurid on endiselt positiivsed. Seega polünoom (10) on x-telje selles osas alati negatiivne (s.t. - -märgiga). Analoogiliselt edasi minnes saame, et polünoom (10) muudab oma märki vaheldumisi igal osal, nagu näidatud tabeli viimases reas. Tähendab, polünoomi (10) jaoks kehtib alati niisugune seaduspärasus märkide vaheldumises (vt. joon.6).



Joon. 6.

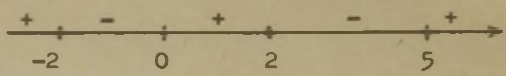
Joonise 6 põhjal võime välja kirjutada piirkonnad, kus $p(x) > 0$ või kus $p(x) < 0$.

Näide 3. Leida piirkond, kus polünoom

$$p(x) = (x - 5)(x - 2)x(x + 2)$$

on positiivne ja piirkond, kus ta on negatiivne. Samuti leida piirkond, kus $p(x) \geq 0$ ja kus $p(x) \leq 0$.

Lahendus. Kanname polünoomi nullkohad $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -2$ x-teljele. Tekkinud osapiirkondade kohale märgime samasuguse märkide vaheldumise seaduspärasuse, nagu on joonisel 6. Saame joonise 7.



Joon. 7.

Joonise põhjal võime kirjutada, et

$p(x) > 0$, kui $x \in \{(-\infty, -2), (0, 2), (5, \infty)\}$;

$p(x) < 0$, kui $x \in \{(-2, 0), (2, 5)\}$.

Et $p(x) = 0$, kui $x = 5$, $x = 2$, $x = 0$, $x = -2$, siis

$p(x) \geq 0$, kui $x \in \{(-\infty, -2], [0, 2], [5, \infty)\}$;

$p(x) \leq 0$, kui $x \in \{[-2, 0], [2, 5]\}$.

Näide 4. Lahendada võrratus

$$(11) \quad 2x(x + 1)(3 - x)(x - 5)^2 < 0.$$

Lahendus. Teisendame vasakul oleva polünoomi kujule (10). Selleks kustutame võrratusest kordaja 2. Kuna $3-x = -(x-3)$, siis saame võrratuse kirjutada kujul

$$-x(x+1)(x-3)(x-5)^2<0$$

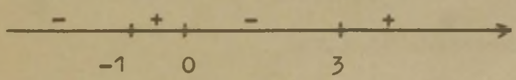
ehk

$$x(x+1)(x-3)(x-5)^2>0.$$

Ruutteguri $(x-5)^2$ nullkoht on $x = 5$, mis ei ole lahend. Seega võime eeldada, et võrratuses on $x \neq 5$ ja siis on $(x-5)^2>0$. See tegur ei mõjuta polünoomi märki ja me võime ta võrratusest ära jätta. Tulemuseks saame lähtevõrratusega (11) samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} x(x+1)(x-3)>0, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Selles süsteemis on polünoom juba kujul (10). Jääb leida piirkond, kus $p(x) = x(x+1)(x-3)$ on + märgiga. Selleks teeme joonise 8.



Joon.8.

Jooniselt 8 näeme, et $p(x)>0$, kui $x \in \{(-1, 0), (3, \infty)\}$.
Kuna meil $x \neq 5$, siis võrratuse (11) lahenditeks on $x \in \{(-1, 0), (3, 5), (5, \infty)\}$.

<u>Näide 5</u>. Lahendada võrratus

$$(x-1)^2(2x^2-7x+6) \leq 0. \tag{12}$$

<u>Lahendus</u>. Paneme tähele, et võrratuses ruuttegur laguneb reaalsete lineaartegurite korrutiseks:

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(x - \frac{3}{2})(x - 2).$$

Seega, jättes kordaja 2 ära, võime võrratuse (12) kirjutada kujul

$$(13) \quad (x - 1)^2(x - \frac{3}{2})(x - 2) \leqslant 0.$$

Teguri $(x-1)^2$ nullkoht $x = 1$ on võrratuse lahendiks. Ülejäänud kohtades on $(x - 1)^2 > 0$. Järelikult võime võrratusest (13) selle teguri ära jätta, kui arvestame, et lähtevõrratuse (12) lahendiks on ka $x = 1$. Selle lahendi meelespidamiseks märgime ta uue võrratuse kõrvale[1]. Seega saame võrratusest (13), et

$$(x - \frac{3}{2})(x - 2) \leqslant 0, \quad x = 1.$$

Viimase võrratuse lahenditeks on $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Järelikult

$$x \in \left\{1, \left[\frac{3}{2}, 2\right]\right\}.$$

Näide 6. Lahendada võrratus

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 2 > 0.$$

Lahendus. Lahutame vasakul oleva polünoomi reaalsete tegurite korrutiseks (näit. Horneri skeemi abil), siis saame

$$(x + 1)(x - 2)(x - 1)^2(x^2 + x + 1) > 0.$$

Et tegur $x^2 + x + 1 > 0$, siis, kustutades teda, saame samaväärse võrratuse

[1] Analoogiline olukord esineb alati paarisastmeliste tegurite ärajätmise korral, kui võrratus on mitterange, s.t. esineb ka võrduse juhtum.

$$(x + 1)(x - 2)(x - 1)^2 > 0.$$

Edasi kustutame teguri $(x - 1)^2 \geqslant 0$ (vt. näide 5) ja saame vaadeldava võrratusega samaväärse süsteemi (vt. näide 4)

$$\begin{cases} (x + 1)(x - 2) > 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

mille lahendamine annab $x \in \{(-\infty, -1), (2, \infty)\}$.

Näide 7. Lahendada võrratus

$$(x - 1)^2(x^2 - 3x + 2) \leqslant 0. \tag{14}$$

Lahendus. Et $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, siis võib võrratuse (14) kirjutada kujul

$$(x -1)^3(x - 2) \leqslant 0.$$

Viimane võrratus sisaldab paarituastmelist tegurit $(x - 1)^3$ ja on seepärast samaväärne võrratusega

$$(x - 1)(x - 2) \leqslant 0,$$

sest vaadeldaval juhul teguri $(x - 1)^2 \geqslant 0$ ärajätmisega lahend $x = 1$ ei lähe kaduma, sest säilib tegur $(x - 1)$. Võrratuse $(x - 1)(x - 2) \leqslant 0$ lahenditeks on $x \in [1, 2]$. Need ongi võrratuse (14) lahendid.

Näide 8. Lahendada võrratus

$$(x - 5)(x - 2)^3(x^2 + x + 2) > 0.$$

Lahendus. Kustutame tegurid $x^2 + x + 2 > 0$ ja $(x - 2)^2 > 0$, saame samaväärse võrratuse $(x - 2)(x - 5) > 0$, mille lahendamine annab $x \in \{(-\infty, 2), (5, \infty)\}$.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrratused.

95. $x^3 - x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

96. $x^6 - 3x^5 + 3x^3 + 3x^2 - 4 \leq 0$.

97. $x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2 < 0$.

98. $2x^3 - x^2 - 25x - 12 > 0$.

99. $x^2 + 3x^3 - x^4 - 3x < 0$.

100. $x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 7x + 3)(x^2 + x + 1) > 0$.

101. $8x^5 - 20x^4 - 30x^3 + 65x^2 - 35x + 6 \geqslant 0$.

Võrratuste

$$(15) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0, \quad (\leqslant 0),$$

kus P(x), Q(x) on polünoomid, lahendamiseks korrutatakse võrratuse pooli nimetaja ruuduga $[Q(x)]^2 \geqslant 0$, millega võrratus(15) asendub samaväärse süsteemiga

$$(16) \qquad \begin{cases} P(x)Q(x) \geqslant 0, & (\leqslant 0) \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Tingimus $Q(x) \neq 0$ tähendab, et võrratuse $P(x)Q(x) \geqslant 0$ lahendite seast tuleb välja jätta punktid x, kus $Q(x) = 0$. Analoogiliselt võib veenduda, et võrratusega

$$(17) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad (< 0)$$

on samaväärne võrratus

(18) $\qquad P(x)Q(x) > 0 \qquad (< 0).$

Näide 9. Lahendada võrratus

$$\frac{(x + 1)(x - 2)^3}{x - 1} \leq 0.$$

Lahendus. See võrratus on samaväärne järgmise süsteemiga (läheme kujult (15) üle kujule (16))

$$\begin{cases} (x + 1)(x - 2)^3(x + 1) \leq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Viimase lahendamine annab vaadeldava võrratuse lahendid $x \in \{(-\infty, -1), (1, 2)\}$.

Näide 10. Lahendada võrratus

$$\frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)^2} < 0.$$

Lahendus. Tuleb lahendada võrratus (läheme kujult (17) üle kujule (18))

$$(x - 1)(x + 3)(x + 1)^2 < 0,$$

mis on samaväärne süsteemiga (vt. näide 4)

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 3) < 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Vaadeldava võrratuse lahenditeks on $x \in \{(-3, -1), (-1, 1)\}$.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrratused.

102. $\dfrac{(x-2)(x-3)^3(x+5)(x^2+x+5)}{x-5}<0.$

103. $\dfrac{(x-2)^3(x-1)(x^2+12x+36)}{(x-8)^2(9-x)}>0.$

104. $\dfrac{(x-1)(x+5)(x^2+2x+100)}{(x+8)^2}\geq 0.$

105. $\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-2x^2-4x+8}<0.$

106. $\dfrac{(x-9)(3-x)(5-x)^2}{(x-4)^2(x-10)^2}>0.$

§ 6. Arvhulkade rajad.

Olgu $X=\{x\}$ mingi reaalarvude hulk. Kui leidub reaalarv M, et iga $x\in X$ korral kehtib võrratus $x\leq M$, siis arvu M nimetatakse hulga X ülemiseks tõkkeks. Analoogiliselt defineeritakse hulga X alumine tõke. Hulga X väikseimat ülemist tõket nimetatakse hulga X ülemiseks rajaks ja suurimat alumist tõket alumiseks rajaks. Hulga X ülemist raja märgitakse sümboliga $\sup X$ ehk $\sup x$, alumist raja sümboliga $\inf X$ ehk $\inf x$. Arvhulkade rajade määramiseks kasutatakse järgmisi teoreeme.

I. Arv M on hulga $X=\{x\}$ ülemiseks rajaks $(M=\sup X)$ parajasti siis, kui

1) iga $x\in X$ korral on $x\leq M$;

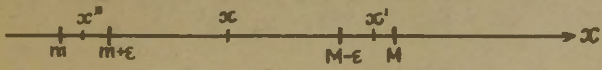
2) iga $\varepsilon>0$ korral leidub niisugune $x'\in X$, et $x'>M-\varepsilon$

(vt. joon.9).

II. Arv m on hulga $X = \{x\}$ alumiseks rajaks ($m = \inf X$) parajasti siis, kui

1) iga $x \in X$ korral on $x \geq m$;

2) iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $x'' \in X$, et $x'' < m + \varepsilon$ (vt. joon.9).



Joon.9.

Kui $X = (a,b)$, siis $\sup(a,b) = b$, $\inf(a,b) = a$. Lõpliku hulga $X = \{n\}$, kus $n = 1,2,3,4,5$, korral on $\sup X = 5$, $\inf X = 1$. Kui hulgal X ülemine raja puudub, siis kirjutatakse $\sup X = \infty$ ja kui puudub alumine raja, siis $\inf X = -\infty$.

Ülesanded.

Järgmistes hulkades (kus $n = 1,2,\ldots$) leida suurim ja vähim element.

107. $\left\{\frac{n-2}{n^2+1}\right\}$.

108. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

109. $\left\{n^2 - 3n + 10\right\}$.

110. $\left\{(-1)^n n\right\}$.

Järgmistes hulkades X leida suurim ja vähim element ning $\sup X$ ja $\inf X$.

111. $X = (1, 3]$.

112. $X = \{0, (1, 3)\}$.

113. $X = \{(0, 1), (1, 2), (3, 4)\}$.

114. $X = [-1, \infty)$.

115. $X = (-\infty, \infty)$. 116. $X = \{0, 1\}$.

Järgmistes hulkades $X = \{x_n\}$, kus $n = 1,2,\ldots,$ leida $\sup x_n$ ja $\inf x_n$.

117. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

118. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

119. $x_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$.

120. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

121. $x_n = (-1)^n n$.

122. $x_n = -n[2 + (-1)^n]$.

123. $x_n = n^{(-1)^n}$.

124. $x_n = \frac{1}{n - 10,2}$.

125*. Olgu $\{-x\}$ hulk, mis koosneb arvude $x \in \{x\}$ vastandarvudest. Tõestada, et

a) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$;

b) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

126*. Olgu $\{x + y\}$ kõigi summade $x + y$ hulk, kus $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$. Tõestada, et

a) $\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

b) $\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

127. Olgu $\{xy\}$ kõigi korrutiste xy hulk, kus $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$ ja $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Tõestada, et

a) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \inf\{y\}$;

b) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \sup\{y\}$.

II. FUNKTSIOONID.

§ 1. Funktsiooni mõiste.

Olgu $X = \{x\}$ mingi reaalarvude hulk.

Funktsiooni definitsioon. Kui muutuja x igale väärtusele hulgas X vastab muutuja y kindel väärtus, siis öeldakse, et y on muutuja x funktsioon hulgas X ja tähistatakse sümboliga $y = f(x)$ (või $y = F(x)$, $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ jne.).

Muutujat x nimetatakse funktsiooni y argumendiks ehk sõltumatuks muutujaks. Hulka X nimetatakse funktsiooni y määramispiirkonnaks. Funktsiooni $y = f(x)$ väärtuste hulka $Y = \{y\}$ nimetatakse funktsiooni muutumispiirkonnaks.

Vastavalt definitsioonile on funktsioon antud, kui on teada:

a) funktsiooni määramispiirkond X,

b) eeskiri, mis seab argumendi x igale väärtusele hulgas X vastavusse funktsiooni y väärtuse.

Kui valemi abil (ehk analüütiliselt) antud funktsiooni korral määramispiirkond X ei ole fikseeritud, siis tuleb selle all mõista argumendi väärtuste niisugust hulka, mille puhul funktsiooni analüütiline esitus määrab funktsiooni väärtuse. Järgnevas on esitatud mõnede lihtsamate funktsioonide määramispiirkonnad X ja muutumispiirkonnad Y, mida kasutatakse mitmesuguste funktsioonide määramispiirkonna leidmisel:

1) $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$: $X = (-\infty, \infty)$, $Y = (0, \infty)$;

2) $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$: $X = (0, \infty)$, $Y = (-\infty, \infty)$;

3) $y = \sqrt{x}$: $X = Y = [0, \infty)$;

4) $y = x^\alpha$: kui $\alpha = \frac{m}{2n+1}$ (m ja n täisarvud), siis

$$X = \begin{cases} (-\infty, \infty), & \text{kui } \alpha > 0, \\ \{(-\infty, 0), (0, \infty)\}, & \text{kui } \alpha < 0; \end{cases}$$

kui $\alpha \neq \frac{m}{2n+1}$ (m ja n täisarvud), siis

$$X = Y = \begin{cases} [0, \infty), & \text{kui } \alpha > 0, \\ (0, \infty), & \text{kui } \alpha < 0; \end{cases}$$

5) $y = \sin x$, $y = \cos x$: $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [-1, +1]$;

6) $y = \tan x$: $X = \{x:\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,
$Y = (-\infty, \infty)$;

7) $y = \cot x$: $X = \{x:\ x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $Y = (-\infty, \infty)$;

8) $y = \arcsin x$: $X = [-1, 1]$, $Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

9) $y = \arccos x$: $X = [-1, 1]$, $Y = [0, \pi]$;

10) $y = \arctan x$: $X = (-\infty, \infty)$, $Y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

11) $y = \operatorname{arccot} x$: $X = (-\infty, \infty)$, $Y = (0, \pi)$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ määramispiirkonna. Funktsiooni avaldisest näeme, et peab kehtima võrratus

$$x^2 - x \geqslant 0,$$

sest ruutjuur eksisteerib vaid mittenegatiivsete arvude korral. Viimase võrratuse lahenditeks on $x \in \{(-\infty, 0), (1, \infty)\}$. Seega hulk $X = \{(-\infty, 0), (1, \infty)\}$ ongi funktsiooni $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ määramispiirkonnaks.

Näide 2. Leiame funktsiooni

$$(1) \quad f(x) = \arcsin \frac{2x - 3}{5} - \frac{1}{x^2 - 1}$$

määramispiirkonna.

Funktsiooni avaldises on esimene liidetav määratud, kui $\left|\frac{2x-3}{5}\right| \leqslant 1$ ja teine liidetav, kui $x^2 - 1 \neq 0$. Et funktsioon $f(x)$ osutub määratuks vaid seal, kus mõlemad liidetavad on üheaegselt määratud, siis tuleb lahendada süsteem

$$\begin{cases} \left|\dfrac{2x - 3}{5}\right| \leqslant 1, \\ x^2 - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Süsteemi lahenditeks on $x \in \{(-1, 1), (1, 4]\}$.

Seega funktsiooni (1) määramispiirkonnaks on hulk $X = \{(-1, 1), (1, 4]\}$.

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

128. $y = \sqrt[3]{x + 1}$.

129. $y = \dfrac{1}{4 - x^2} + 2^{x-1}$.

130. $y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$.

131. $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$.

132. $y = \sqrt{(x - x^3)(x + 3)(x - \pi)}.$

133. $y = \log \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}.$

134. $y = \arccos \dfrac{2x}{1 + x}.$

135. $y = \arcsin(\log \dfrac{x}{10}).$

136. $y = \dfrac{1}{\log(1 - x)} + \sqrt{x + 2}.$

137. $y = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}} + \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}.$

138. $y = (2x)!.$

139. $y = \log[\cos(\log x)].$

140. $y = \arcsin(\dfrac{|x + 1|}{10} + \dfrac{|x - 3|}{5}).$

141. $y = \log(x^2 + |x + 3| + 3).$

142. $y = \log_x 2.$

143. $y = \log\sin x.$

144. $y = \sqrt{\log \cos x}.$

145. $y = \log(\arccos x - \pi).$

146. $y = \sqrt{2\arctan x - 3}.$

147. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}.$

148. $y = \arcsin \dfrac{x - 3}{2} - \log(4 - |x|).$

149. $y = \log(x - |x|).$

150. $y = \sqrt{1 - \log(10x)} + \log(|x| - x).$

Määrata, missugustes järgmistes paarides on funktsioonid samad ja missugustes on nad erinevad.

151. $f(x) = \dfrac{x}{x^2}$ ja $g(x) = \dfrac{1}{x}.$

152. $f(x) = x$ ja $g(x) = \sqrt{x^2}.$

153. $f(x) = \log x^2$ ja $g(x) = 2\log x.$

r.ok. v.a. p.n. x

0

154. $f(x) = \log \frac{1}{x}$ ja $g(x) = -\log x$.

155. $f(x) = \log x^2$ ja $g(x) = 2\log |x|$.

156. $f(x) = \arctan(\tan x)$ ja $g(x) = \tan(\arctan x)$.

157. $f(x) = \log \dfrac{x}{x+1}$ ja $g(x) = \log|x| - \log|x+1|$

158. $f(x) = \sin \pi x$, kus $x \in [-1,0]$ ja $g(x) = \sin \pi(-x)$, kus $x \in [0,1]$.

Näide 3. Olgu antud funktsioonid $f(x) = 10^x$ ja $g(x) = \log(x^2 - 4)$. Leida funktsioonid $f[g(x)]$, $g[2+f(x)]$ ja arvutada $g[f(1)]$.

Lahendus. Funktsiooni $f[g(x)]$ saamiseks tuleb funktsiooni $f(x)$ argumendi x asemele panna funktsiooni $g(x)$ avaldis. Saame

$$f[g(x)] = 10^{\log(x^2-4)} = x^2 - 4, \text{ kui } |x| > 2.$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} g[2+f(x)] &= g(2+10^x) = \log[(2+10^x)^2 - 4] = \\ &= \log(4 \cdot 10^x + 10^{2x}) = \log 10^x(4 + 10^x) = \\ &= x + \log(4 + 10^x). \end{aligned}$$

Lõpuks arvutame $g[f(1)]$. Saame $f(1) = 10$. Seega

$$g[f(1)] = g(10) = \log(10^2 - 4) = \log 96.$$

Ülesanded.

159. Arvutada $f(0)$, $f(0,1)$, $f(-1)$, $f(2)$ ja $f(\beta^2)$, kui

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x.$$

160. Olgu $f(x) = 2x^3 + x^2 + x^2 - 4x - 2$. Lahendada võrrand

$$f(x) = f(-\frac{1}{2}).$$

161. Arvutada $f[f(x)]$, $f[g(x)]$, $g[g(x)]$, $g[f(x)]$, kui

$$f(x) = \log x, \ g(x) = x^2.$$

162. Leida $\varphi(-x)$, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x) + 1$, $\varphi(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{\varphi(x)}$ ja $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, kui

a) $\varphi(x) = 1 - x^2$;

b) $\varphi(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$.

163. Arvutada $f(-3)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{10})$, $f(1)$ ja $f(10)$, teades, et

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x}, \text{ kui } x \in [-10, -1); \\ 2^x, \text{ kui } x \in [-1, \frac{1}{10}); \\ \arccos(\log x), \text{ kui } x \in [\frac{1}{10}, 10]. \end{cases}$$

164. On antud funktsioon

$$F(x) = \begin{cases} \sin(\pi - x), \text{ kui } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]; \\ |\tan x|, \text{ kui } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \\ 1 - \cos x, \text{ kui } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Arvutada $F(-\frac{2\pi}{3})$, $F(-\frac{\pi}{2})$, $F(-\frac{\pi}{4})$, $F(\frac{\pi}{4})$, $F(0)+\pi$, $F(\frac{\pi}{2})$ ja

$F(\pi) - \pi$.

165. Olgu $\chi(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$. Tõestada, et

$$\chi(x) + \chi(y) = \chi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

166. Olgu $\psi(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, kus $a > 0$. Tõestada, et

$$\psi(x+y) + \psi(x-y) = 2\psi(x)\,\psi(y).$$

Näide 4. Leiame funktsiooni $f(x)$, teades, et $f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2-x}{1-x}$.

Tähistame $\frac{1}{1-x} = y$, siis $x = 1 - \frac{1}{y}$ ja me saame

$$f(y) = \frac{2-(1-\frac{1}{y})}{1-(1-\frac{1}{y})} = \frac{y+1}{1} = y + 1.$$

Võttes saadud funktsioonis argumendi y asemel x, saame

$$f(x) = x + 1.$$

Lahendamiseks võib kasutada ka järgmist võtet, mis mõnikord viib kiiremini sihile. Nimelt teisendame funktsiooni avaldist nii, et $\frac{1}{1-x}$ oleks funktsiooni argumendiks. Saame

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2-x}{1-x} = \frac{1+1-x}{1-x} = \frac{1}{1-x} + 1.$$

Tähistades $y = \frac{1}{1-x}$, saame jälle $f(y) = y + 1$. Seega $f(x) = x + 1$.

Ülesanded.

Leida funktsioon $f(x)$, kui

167. $f(x+1) = x^2 - 3x + 2;$

168. $f(\frac{x}{1+x}) = \frac{3x + 2x^2}{(1 + x)^2};$

169. $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2}$, kus $x > 0;$

170. $f(1-3x) = 3(1 - 4x + 6x^2);$

171. $f(3x + \frac{\pi}{2}) = -(\frac{\pi}{2} + \sin 6x + 3x);$

172. $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$

Järgmistes ülesannetes leida funktsiooni $f(x)$ nullkohad ja määramispiirkonna osad, kus $f(x) > 0$ ja kus $f(x) < 0$.

173. $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x + 6}$. 174. $f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$.

175. $f(x) = 2^{x-1}$. 176. $f(x) = \log \left|\frac{2x - 1}{x - 1}\right|$.

177. $f(x) = \sin^2 x + 1$.

178. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3 - 27}$, kus $X = (-\frac{3}{2}, -1]$.

179. $f(x) = \frac{|2^x - 2^{-x}|}{x^2 - 9}$, kus $X = \{(-\infty, -3),(-3, 2\}$.

180. On antud funktsioonid $\varphi(x) = f(x) - f(0)$ ja $\psi(x) = f(x) - f(-1)$, kus $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Leida funktsioonide $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ nullkohad.

§ 2. Funktsioonide liike.

1. Paaris- ja paaritud funktsioonid. Kui iga x puhul määramispiirkonnas X kehtib

$$f(-x) = f(x), \tag{2}$$

siis nimetatakse funktsiooni $f(x)$ paarisfunktsiooniks, kui aga

$$(3) \qquad f(-x) = -f(x),$$

siis <u>paarituks</u>.

<u>Näide 5</u>. Näitame, et funktsioon $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2 - 1}$, kus $X = \{(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)\}$, on paarisfunktsioon. Tõepoolest, iga $x \in X$ puhul võime kirjutada

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{\sin x^2}{x^2 - 1} = f(x).$$

Seega kehtib võrdus (2), s.t. funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon.

<u>Näide 6</u>. Funktsioon $f(x) = \log(|x| + 1 + \dfrac{x^2}{x - 1})$, kus $X = \{(-\infty, 1), (1, \infty)\}$ pole ei paaris- ega paaritu funktsioon, sest mis tahes $x \in X$ korral on

$$f(-x) = \log(|-x| + 1) + \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = \log(|x| + 1) + \frac{x^2}{-x-1}$$

ja seega ei kehti kumbki võrdustest (2) ja (3).

<u>Ülesanded</u>.

Selgitada, missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid ja missugused paaritud funktsioonid.

181. $f(x) = \dfrac{3}{x} - x^3$.

182. $f(x) = \log(x^2 + \dfrac{3}{x^2} + 1)$.

183. $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^{2x} + a^{-2x})$, kus $a > 0$.

184. $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$.

185. $f(x) = \log \frac{1 + x}{1 - x}$.

186. $f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$, kus $X = [-100, 100]$.

187. $f(x) = \sin x - x \cos x$.

188. $f(x) = \sin x - \cos x$.

189. $f(x) = 1 - \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 \frac{x}{2}}$, kus $X = [-10\pi, 10\pi]$.

190. $y = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$, kus $a > 0$.

191. $y = x^2 + \sqrt{x + 1}$, kus $X = [-1, 1]$.

192. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

193. Leida analüütiline esitus funktsioonile, mis 1) on määratud piirkonnas $(-\infty, \infty)$, 2) on paarisfunktsioon ja 3) ühtib piirkonnas $[0, \infty)$ funktsiooniga $f(x) = x - 1$. Joonistada selle funktsiooni graafik.

194. Leida analüütiline esitus funktsioonile, mis 1) on defineeritud piirkonnas $(-9, 9)$, 2) on paaritu funktsioon ja 3) ühtib piirkonnas $[0, 9)$ funktsiooniga $y = -\sqrt{x}$. Joonistada selle funktsiooni graafik.

195. Kas funktsioon

$$y = \begin{cases} -3, & \text{kui } x \in (-\infty, -2), \\ 1 - x^2, & \text{kui } x \in [-2, -1), \\ 0, & \text{kui } x \in [-1, 1], \\ x^2 - 1, & \text{kui } x \in (1, 2], \\ 3, & \text{kui } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

on paaris- või paaritu funktsioon?

196. Kas funktsioon

$$y = \begin{cases} -\cos x, & \text{kui } x \in \left\{\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]\right\}, \\ 0, & \text{kui } x \in \left\{\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right\}, \\ \cos x, & \text{kui } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

on paaris- või paaritu funktsioon?

197. Tõestada, et kahe paarisfunktsiooni või kahe paaritu funktsiooni korrutis on paarisfunktsioon, kuna paaris- ja paaritu funktsiooni korrutis on paaritu funktsioon.

2. Perioodilised funktsioonid. Funktsiooni $f(x)$, mis rahuldab tingimust

$$(4) \qquad f(x+\omega) = f(x) \qquad (\omega \neq 0)$$

iga x puhul määramispiirkonnas X, nimetatakse perioodiliseks funktsiooniks, arvu ω aga funktsiooni $f(x)$ perioodiks. Kui ω on funktsiooni $f(x)$ periood, siis osutuvad $f(x)$ perioodideks kõik arvud $k\omega$, kus $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Seega on perioodilise funktsiooni väärtused kohtadel x, $x+\omega$, $x+2\omega, \ldots$ ühesugused.

Näiteks, trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised ja neil on järgmised perioodid (kus $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$):

1) $y = \sin x : \omega = 2k\pi$,

2) $y = \cos x : \omega = 2k\pi$,

3) $y = \tan x : \omega = k\pi$,

4) $y = \cot x : \omega = k\pi$.

Funktsiooni $f(x)$ perioodi leidmiseks tuleb tingimusest

(4) määrata arv ω, vaadeldes tingimust (4) kui võrrandit ω suhtes. Kui sel võrrandil on muutujast x sõltumatu lahend ω, siis f(x) on perioodiline funktsioon perioodiga ω. Kui aga võrrandil muutujast x sõltumatuid lahendeid ei ole, siis f(x) ei ole perioodiline. Piisab, kui leida vähim positiivne periood ω (eeldades tema olemasolu), sest sellest saame täisarvuga $k \neq 0$ korrutamisel ka ülejäänud perioodid $k\omega$.

Kui funktsioon on perioodiliste funktsioonide summa, siis tema perioodiks osutub liidetavate funktsioonide perioodide vähim ühiskordne (perioodiks on ka perioodide iga ühiskordne).

Näide 7. Leiame funktsiooni $y = \sin 3x$ perioodi ω. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty, \infty)$. Tingimuse (4) järgi peab iga $x \in X$ korral kehtima

$$\sin 3(x + \omega) = \sin 3x$$

ehk

$$\sin (3x + 3\omega) = \sin 3x. \tag{5}$$

Tähistame $t = 3x$, siis saame

$$\sin (t + 3\omega) = \sin t.$$

Et viimane tingimus peab kehtima iga $t \in X$ korral, siis 3ω peab olema funktsiooni $y = \sin t$ periood. Seega $3\omega = 2k\pi$, kust $\omega = \frac{2k\pi}{3}$. Vähim positiivne periood on siis $\omega = \frac{2}{3}\pi$.

Leiame funktsiooni $y = \sin 3x$ perioodi ω veel teisiti. Lahendame võrrandi (5) otsitava ω suhtes, saame

$$\sin 3(x + \omega) - \sin 3x = 0$$

ehk

$$\cos \frac{6x + 3\omega}{2} \sin \frac{3\omega}{2} = 0.$$

Seega peab olema ka

$$\cos \frac{6x + 3\omega}{2} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{6x + 3\omega}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

või

$$\sin \frac{3\omega}{2} = 0, \text{ ehk } \frac{3\omega}{2} = k\pi.$$

Esimesest tingimusest pole võimalik muutujast x sõltumatut ω leida. Teisest tingimusest saame

$$\omega = \frac{2k\pi}{3},$$

mis ongi otsitav periood.

Näide 8. Leiame funktsiooni

$$y = 2\tan \frac{x}{3} + \sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x$$

perioodi ω. Selleks leiame kõigepealt näites 7 antud meetodiga üksikute liidetavate perioodid. Saame

$\tan \frac{x}{3}$ periood on $\omega_1 = 3k\pi$,
$\sin 2x$ periood on $\omega_2 = k\pi$,
$\cos 3x$ periood on $\omega_3 = \frac{2\pi}{3}$.

Liidetavate vähimad positiivsed perioodid on siis

$$\omega_1 = 3\pi, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = \frac{2}{3}\pi.$$

Näeme, et funktsioon y on kolme perioodilise funktsiooni summa. Seega on tema perioodiks perioodide $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ vähim ühiskordne, milleks on arv 6π. Nii et üldiselt funktsiooni y perioodideks on $\omega = 6k\pi$. Periood $\omega = 6\pi$ on funktsiooni y vähim positiivne periood.

<u>Näide 9</u>. Veendume, et $y = \cos\frac{1}{x}$ ei ole perioodiline funktsioon. Selleks kirjutame välja tingimuse (4), s.o.

$$\cos\frac{1}{x+\omega} = \cos\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Lahendame võrrandi (6) suuruse ω suhtes näites 8 antud võttega. Tulemuseks saame, et ω sõltub muutujast x. Seega funktsioon y ei ole perioodiline.

Sama tulemuse saame funktsiooni y määramispiirkonnast $X = \{(-\infty, 0), (0, \infty)\}$. Võttes $x = -\omega \in X$, saame, et $x + \omega = 0 \notin X$ ja seega kohal $x = -\omega$ võrdus (6) ei pea paika.

Arutleda võib ka nii. Tähistame $t = \frac{1}{x}$, siis $y = \cos t$ on perioodiline t suhtes, s.t. tema väärtused korduvad perioodi 2π takka. Et x ja t vahel sõltuvus ei ole lineaarne, siis x suhtes funktsiooni y väärtused ei saa korduda ω takka, ükskõik millise $\omega > 0$ me ka ei valiks. Seega $y = \cos\frac{1}{x}$ ei ole perioodiline funktsioon.

<u>Ülesanded</u>.

Selgitada, missugused järgmistest funktsioonidest on perioodilised ja leida periood.

198. $y = \sin \lambda x$. 199. $y = \cos \lambda x$.

200. $y = \tan \lambda x.$

201. $y = \cot \lambda x.$

202. $y = |\sin x|.$

203. $y = \tan^{2} x\ .$

204. $y = \sin^2 x.$

205. $y = \sin x \ . \cos x.$

206. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin \frac{1}{3}\ .$

207. $f(x) = 2\tan 2x - 3\tan 3x + \cot \frac{x}{4}.$

208. $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 4x + 5.$

209. $f(x) = \sqrt{\tan x} - 3\pi.$

210. $f(x) = \sin x^2 + 2\cos 2x.$

211. $y = x \cos x - 1.$

212. $u = \tan \sqrt{t} + \frac{1}{\sin t}.$

213. $z = \frac{1}{\cos^2 u} - \frac{1}{\sin u} + \frac{\pi}{2}.$

214. $\varphi(t) = \arcsin t - \frac{\pi}{2}\sin t.$

215. Tõestada, et ühises piirkonnas määratud perioodiliste funktsioonide korrutis on perioodiline funktsioon, kui tegurite perioodid on ühismõõduga.

216. Tõestada, et funktsioon $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, mis rahuldab tingimust $f(x + T) = k\, f(x)$, kus k ja T on positiivsed konstandid, on esitatav kujul $f(x) = a^x\, \varphi(x)$. Siinjuures a on konstant ja $\varphi(x)$ on perioodiline funktsioon perioodiga T.

217. Kirjutada analüütiliselt valemi abil üles funktsioon, mis 1) on perioodiline perioodiga 2, 2) on määratud piirkonnas $(-\infty, \infty)$ ja 3) ühtib lõigus $[-1, 1]$ funktsiooniga $y = x^2$. Teha graafik.

218. Kirjutada analüütiliselt valemi abil üles funktsioon, mis 1) on määratud piirkonnas $[-8, 8]$, 2) on perioodiline perioodiga 4 ja 3) ühtib lõigus $[0, 1]$ funktsiooniga $y = -x$, lõigus $[1, 3]$ funktsiooniga $y = 4x - x^2 - 4$ ja lõigus $[3, 4]$ funktsiooniga $y = x - 4$. Teha graafik.

3. Monotoonsed funktsioonid. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse piirkonnas X monotoonselt kasvavaks ehk mittekahanevaks, kui mis tahes $x_1 < x_2$ puhul piirkonnas X kehtib võrratus $f(x_1) \leq f(x_2)$, ja monotoonselt kahanevaks ehk mittekasvavaks, kui $f(x_1) \geq f(x_2)$. Juhul kui $f(x_1) < f(x_2)$, kõneldakse rangelt kasvavast ehk lihtsalt kasvavast ja juhul $f(x_1) > f(x_2)$ rangelt kahanevast ehk kahanevast funktsioonist. Piirkonnas X on monotoonse funktsiooni tunnuseks see, et vahe

$$f(x_1) - f(x_2)$$

säilitab märki selles piirkonnas, kui $x_1 < x_2$.

Näide 10. Funktsioon $f(x) = \frac{3 - x}{x}$ on kahanev piirkonnas $X = (-\infty, 0)$ ja piirkonnas $X(0, \infty)$, sest suvaliste $x_1, x_2 \in X$ puhul, kus $x_1 < x_2$, kehtib võrratus

$$f(x_1) - f(x_2) > 0.$$

Tõepoolest,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3-x_1}{x_1} - \frac{3-x_2}{x_2} = 3\frac{x_2-x_1}{x_1x_2} > 0,$$

sest $x_2-x_1 > 0$ ja $x_1x_2 > 0$, nii $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ kui ka $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ korral.

Ülesanded.

Tõestada, et järgmised funktsioonid on kasvavad.

219. a) $f(x) = x^3 + 1$, $X = (-\infty, \infty)$;

b) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, $X = (-\pi, \pi)$.

Tõestada, et järgmised funktsioonid on kahanevad.

220. a) $f(x) = x^2 + 2$, $X = (-\infty, 0)$;

b) $f(x) = \cot x$, $X = (0, \pi)$;

c) $f(x) = 3 - \cos x$, $X = (-\pi, 0)$.

Määrata järgmiste funktsioonide kasvamise ja kahanemise piirkonnad.

221. $y = -\sqrt{x+1}$. 222. $y = \sqrt{x+1}$.

223. $y = 2 - (x-1)^3$.

224.
$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-(x+1)}, & \text{kui } x \in (-\infty, -1); \\ 0, & \text{kui } x \in [-1, 1]; \\ \sqrt{x-1}, & \text{kui } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

4. Pöördfunktsioon. Olgu X funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkond, Y – tema muutumispiirkond. Seame igale arvule $y \in Y$ vastavusse kõik need väärtused $x \in X$, mille puhul $f(x) = y$. Niisuguse vastavusega määratud funktsiooni nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooniks ja tähistatakse $x = g(y)$. Pöördfunktsiooni $x = g(y)$ määramispiirkonnaks on funktsiooni $f(x)$ muutumispiirkond Y ja muutumispiirkonnaks on funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond X. Pöördfunktsiooni $x = g(y)$ argumendi igale väärtusele $y \in Y$ võib vastata mitu väärtust $x \in X$. Viimasel juhul öeldakse, et pöördfunktsioon on mitmene funktsioon.

Näide 11. Leiame funktsiooni

$$(7) \qquad y = x^2 - 2x + 2$$

pöördfunktsiooni, kui $X = (-\infty, 1]$.

Funktsiooni (7) muutumispiirkonnaks on $Y = [1, \infty)$. Lahendame võrrandi $y = x^2 - 2x + 2$ muutuja x suhtes, saame

$$x = 1 \pm \sqrt{y - 1}\,.$$

Et pöördfunktsiooni muutumispiirkonnaks peab olema $X = (-\infty, 1]$, siis pöördfunktsiooni analüütiliseks avaldiseks sobib vaid

$$x = 1 - \sqrt{y - 1},$$

mis ongi otsitav pöördfunktsioon. Tema määramispiirkonnaks on funktsiooni (7) muutumispiirkond $Y = [1, \infty)$.

Näide 12. Leiame funktsiooni

$$y = x^2 - 2x + 2$$

pöördfunktsiooni, kui $X = (-\infty, \infty)$.

Antud funktsiooni muutumispiirkonnaks on $Y = [1, \infty)$. Näite 11 põhjal

$$x = 1 \pm \sqrt{y - 1}\,.$$

Et käesoleval juhul $x \in (-\infty, \infty)$, siis saadud avaldis kujutabki pöördfunktsiooni, mille määramispiirkonnaks on $Y = [1, \infty)$.

Näide 13. Leiame funktsiooni

$$(8) \qquad y = 8\pi + 8\operatorname{arccot}\frac{3x - 1}{2}$$

pöördfunktsiooni.

Lahendame võrrandi muutuja x suhtes, saame

$$\frac{y}{8} - \pi = \operatorname{arccot}\frac{3x - 1}{2},$$

millest

$$\frac{3x - 1}{2} = \cot\left(\frac{y}{8} - \pi\right) = \cot\frac{y}{8}$$

ehk

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cot\frac{y}{8}.$$

Et funktsiooni $y = \operatorname{arccot} x$ muutumispiirkonnaks on hulk $Y = (0, \pi)$ (vt. lk. 36), siis käesoleval juhul peab olema

$$0 < \frac{y}{8} - \pi < \pi,$$

millest

$$8\pi < y < 16\pi.$$

Seega funktsiooni (8) pöördfunktsioon on

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cot\frac{y}{8}$$

määramispiirkonnaga $Y = (8\pi, 16\pi)$.

Ülesanded.

Leida pöördfunktsioonid järgmistele funktsioonidele.

225. a) $y = 2x$

b) $y = 2x$, kus $X = (-\infty, -2]$.

226. a) $y = \frac{1}{x}$;

b) $y = \frac{1}{x}$, kus $X = (0, \infty)$.

227. a) $y = x^2$, kus $X = (-\infty, 0)$;

b) $y = x^2$, kus $X = [0, \infty)$;

c) $y = x^2$.

228. a) $y = 4x^2 - 12x + 4$;

b) $y = 4x^2 - 12x + 4$, kus $X = [3/2, \infty)$.

229. $y = 10^x + 1$.

230. $y = \dfrac{3^x}{1 + 3^x}$.

231. a) $y = 1 + \log(x + 2)$;

b) $y = 1 + \log|x + 2|$, kus $X = (-\infty, -2)$.

232. a) $y = \sqrt{1 - x^2}$, kus $X = [-1, 0]$;

b) $y = \sqrt{1 - x}$, kus $X = [0, 1]$.

233. a) $y = \frac{1}{2}\arcsin 3x$;

b) $y = \frac{1}{2}\arcsin 3x$, kus $X = \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

234. a) $y = \arccos \frac{x^2}{4}$;

b) $y = \arccos \frac{x^2}{4}$, kus $X = [-2, 0]$.

235. a) $y = \arccos(1 - x) - \pi$;

b) $y = \arccos(1 - x) - \pi$, kus $X = [0, 1]$.

236. $y = \frac{\pi}{4} - \arctan(2x + 3)$, kus $X = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$.

237. $y = 3\pi + 6\operatorname{arccot} \frac{5x - 4}{7}$.

238. $y = \begin{cases} x, & \text{kui } x \in (-\infty, 1), \\ x^2, & \text{kui } x \in [1, 4), \\ 2^x, & \text{kui } x \in [4, \infty). \end{cases}$

239. $y = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{kui } x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}], \\ -\sin x, & \text{kui } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \cos x - 1, & \text{kui } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

§ 3. Funktsiooni graafiku joonestamine punktide järgi.

Funktsiooni $y = f(x)$, kus $x \in X$, graafikuks nimetatakse punktide (x,y) hulka, kus $x \in X$ ja $y = f(x)$. Graafiku joonestamiseks punktide järgi võib toimida järgmiselt:

1) leiame funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkonna X;

2) valime määramispiirkonnas X küllalt tihedalt paikneva argumendi väärtuste süsteemi x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ ja arvutame vastavad funktsiooni väärtused

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n);$$

3) kanname punktid (x_i,y_i) xy-tasandile ja ühendame nad sujuva joonega, millega saame funktsiooni graafiku eskiisi.

Graafiku kuju täpsustamiseks tuleb lisaks veel uurida funktsiooni omadusi, nimelt

1) leida funktsiooni nullkohad, piirkonnad, kus ta on positiivne ja kus negatiivne;

2) leida funktsiooni periood, monotoonsuse (kasvamise ja kahanemise) piirkonnad;

3) uurida funktsiooni käitumist argumendi x lähenemisel määramispiirkonna X rajapunktidele.

Kui on teada ühe funktsiooni $y = f(x)$ graafik, siis

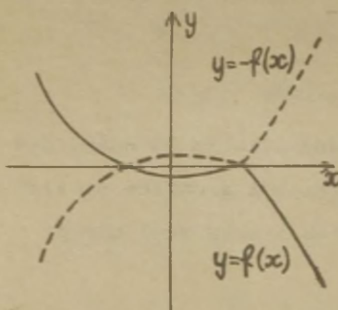
a) funktsiooni $y = - f(x)$ graafik on peegelpildiks $y = f(x)$ graafikule x-telje suhtes (joon. 10);

b) funktsiooni $y = f(-x)$ graafik on peegelpildiks $y = f(x)$ graafikule y-telje suhtes (joon. 11);

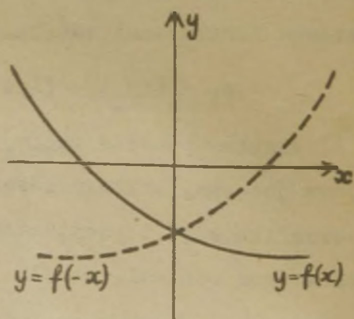
c) funktsiooni $y = f(x - a)$ graafik on $y = f(x)$ graafiku paralleellüke x-telje sihis kaugusele a (joon. 12);

d) funktsiooni $y = b + f(x)$ graafik on $y = f(x)$ graafiku paralleellüke y-telje sihis kaugusele b (joon.13);

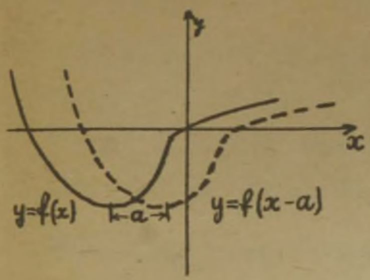
e) funktsiooni $y = Af(x)$ ($A = \text{const} \neq 0$) graafik on $y = f(x)$ graafik niisuguses koordinaatteljestikus, milles mõõtühik y-teljel on korrutatud arvuga A (joon.14).



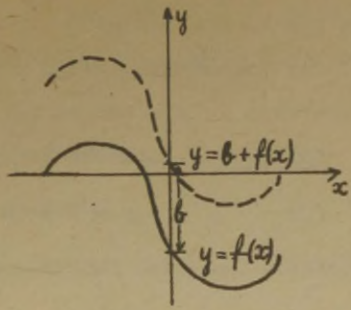
Joon. 10.



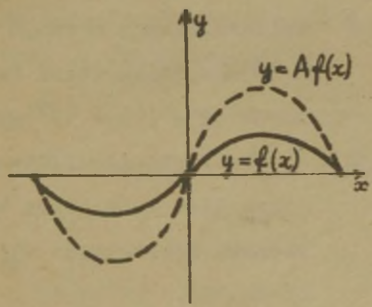
Joon. 11.



Joon. 12.



Joon. 13.



Joon. 14.

Paljude järgnevate ülesannete lahendamisel on arvestatud, et põhiliste elementaarfunktsioonide omadused ja graafikud on teada. Põhilisteks elementaarfunktsioonideks loetakse järgmised funktsioonid:

1) konstantne funktsioon $y = c$, kus $c = \text{const}$;

2) eksponentfunktsioon $y = a^x$ $(a > 0)$;

3) logaritmfunktsioon $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

4) astmefunktsioon $y = x^a$;

5) trigonomeetrilised funktsioonid $y = \sin x$, $y = \cos x$,

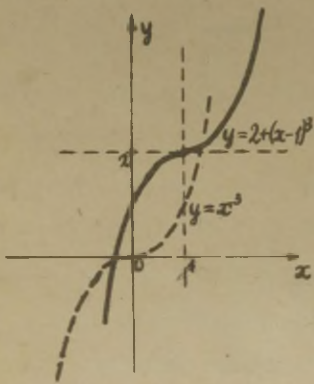
$y = \tan x$, $y = \cot x$;

6) arkusfunktsioonid $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \text{arccot}\, x$.

<u>Näide 14.</u> Joonestame funktsiooni

$$y = 2 + (x - 1)^3 \tag{9}$$

graafiku, lähtudes funktsiooni $y = x^3$ graafikust.



Joon. 15.

Funktsiooni $y = x^3$ graafik on kujutatud punktiiriga joonisel 15. Viime selle graafiku paralleellükkega x-telje sihis paremale ühe ühiku võrra (saame funktsiooni $y = (x - 1)^3$ graafiku) ja seejärel paralleellükkega y-telje sihis üles kahe ühiku võrra, mis annabki funktsiooni (9) graafiku (joon.15).

<u>Ülesanded</u>.

Joonistada järgmiste funktsioonide graafikud.

240. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

241. $y = \dfrac{3x}{2x - 3}$.

242. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

243. $y = \text{sgn}\, x$, kus $\text{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$

244. $y = [x]$, kus $[x]$ tähendab arvu x täisosa.

245. $y = x \operatorname{sgn} x$.

246. $y = \sqrt{-x-2}$.

Joonistada järgmiste polaarkoordinaatides antud funktsioonide graafikud.

247. $r = \frac{2}{\pi}\Theta$ (Archimedese spiraal).

248. $r = \frac{\pi}{\Theta}$ (Hüperboolne spiraal).

249. $r = \frac{\Theta}{\Theta+1}$ $(0 \leq \Theta < \infty)$.

250. $r = 2^{\frac{\Theta}{\pi}}$ (Logaritmiline spiraal).

251. $r = 2(1 + \cos\Theta)$ (Kardioid).

Joonistada järgmiste funktsioonide graafikud, lähtudes põhiliste elementaarfunktsioonide graafikutest.

252. $y = x^2 + k$, kui $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

253. $y = x^2 - 2xa + a^2 - 5$, kui $a = 0, \pm 1, \pm 2$.

254. $y = 2 + x - x^2$.

255. $y = x^3 - 8$.

256. $y = \sqrt[3]{x} + 2$.

257. $y = 3 - 2^x$.

258. $y = |\log x| - 1$.

259. $y = -2\log x$.

260. $y = \frac{1}{2}\log(-x)$.

261. $y = 1 + 2^{x-1}$.

262. $y = A \sin x$, kus $A = 1, -2, 10$.

263. $y = \sin(x - a)$, kus $a = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

264. $y = \sin nx$, $n = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

265. $y = 3 + 2\cos 2x$.

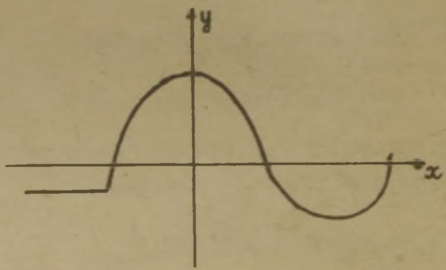
266. $y = 2 + \sqrt{1-x}$.

267. $y = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$.

268. $y = \arccos x - \pi$.

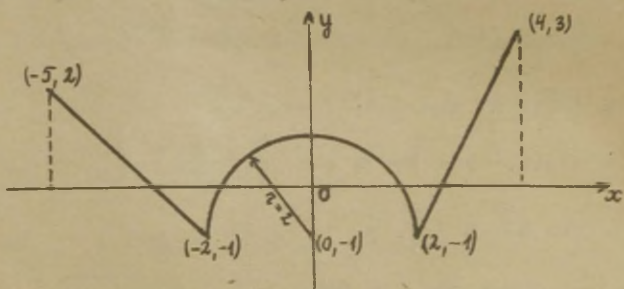
269. $y = \frac{\pi}{2} \arcsin(1 + x)$.

270. Funktsiooni $y = f(x)$ graafik on kujutatud joonisel 16. Joonistada funktsioonide $y = |f(x)|$, $y = \frac{1}{2}\left[|f(x)| + f(x)\right]$ ja $y = \frac{1}{2}\left[|f(x)| - f(x)\right]$ graafikud.



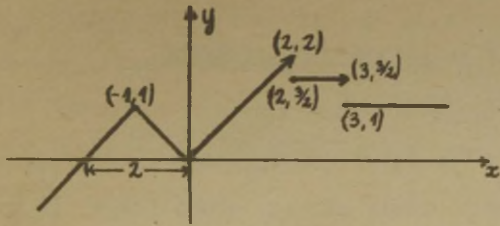
Joon. 16.

271. Joonisel 17 on funktsioon f(x) antud graafiliselt. Leida selle funktsiooni määramis- ja muutumispiirkond ning esitada funktsioon analüütiliselt valemi abil.



Joon. 17.

272. Leida joonisel 18 graafiliselt antud funktsiooni $f(x)$ analüütiline esitus (valemina), kui $f(2) = 3/2$ ja $f(3) = 1$.



Joon. 18.

273. Kerasse, mille raadius on R, joonestatakse silinder. Avaldada silindri ruumala V tema kõrguse x funktsioonina.

274. Torni alumiseks osaks on tüvikoonus, mille alumise põhja raadius on 2R, ülemise – R ja kõrgus on ka R. Tüvikoonusele on paigutatud silinder põhja raadiusega R ja kõrgusega 2R. Silindrit katab poolkera raadiusega R. Avaldada torni horisontaallõike pindala S suuruse x funktsioonina, kus x on lõike kaugus torni alusest.

Lahendada graafiliselt järgmised võrrandid.

275. $x^3 + x - 1 = 0$. 276. $\log x = 0{,}1\,x$.

277. $x = \cot x$, $X = (0, \pi)$.

Lahendada graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid.

278. $\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$ 279. $\begin{cases} x^2 + y = 10, \\ x + y^2 = 6. \end{cases}$

280. $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \cos x, \end{cases}$ $X = (0, 2\pi)$.

III. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS.

§ 1. Arvujada piirväärtus.

Olgu

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

arvujada, mida lühidalt märgime sümbolitega $\{x_n\}$.

Arvu A nimetatakse jada $\{x_n\}$ <u>piirväärtuseks</u>, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune arv $N = N(\varepsilon)$, et kehtib võrratus

$$(1) \qquad |x_n - A| < \varepsilon,$$

kui $n > N$, ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{ehk } x_n \to A.$$

Öeldakse, et jada $\{x_n\}$ piirväärtus on ∞, kui iga arvu $M > 0$ korral leidub niisugune arv $N = N(M)$, et kehtib võrratus

$$x_n > M,$$

kui $n > N$, ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ ehk } x_n \to +\infty.$$

Analoogiliselt tingimusega

$$x_n < -M$$

defineeritakse piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \text{ ehk } x_n \to -\infty.$$

Kui jadal $\{x_n\}$ on lõplik piirväärtus A, siis öeldakse, et jada $\{x_n\}$ koondub arvuks A. Kui aga jadal lõplikku piirväärtust ei ole, siis öeldakse, et jada on hajuv.

Jadal on järgmised tehetega seotud piirväärtuse omadused: kui eksisteerivad lõplikud piirväärtused $\lim_{n\to\infty} x_n$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n$, siis

1) $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim_{n\to\infty} (cx_n) = c \lim_{n\to\infty} x_n$ $\quad (c = \text{const})$;

3) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ $\quad (\lim_{n\to\infty} y \neq 0)$.

Omadustes 1) – 4) lõplike piirväärtuste olemasolust võrduse paremal poolel järeldub lõpliku piirväärtuse olemasolu võrduse vasakul poolel, kuid mitte vastupidi. Samuti järeldub omadusest 3), et iga naturaalse astme k korral

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k.$$

Kui $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, siis suurust x_n nimetatakse lõpmata väikeseks ja kirjutatakse $x_n = o(1)$. Kui $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$, siis suurust x_n nimetatakse lõpmata suureks. Kui leidub arv $M > 0$, et $|x_n| \leq M$ iga n korral, siis suurust x_n nimetatakse tõkestatuks ja kirjutatakse $x_n = O(1)$.

Piirväärtuste arvutamisel kasutatakse lõpmata väikeste ja lõpmata suurte suuruste järgmisi omadusi:

a) kui $x_n = o(1)$ ja $y_n = o(1)$, siis $x_n + y_n = o(1)$;

b) kui $x_n = o(1)$ ja $y_n = O(1)$, siis $x_n y_n = o(1)$;

c) kui $x_n \to \pm\infty$ ja $y_n = O(1)$, siis $x_n + y_n \to \pm\infty$;

d) kui $x_n \to \pm\infty$ ja $y_n \to \pm\infty$, siis $x_n + y_n \to \pm\infty$;

e) kui $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = \infty$;

f) kui $x_n = o(1)$, siis $\frac{1}{|x_n|} \to \infty$;

g) kui $|x_n| \to \infty$, siis $\frac{1}{x_n} \to 0$.

Tähtsamad piirväärtused:

$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \approx 2,718$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

$\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = \infty$, kui $|q| > 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, kui $a > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$, kui $|q| < 1$;

Jada piirväärtuse olemasolu tunnused.

Cauchy kriteerium. Selleks, et jadal $\{x_n\}$ oleks lõplik piirväärtus, on tarvilik ja piisav, et iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leiduks niisugune arv $N = N(\varepsilon)$, et kehtiks võrratus

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

kui $n > N$ iga $p = 1,2,\ldots$ korral.

Weierstrassi tunnus. Iga monotoonne tõkestatud jada on koonduv. Piirväärtuse arvutamisel võivad tekkida määramatused tüüpi $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

Need määramatused tekivad parajasti neil juhtudel, mil me omadusi 1) - 4) ja a) - g) vahetult kasutada ei saa. Sel korral tuleb eelnevalt jada sobivalt teisendada.

Näide 1. Tõestame otseselt piirväärtuse definitsiooni abil, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n}}{1-\sqrt{n}} = -\sqrt{3}.$$

Olgu $\varepsilon > 0$ mis tahes arv. Jada piirväärtuse definitsiooni põhjal peame näitama, et leidub niisugune arv $N = N(\varepsilon)$, et kehtib võrratus (1). Meie juhul on

$$x_n = \frac{\sqrt{3n}}{1-\sqrt{n}} \quad \text{ja} \quad A = -\sqrt{3}.$$

Seega peab kehtima (ehk nõuame, et kehtiks)

$$|x_n - A| = \left|\frac{\sqrt{3n}}{1-\sqrt{n}} - (-\sqrt{3})\right| = \left|\frac{\sqrt{3n}}{1-\sqrt{n}} + \sqrt{3}\right| =$$

$$= \frac{|\sqrt{3n} + \sqrt{3} - \sqrt{3n}|}{|1-\sqrt{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}-1} < \varepsilon,$$

mis on võimalik, kui

$$\sqrt{n} - 1 > \frac{\sqrt{3}}{\varepsilon}$$

ehk

$$n > \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{3}}{\varepsilon}\right)^2.$$

Seega, võttes

$$N = \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{3}}{\varepsilon}\right)^2,$$

näeme, et iga $n > N$ korral kehtib võrratus (1), mida oligi tarvis tõestada.

Näide 2. Leida jada

$$x_n = \frac{1}{2n} \cos n^2$$

piirväärtus.

Lahendus. Siin $\cos n^2 = O(1)$, $2n \to \infty$ ja omaduse g) põhjal

$$\frac{1}{2n} \to 0.$$

Seega omaduse b) tõttu saame

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} o(1)O(1) = 0.$$

Näide 3. Leida jada

$$y_n = \frac{n^3 - 2n + 1}{(2n + 1)^3}$$

piirväärtus.

Lahendus. Et omaduste g), e) ja a) põhjal on

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 - 2n + 1) = \lim_{n\to\infty} n^3(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^3 \left[1 + o(1) + o(1)\right] = \infty,$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} (2n + 1)^3 = \lim_{n\to\infty} n^3(2 + \frac{1}{n})^3 = \lim_{n\to\infty} n^3\left[2 + o(1)\right]^3 = \infty,$$

siis esineb määramatus tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$. Piirväärtuse arvutamiseks kõrvaldame määramatuse, jagades lugejat ja nimetajat suurusega n^3. Omaduste 4), 1) ja 3) põhjal saame seega

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{(2 + \frac{1}{n})^3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{(\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n})^3} =$$

$$= \frac{1 - 0 + 0}{(2 + 0)^3} = \frac{1}{8}.$$

Ülesanded.

Tõestada otseselt piirväärtuse definitsiooni abil järgmised võrdused.

281*. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5n} = 0.$

282*. $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 + \sqrt{n}} = 0.$

283*. $\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \sqrt{5n}}{3 - \sqrt{2n}} = -\sqrt{\frac{5}{2}}.$

284*. $\lim_{n\to\infty} \left[n^2 - (-1)^n\right] = \infty.$

285*. $\lim_{n\to\infty} (n - 2n^2) = -\infty.$

286*. $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty.$

287*. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{4} = 0.$

288. Ülesannetes 281 ja 287 arvutada $N(\frac{1}{4})$, $N(0{,}1)$, $N(0{,}01)$, $N(10^{-8})$.

289. Ülesandes 285 arvutada $N(1)$, $N(100)$, $N(10^8)$.

Leida järgmiste jadade piirväärtused.

290. $x_n = \frac{1}{3n} + \frac{5n}{2n - 1}.$

291. $x_n = \frac{1}{2n} \sin n! + \sqrt[n]{3n}.$

292. $x_n = \frac{n}{n^2 - 1} \cos n^3 + \frac{4n}{6n + 5} \frac{n}{1 - n}$.

293. $x_n = \frac{2n}{4n^2 - 1} \cos \frac{2n^2 + 3}{1 - 7n} + \frac{n}{1 - 2n} \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1}$.

294. $x_n = \frac{n^2 + 2n - 6}{(3n - 1)^2}$.

295. $x_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{(2 - 3n)^2}$.

296. $x_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}$.

297. $x_n = \frac{a^n}{1 + a^n}$.

298. $x_n = \sqrt[n]{3n} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} - (1 + \frac{1}{n})^{2n}$.

299. $x_n = (\frac{n}{n + 1})^n + \sin 9$.

300. $x_n = \sqrt{n + 4} - \sqrt{n}$.

Kasutades Cauchy kriteeriumi, tõestada järgmiste jadade koonduvus.

301. $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k$, kui $a_k = O(1)$ ja $q < 1$.

302. $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k!}{2^k}$.

303*. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k(k+1)}$.

304*. $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

305*. Kasutades Cauchy kriteeriumi, tõestada jada

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$$

hajuvus.

Kasutades Weierstrassi tunnust, tõestada järgmiste jadade koonduvus.

306. $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k + 1}$. 307. $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

308. $x_1 = \sqrt{a}$, $a > 1$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Leida ka $\lim x_n$.

Arvu A (ehk sümbolit ∞ või $-\infty$) nimetatakse jada $\{x_n\}$ <u>osapiirväärtuseks</u>, kui jadast saab eraldada niisuguse osajada $\{x_{k_n}\}$, et

$$\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = A.$$

Igal tõkestatud jadal $\{x_n\}$ on olemas vähemalt üks lõplik osapiirväärtus A (Bolzano-Weierstrassi teoreem). Kui see osapiirväärtus A on ainus, siis jada $\{x_n\}$ ise koondub piirväärtuseks A, s.t. $\lim_{n \to \infty} x_n = A$.

Jada $\{x_n\}$ vähimat osapiirväärtust (lõplikku või lõpmatut) nimetatakse <u>alumiseks piirväärtuseks</u> ja tähistatakse

$$\liminf_{n \to \infty} x_n \quad \text{ehk} \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

Jada x_n suurimat osapiirväärtust nimetatakse <u>ülemiseks piirväärtuseks</u> ja tähistatakse

$$\limsup_{n \to \infty} x_n \quad \text{ehk} \quad \overline{\lim}\, x_n.$$

Jada $\{x_n\}$ piirväärtuse olemasoluks on tarvilik ja piisav, et kehtiks võrdus

$$\liminf_{n \to \infty} x_n = \limsup_{n \to \infty} x_n.$$

Ülesanded.

Järgmiste jadade $\{x_n\}$ jaoks leida $\liminf_{n \to \infty} x_n$ ja $\limsup_{n \to \infty} x_n$. Missugused nendest jadadest on koonduvad ja missugused hajuvad?

309. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

310. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

311. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$.

312. $x_n = \begin{cases} 1, & \text{kui } n = 2k-1, \\ \frac{1}{n}, & \text{kui } n = 2k. \end{cases}$

313. $x_n = (-1)^n n$.

314. $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$.

315. $x_n = -n\left[2 + (-1)^n\right]$.

316. $x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

317. $x_n = 10^n$.

318. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$.

319. $x_n = (-1)^n \log 2 + 2^{-n} + \log 2$.

320. $x_n = \begin{cases} a + \frac{1}{n}, & \text{kui } n = 2k - 1, \\ b - \sin\frac{\pi}{n}, & \text{kui } n = 2k. \end{cases}$

321. $x_n = \begin{cases} a + (-1)^n \frac{n}{n^2+1}, & \text{kui } n = 3k - 2, \\ -\frac{1}{2} + a^n, & \text{kui } n = 3k - 1, \\ b - \frac{1}{n + (-1)^n}, & \text{kui } n = 3k. \end{cases}$

322. $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}.$

§ 2. Funktsiooni piirväärtus.

Olgu a funktsiooni f(x) määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Arvu A nimetatakse funktsiooni f(x) piirväärtuseks punktis a, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune arv $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et kehtib võrratus

(2) $$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

niipea kui

(3) $$0 < |x - a| < \delta,$$

ja kirjutatakse

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Võrratus (2) on samaväärne võrratusega

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

ja võrratus (3) on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} a - \delta < x < a + \delta, \\ x \neq a. \end{cases}$$

Öeldakse, et funktsiooni f(x) piirväärtus kohal a on ∞, kui iga arvu $M > 0$ korral leidub niisugune arv $\delta = \delta(M) > 0$, et kehtib võrratus

(4) $$f(x) > M,$$

niipea kui kehtib võrratus (3) ja kirjutatakse

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Analoogiliselt võrratusega

(5) $$f(x) < -M$$

defineeritakse piirväärtus

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Näide 4. Kasutades funktsiooni piirväärtuse definitsiooni tõestada, et

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1} = -5.$$

Tõestus. Võtame mis tahes arvu $\varepsilon > 0$. Piirväärtuse definitsiooni järgi peab leidma niisuguse arvu $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et kehtiks võrratus

$$|f(x) - A| = \left|\frac{3x^2+x-2}{x+1} - (-5)\right| = \left|\frac{3(x^2+2x+1)}{x+1}\right| = 3|x + 1| < \varepsilon,$$

niipea kui $0 < |x - (-1)| < \delta$ ehk $0 < |x + 1| < \delta$. Võrratus kehtib, kui $0 < |x + 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ (taandamine suurusega x + 1 on lubatud, sest $x+1 \neq 0$. Võime võtta $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Seega vajalik δ on leitud.

<u>Näide 5</u>. Kasutades funktsiooni piirväärtuse definitsiooni tõestada, et

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2+1}{x^2+5} = 2.$$

<u>Tõestus</u>. Võtame mis tahes arvu $\varepsilon > 0$. Vastavalt piirväärtuse definitsioonile nõuame, et kehtiks võrratus

$$|f(x) - A| = \left|\frac{3x^2+1}{x^2+5} - 2\right| = \frac{|x^2-9|}{x^2+5} \leqslant \frac{1}{5}|x-3|\,|x+3| =$$

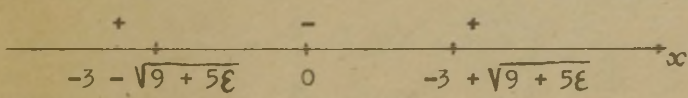
$$= \frac{1}{5}|x-3|\,|x-3+6| \leqslant \frac{1}{5}|x-3|\,(|x-3| + 6) < \varepsilon.$$

Seega tuleb leida niisugune arv $\delta > 0$, et võrratusest $0 < |x - 3| < \delta$ järelduks võrratus

$$|x - 3|^2 + 6|x - 3| - 5\varepsilon < 0.$$

Lahendades võrratuse otsitava $|x - 3|$ suhtes, saame (vt. joon.19)

$$-3 - \sqrt{9 + 5\varepsilon} < |x - 3| < -3 + \sqrt{9 + 5\varepsilon}.$$



Joon. 19.

Et $|x - 3| > 0$, siis peab kehtima

$$0 < |x - 3| < -3 + \sqrt{9 + 5\varepsilon}\,.$$

Seega võime võtta

$$\delta = -3 + \sqrt{9 + 5\varepsilon}$$

(arvuks δ sobib muidugi ka arvust $-3 + \sqrt{9 + 5\varepsilon}$ iga väiksem positiivne arv).

Me võime sobiva δ leida ka teisiti. Nimelt võrratusest

$$3 - \delta < x < 3 + \delta.$$

Selleks liidame arvu 3 võrratuse igale osale, saame

$$6 - \delta < x + 3 < 6 + \delta.$$

Kuna arvu δ võime alati vähendada, siis oletame, et $\delta \leq 1$, siis $-\delta > -1$ (me võiksime oletada ka, et $\delta \leq 2$, $\delta \leq 3$ jne., tähtis on ainult, et jääks $6 - \delta > 0$, sest peab olema $x + 3 > 0$). Seega

$$5 \leq 6 - \delta < x + 3 < 6 + \delta \leq 7,$$

mille tõttu

$$|f(x) - A| = \left|\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 5} - 2\right| \leq \frac{1}{5}\,|x - 3|\,|x + 3| < \frac{7}{5}\,|x - 3| < \varepsilon,$$

kui $0 < |x - 3| < \delta$, kus

$$\delta = \begin{cases} \frac{5}{7}\,\varepsilon\,, & \text{kui } \varepsilon \leq \frac{7}{5}\,, \\ 1, & \text{kui } \varepsilon > \frac{7}{5}\,, \end{cases}$$

ehk

$$\delta = \min\left(1, \frac{5}{7}\varepsilon\right).$$

Näide 6. Kasutades funktsiooni piirväärtuse definitsiooni tõestada, et

$$\lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)}{x^2-4} = -\frac{3}{4}.$$

Tõestus. Võtame ette mis tahes $\varepsilon > 0$. Siis arvestame, et $|x+2| > 0$, saame

$$|f(x) - A| = \left| \frac{3(x+2)}{x^2-4} + \frac{3}{4} \right| = \frac{3(x^2+4x+4)}{4\,|x^2-4|} = \frac{3}{4}\left|\frac{x+2}{x-2}\right| < \varepsilon,$$

kui $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| < \frac{4}{3}\varepsilon$, ehk $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| > \frac{3}{4\varepsilon}$.

(võime alati suurendada) (võime alati vähendada)

Nüüd (kasutades võrratust $|a \pm b| \geqslant |a| - |b|$), saame

$$\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \left|\frac{x+2-4}{x+2}\right| = \left|1 - \frac{4}{x+2}\right| =$$

$$= \left|\frac{4}{x+2} - 1\right| \geqslant \frac{4}{|x+2|} - 1 > \frac{3}{4\varepsilon}$$

ehk

$$\frac{4}{|x+2|} > 1 + \frac{3}{4\varepsilon} = \frac{3+4\varepsilon}{4\varepsilon},$$

kust

$$0 < |x+2| < \frac{16\varepsilon}{3+4\varepsilon}$$

ning

$$\delta = \frac{16\varepsilon}{3 + 4\varepsilon}.$$

Leiame sobiva δ veel teisiti. Nimelt oletades, et $\delta \leqslant 1$, saame

$$-2 - \delta < x < -2 + \delta,$$

$$-5 \leqslant -4 - \delta < x - 2 < -4 + \delta < -3.$$

$$5 \geqslant 4 + \delta > |2 - x| > 4 - \delta \geqslant 3,$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{|2 - x|} < \frac{1}{3},$$

mille tõttu

$$|f(x) - A| = \left|\frac{3(x + 2)}{x^2 - 4} + \frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| < \frac{1}{4}|x + 2| < \varepsilon,$$

kui

$$\delta = \begin{cases} 4\varepsilon, & \text{kui } \varepsilon \leqslant \frac{1}{4} \\ 1, & \text{kui } \varepsilon \geqslant \frac{1}{4} \end{cases}$$

ehk

$$\delta = \min(1; 4\varepsilon).$$

Näide 7. Tõestada, et iga arvu a korral

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ mis tahes. Nõuame, et kehtiks

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{|x-a|}{2} = |x - a| < \varepsilon.$$

(kasutades võrratust $|\sin u| \leq |u|$, mis kehtib iga u korral). Seega võime võtta $\delta = \varepsilon$.

Näide 8. Kasutades funktsiooni piirväärtuse definitsiooni tõestada, et

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 4}{x - 2} = \infty .$$

Tõestus. Vastavalt, mis tahes etteantud arvule $M > 0$ leiame $\delta > 0$, et võrratusest $0 < |x - 2| < \delta$ järelduks $\frac{x + 4}{|x - 2|} > M$. Nõuame, et kehtiks

$$|f(x)| = \left|\frac{x + 4}{x - 2}\right| = \left|\frac{x - 2 + 6}{x - 2}\right| =$$

$$= \left|1 + \frac{6}{x - 2}\right| \geq \frac{6}{|x - 2|} - 1 > M,$$

kust

$$\frac{6}{|x - 2|} > 1 + M \quad \text{ehk} \quad 0 < |x - 2| < \frac{6}{1 + M} .$$

Seega võime võtta

$$\delta = \frac{6}{1 + M}.$$

Ülesanded.

Funktsiooni piirväärtuse definitsiooni abil tõestada, et

323*. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = -2;$

324*. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = -1;$

325*. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2 + x}{x} = 1;$

326*. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2(x + 3)}{x^2 + 7} = 1;$

327*. $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a;$

328*. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{4x - 3}{x^2 + 7} = -1;$

329*. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} 2\sin x = \sqrt{2}$;

333*. $\lim\limits_{x \to 0} (\sin 2x + \cos 4x) = 1$;

330. $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$;

334. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 1}{2(x + 1)} = \frac{1}{4}$;

331. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{3}{5}$;

335*. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}$;

332*. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2(x + 3)}{x^2 + 7} = \frac{6}{7}$;

336*. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x + 1}{x + 3} = -\frac{1}{2}$.

337. Ülesannetes 323, 324, 325, 329 ja 333 arvutada

$\delta(2)$, $\delta(1)$, $\delta(0,1)$, $\delta(0,01)$, $\delta(10^{-7})$.

338. Ülesannetes 326 ja 328 arvutada $\delta(7)$, $\delta(\frac{1}{7})$, $\delta(7^{-3})$, $\delta(7^{-5})$.

Funktsiooni piirväärtuse definitsiooni abil tõestada, et

339*. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = \infty$;

341*. $\lim\limits_{x \to 3} \left| \frac{x}{x - 3} \right| = \infty$;

340*. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{(x + 1)^2} = -\infty$;

342*. $\lim\limits_{x \to 0} \left| \frac{1 + 2x}{x} \right| = \infty$.

343. Ülesannetes 340 ja 341 arvutada $\delta(1)$, $\delta(10)$, $\delta(10^5)$ ja $\delta(10^8)$.

Esitada võrratuse abil järgmised sümboolselt antud piirväärtused.

344. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.

347. $\lim\limits_{x \to 0} \beta(x) = 0$.

345. $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -2$.

348. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

346. $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$.

349. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

350. $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \infty$.

351. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3}{x + 2} = \frac{1}{4}$.

352. $\lim\limits_{x \to 1} \arctan(x - 1) = 0$.

353. $\lim\limits_{x \to 0} \left|\frac{x + 2}{x}\right| = \infty$.

__Piirväärtuse olemasolu kriteerium.__ Suurus A on funktsiooni $f(x)$ piirväärtus punktis a parajasti siis, kui iga jada $x_n \in X$ korral, kus $x_n \neq a$ ning $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, funktsiooni väärtuste jada $f(x_n)$ läheneb suurusele A, s.t.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

__Ülesanded.__

Näidata, et järgmised piirväärtused ei eksisteeri.

354. $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{3}{x}$.

355. $\lim\limits_{x \to 3} \cos \frac{1}{x - 3}$.

356.* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{x \sin \frac{1}{x}}$.

§ 3. Piirväärtuste arvutamine.

Funktsiooni piirväärtuse arvutamisel kehtivad § 1 omadused 1) - 4) ja a) - g), kui need jadad x_n ja y_n asendada vastavalt funktsioonidega $f(x)$ ja $g(x)$ ning $\lim\limits_{n \to \infty}$ asemel kirjutada $\lim\limits_{x \to a}$.

Olgu hulk X funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond ja a hulga X kuhjumispunkt. Piirväärtuse

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

arvutamisel võib esineda kaks juhtu.

1) $a \in X$. Sel korral, kui $f(x)$ on elementaarfunktsioon, kehtib võrdus (vt. § 6 valemid (15) ja (16))

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ehk ($\lim_{x \to a} x = a$ tõttu)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x).$$

Seega sel juhul

$$A = f(a),$$

s.t. elementaarfunktsiooni $f(x)$ piirväärtus A punktis a on võrdne funktsiooni väärtusega punktis a, näiteks

$$\lim_{x \to a} \alpha^x = \alpha^a,$$

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a,$$

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a,$$

$$\lim_{x \to a} \tan x = \tan a \quad (a \neq k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

2) $a \notin X$. Sel korral funktsiooni piirväärtuse arvutamiseks rakendatakse omadusi 1) - 4) ja a) - g). Sageli tuleb nende omaduste rakendamiseks eelnevalt funktsiooni (analüütilist) esitusvalemit sobivalt teisendada, sest enamasti sel korral) esinevad määramatused tüüpi $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞} jt. Eksimiste vältimiseks tuleb esinev määramatus märkida avaldise järel võrdusmärgi alla, näiteks

(6) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \underset{(\frac{0}{0})}{=} 1,$$

(7) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \underset{(\frac{0}{0})}{=} 1,$$

(8) $$\lim_{x\to 0} (1 + kx)^{\frac{m}{x}} \underset{(1^{\infty})}{=} e^{km},$$

(9) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} \underset{(\frac{0}{0})}{=} 1 \quad (\ln u = \log_e u).$$

Ülesanded.

Leida järgmised piirväärtused elementaarfunktsioonidest.

357. $\lim\limits_{x\to -3} (x^3 - 5x^2 + 2x + 1)$.

358. $\lim\limits_{u\to 6} \left[u \sqrt{u^2 - 20} - \log(u + \sqrt{u^2 - 20})\right]$.

359. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x + 3}$.

360. $\lim\limits_{x\to -1} (x^5 + 5^{x+1} + 2)$.

361. $\lim\limits_{x\to 2} \log(2 + 2x + x^2 - x^3)$.

362. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x + \cos 2x)$.

363. $\lim\limits_{x\to 1} \arccos(\log x)$.

364. $\lim\limits_{x\to e} \arcsin(\ln \frac{x}{e})$.

365. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 4\tan x}{2 - x - 2x^4}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\tan 2x}$

Piirväärtused

(10) $$\lim \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kus P(x) ja Q(x) on x suhtes polünoomid, arvutatakse järgmiselt. Kui $Q(a) \neq 0$, siis on tegemist juhuga 1) ja seega

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} .$$

Kui $Q(a) = 0$ ja $P(a) \neq 0$, siis kasutame omadust g). Kui $Q(a) = P(a) = 0$, siis on tegemist määramatusega tüüpi $\frac{0}{0}$. Sel korral piirväärtuse (10) arvutamisel tuleb lugejat ja nimetajat jagada teguriga x-a nii mitu korda, kuni enam ei esine määramatust. Taandamine teguriga x-a on lubatud, sest $x-a \neq 0$ (vt. piirväärtuse definitsiooni). Polünoomide P(x) ja Q(x) tegurid eraldatakse Vieta valemite ja Horneri skeemi abil, arvestades, et arv a on nende polünoomide nullkohaks.

Näide 9. Arvutame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}.$$ $\frac{2x-3}{2x+1} = \frac{1}{5}$

Siin $P(x) = x^2 - 3x + 2$ ja $Q(x) = x^2 + x - 6$. Et $P(2) = Q(2) = 0$, siis on lahenduskäik järgmine.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 1}{x + 3} = \frac{1}{5} .$$

Ülesanded.

Leida järgmised piirväärtused.

367. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

368. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$.

369. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}$.

370. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x + \cancel{10}}$.

371. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3} - \dfrac{1}{1-x} \right)$.

372. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

373. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$.

Piirväärtuse arvutamisel irratsionaalsetest avaldistest on mõnikord sobiv neid teisendada ratsionaalseteks avaldisteks muutuja vahetuse teel.

Näide 10. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + 2x}}{1 - \sqrt{1 + 2x}}$$

muutuja vahetuse abil.

Teeme muutuja vahetuse

$$1 + 2x = u^6,$$

mis taandab ülesande piirväärtuse (10) arvutamisele. Seega

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + 2x}}{1 - \sqrt{1 + 2x}} \underset{\substack{\left(\frac{0}{0}\right) \\ (1+2x=u^6)}}{=} \lim_{u \to 1} \frac{1 - u^2}{1 - u^3} = \lim_{u \to 1} \frac{(1-u)(1+u)}{(1-u)(1+u+u^2)} =$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{1 + u}{1 + u + u^2} = \frac{2}{3}.$$

Ülesanded.

Leida järgmised piirväärtused.

374. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2 - \sqrt{x - 1}}{x - 5}.$

375. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}.$

376. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$

377. $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}.$

378. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x + 1)^2}.$

379. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$

380. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + x^2}}{x^2}$

381. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - (x + 1)}{1 - \sqrt{x + 1}}.$

Enamikul juhtudel piirväärtuste arvutamisel irratsionaalsetest avaldistest on otstarbekohane viia irratsionaalsus üle lugejast nimetajasse või vastupidi, nimetajast lugejasse.

Näide 11. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x}.$$

Siin esineb määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$. Piirväärtuse leidmiseks viime irratsionaalsuse lugejast nimetajasse. Seega

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - (1 - x)}{x\left[\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Ülesanded.

Arvutada piirväärtused.

382. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

383. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

386. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

387. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{1-\sqrt{1+\tan x}}$.

388. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

389. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

390. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

391. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$.

392. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

Piirväärtuste arvutamisel avaldistest, mis sisaldavad trigonomeetrilisi funktsioone või arkusfunktsioone, kasutatakse piirväärtusi (6) ja (7). Sageli tuleb eelnevalt teha muutuja vahetusi. Näiteks juhul $x \to a \neq 0$ on sobiv teha muutuja vahetus $x - a = u$ või $x - a = tu$, kus t on sobivalt valitud arv. Arkusfunktsioonide korral, kui $x \to 0$, on sobivaks muutuja vahetuseks arcsin x = u või arctan x = u jne.

Näide 12.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x\sin(x+3)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x\sin(x+3)} \underset{(u=x+3)}{=}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} \cdot \lim_{x\to -3} \frac{x-3}{x} = 1.2 = 2.$$

Näide 13.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{\arcsin(x+1)} \underset{(u=x+1)}{=}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\arcsin u} \cdot \lim (x^2-x+1) \underset{(v=\arcsin u)}{=}$$

$$= \lim_{v\to 0} \frac{\sin v}{v} \cdot 3 = 1.3 = 3.$$

Näide 14.

$$\lim_{x\to 1} \left(\sin \frac{x-1}{2} \cdot \tan \frac{\pi x}{2}\right) \underset{\substack{(0\cdot\infty) \\ (x-1=2u)}}{=}$$

$$= \lim_{u\to 0} \left[\sin u \tan \frac{\pi(1+2u)}{2}\right] =$$

$$= \lim_{u\to 0} \left[\sin u \tan(\frac{\pi}{2} + \pi u)\right. = -\lim(\sin u \cot \pi u) =$$

$$= -\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{\tan \pi u} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\lim \frac{\frac{\sin u}{u}}{\frac{\tan \pi u}{u}\cdot\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

Näide 15.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x} \underset{(\frac{0}{0})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin 2x} \lim_{x\to 0} (1+\cos x+\cos^2 x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \frac{x}{\sin 2x}\, 3 =$$

$$= 3 \lim_{x\to 0} {\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}^{2} \frac{1}{4} \frac{2x}{\sin 2x} = 3.1.\frac{1}{4}.1 = \frac{3}{4}.$$

Ülesanded.

Arvutada piirväärtused.

393. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}$.

394. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{7x}$.

395. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$.

396. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$.

397. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{|x|}} \sin \frac{\pi}{2^{\frac{1}{|x|}}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

399. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

400. $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$.

401. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$.

402. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1-(\frac{x}{\pi})^2}$.

403. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$.

404. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

405. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

406. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{\arctan(c+2)}$.

411. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x - \dfrac{1}{\cos x})$.

407. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{\sin x}{2x}}$.

408. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - \arcsin x}{4x + \arctan x}$.

409. $\lim\limits_{x\to 3} (\sin \dfrac{x-3}{2} \tan \dfrac{\pi x}{6})$.

414. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x} - \sqrt[3]{1-\tan x}}{\sin x}$.

410. $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x - \dfrac{2}{\sin 2x})$.

415. $\lim\limits_{x\to 0} \cot 2x.\cot(\frac{\pi}{2} - x)$.

Määramatusi tüüpi 1^∞ on sobiv taandada piirväärtusele(8).

Näide 16. Kasutades valemit (8), leiame

$$\lim_{x\to 0} (1 - 3\tan^2 x)^{\cot^2 x} \underset{\substack{(1^\infty) \\ (u=\tan^2 x)}}{=} \lim_{u\to 0} (1 - 3u)^{\frac{1}{u}} = e^{-3}.$$

Ülesanded.

Arvutada piirväärtused.

416. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

417. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan x)^{\cot x}$.

418. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - 3\tan^2 x)^{\cot^2 x + \ln 3}$.

419. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

420. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

421. $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin 2}}$.

422. $\lim_{x\to 0} \sqrt[2x]{1 + 5x}$.

423. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$.

§ 4. Ühepoolsed piirväärtused.

Olgu a funktsiooni f(x) määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Arvu A nimetatakse funktsiooni f(x) parempoolseks piirväärtuseks punktis a, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune arv $\delta > 0$, et kehtib võrratus (1) niipea, kui

(11) $$0 < x - a < \delta$$

ja kirjutatakse

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A \quad \text{või } f(a+) = A.$$

Analoogiliselt võrratusega

(12) $$0 < a - x < \delta$$

defineeritakse vasakpoolne piirväärtus punktis a ja kirjutatakse

$$\lim_{x\to a-} f(x) = A \quad \text{või } f(a-) = A.$$

Võrratus (11) on samaväärne võrratusega

$$a < x < a + \delta$$

ja võrratus (12) - võrratusega

$$a - \delta < x < a.$$

Seega geomeetriliselt tähendab võrratus (11) argumendi x lähenemist x-teljel punktile a paremalt, võrratus (12) - aga vasemalt.

Arvu A nimetatakse funktsiooni f(x) piirväärtuseks kohal ∞, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune arv $N = N(\varepsilon) > 0$, et kehtib võrratus (1), niipea kui

(13) $$x > N$$

ja kirjutatakse

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Analoogiliselt võrratusega

(14) $$x < -N$$

defineeritakse piirväärtus

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Võrratuste (4), (5), (11), (12), (13), (14) abil defineeritakse ka piirväärtused juhtudel $A = \infty$ ja $A = -\infty$.

Teoreem. Piirväärtus

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

eksisteerib parajasti siis, kui

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

Ühepoolsete piirväärtuste arvutamisel võib kasutada paragrahvis 3 antud võtteid, asendades seal piirväärtuse ühepoolse piirväärtusega.

Tähtsamad ühepoolsed piirväärtused:

(a)
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{kui} \quad 0<a<1, \\ \infty, & \text{kui} \quad a>1; \end{cases} \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{kui} \quad 0<a<1, \\ 0, & \text{kui} \quad a>1; \end{cases} \end{array}\right.$$

(b)
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{kui} \quad 0<a<1, \\ \infty, & \text{kui} \quad a>1; \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = \begin{cases} \infty, & \text{kui} \quad 0<a<1, \\ -\infty, & \text{kui} \quad a>1; \end{cases} \end{array}\right.$$

(c) $\lim\limits_{x\to-1+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to-1+} \arccos x = \pi$, $\lim\limits_{x\to 1-} \arccos x = 0$;

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$;

(g) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}$.

Ülesanded.

424. Kirjutada võrratuste abil järgmised piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = 1$.

2) $\lim\limits_{x\to -2+} g(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to -2-} g(x) = 4$.

3) $\lim\limits_{x\to 0+} h(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0-} h(x) = -1$.

4) $\lim\limits_{x\to -5+} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -5-} \alpha(x) = 0$.

5) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$.

6) $\lim\limits_{x\to \infty} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha(x) = 0$.

7) $\lim\limits_{|x|\to \infty} f(x) = A$.

8) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$.

9) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

10) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.

11) $\lim\limits_{|x|\to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{|x|\to \infty} f(x) = -\infty$.

<u>Näide 17</u>. Tõestame ühepoolse piirväärtuse definitsiooni abil, et $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{arccot} \frac{1}{x} = \pi$.

Võtame suvalise $\varepsilon > 0$, siis peab kehtima

$$\left|\operatorname{arccot} \frac{1}{x} - \pi\right| = \pi - \operatorname{arccot} \frac{1}{x} < \varepsilon,$$

niipea kui $0 < -x < \delta$. Lähtevõrrandist saame

$$0 < \pi - \operatorname{arccot} \frac{1}{x} < \varepsilon$$

(vt. lk. 36 funktsiooni $y = \operatorname{arccot} x$ muutumispiirkonda) ehk

$$\pi > \operatorname{arccot} \frac{1}{x} > \pi - \varepsilon.$$

Seega kootangensi kahanemise tõttu

$$-\infty < \frac{1}{x} < \cot(\pi - \varepsilon).$$

Võrratuse pööramiseks on vaja teada $\cot(\pi - \varepsilon)$ märki. Kui võtame $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, siis

$$\cot(\pi - \varepsilon) = -\cot \varepsilon < 0$$

ja võime kirjutada

$$\infty > -\frac{1}{x} > \cot \varepsilon > 0,$$

kust

$$0 < -x < \frac{1}{\cot \varepsilon} = \tan \varepsilon .$$

Siit näeme, et kui $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, siis $\delta = \tan \varepsilon$. Kuna arvu δ võime alati vähendada, siis δ leidmiseks mis tahes ε jaoks võib oletada näiteks, et $\delta \leq 1$. Seega

$$\delta = \min (1, \tan \varepsilon).$$

Ülesanded.

Ühepoolse piirväärtuse definitsiooni põhjal tõestada, et

425*. $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$;

426*. $\lim\limits_{x\to 1-} \sqrt{1 - x^3} = 0$;

427*. $\lim\limits_{x\to 0+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$;

428*. $\lim\limits_{x\to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$;

429*. $\lim\limits_{x\to 1} \arccos x = 0$;

430*. $\lim\limits_{x\to -1+} \arccos x = \pi$;

431*. $\lim\limits_{|x|\to \infty} \frac{2}{x^2 + 4} = 0$;

432*. $\lim\limits_{|x|\to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = 1$;

433*. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x + 2}{1 - 2x} = -\frac{1}{2}$;

434*. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x + 2}{1 - 2x} = -\frac{1}{2}$;

435*. $\lim\limits_{|x|\to \infty} (x^2 + 4x) = \infty$;

436*. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = \infty$;

437*. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = -\infty$;

438*. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - 3x^2) = -\infty$;

439*. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x - 3x^2) = -\infty$.

Näide 18.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -\lim_{x\to 2}(x+2) = -4.$$

Näide 19.

$$\lim_{x\to 0+}\left[x\ln(1+e^{\frac{1}{x}})\right] \underset{\substack{(0\cdot\infty)\\ (u=\frac{1}{x})}}{=} \lim_{u\to\infty}\frac{\ln(1+e^u)}{u} =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\frac{\ln e^u(e^{-u}+1)}{u} = 1 + \lim_{u\to\infty}\frac{\ln(e^{-u}+1)}{u} = 1.$$

Näide 20. Arvutada funktsiooni

$$f(x) = \frac{3}{x}\left[\frac{x}{4}\right]$$

ühepoolsed piirväärtused punktis $x = 0$.

Lahendus. Et iga a korral on $a \leqslant [a] < a + 1$, siis

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kui } 0 < x < 4, \\ -\frac{3}{x}, \text{kui } -4 < x < 0, \end{cases}$$

ja sellepärast

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \infty.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmiste funktsioonide ühepoolsed piirväärtused punktides $x = a$ ja $x = b$.

440. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3x+2, & \text{kui } 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$ $\quad a = 1,\ b = 2.$

441. $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } -1 < x \leqslant 2, \\ 2x+1, & \text{kui } 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$ $\quad a = 0,\ b = 2.$

442. $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{kui } x < 0, \\ 10, & \text{kui } x = 0, \\ x, & \text{kui } 0 < x < 1, \\ 3, & \text{kui } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$ $a = 0$, $b = 1$.

443. $\varphi(x) = \begin{cases} [x], & \text{kui } x \leqslant 0, \\ \{x\}, & \text{kui } x > 0, \end{cases}$ $a = -1$, $b = 1$.

444. $\psi(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{kui } x \leqslant 0, \\ [x], & \text{kui } x > 0, \end{cases}$ $a = -1$, $b = 1$.

Arvutada piirväärtused.

445. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{|\sin x|}{x}$.

446. $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{\sin x}{|x|}$.

447. $\lim\limits_{x \to 2+} \frac{|x - 2|}{x - 2}$.

448. $\lim\limits_{x \to 2-} \frac{|x - 2|}{x - 2}$.

449. $\lim\limits_{x \to 3+} \frac{x}{x - 3}$.

450. $\lim\limits_{x \to 3-} \frac{x}{x - 3}$.

451. $\lim\limits_{x \to -3+} \frac{x^2 - 9}{|x + 3|}$.

452. $\lim\limits_{x \to -3-} \frac{x^2 - 9}{|x + 3|}$.

453. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

454. $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

455. $\lim\limits_{x \to 0-} \ln(1 + e^{\frac{1}{x}})$.

456. $\lim\limits_{x \to 0+} \ln(1 + e^{\frac{1}{x}})$.

457. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x}\right]$.

458. $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x}\right]$.

459. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a}\right]$.

460. $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a}\right]$.

Kui on vaja leida kahe x suhtes polünoomide jagatise piirväärtus, kui $|x| \to \infty$, siis on sobiv lugejas ja nimetajas tuua sulgude ette x kõrgeimas astmes. Sama võtet kasutatakse ka irratsionaalavaldisi sisaldavate murdude korral (siinjuures, kui $x \to -\infty$, on sobiv teha muutuja vahetus $x = -u$).

<u>Näide 21.</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2}{(x+1)^3} \underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3-\frac{2}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x})^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\,\frac{3-o(1)}{1+o(1)} = 0.3 = 0.$$

<u>Näide 22.</u>

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5+1} - \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x^2+4}+\sin x} \underset{(x=-u)}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-u^5} + \sqrt[3]{u+2}}{\sqrt{u^2+4}-\sin u} \underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{u^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{u^5}-1} + \sqrt[3]{\frac{1}{u^4}+\frac{2}{u^5}}\right)}{u\left(\sqrt{1+\frac{4}{u^2}} - \frac{\sin u}{u}\right)} = \lim_{u\to\infty}\left[u^{\frac{2}{3}}\,\frac{o(1)-1+o(1)}{1+o(1)-o(1)}\right] = -\infty.$$

<u>Ülesanded.</u>

Leida piirväärtused.

461. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2}$.

462. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+\ln 2}{3x+11}$.

463. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+\cos x}{3x+11}$.

464. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-3}{x^3-8x+5}+2^{-x^2}\right).$

465. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{3x-2)^3\,(2x+3)^2}{4x^5+5}.$

466. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin 2}{20+x\sqrt{x}}.$

467. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{x+\sqrt[3]{x}}+3^{\frac{1}{x}}\right).$

468. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$

469. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+2}-x\right).$

470. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}.\right)$

471. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-2x}.$

472. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[4]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^4+4}}.$

473. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt{x^8+x^7+4}-5x}.$

474. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}+\tan 2x}.$

475. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{(x+1)^6+(x+2)^6+\ldots+(x+45)^6}{x^6+6^6+e^{18}+\cot 18}+\dfrac{1}{\log|x|}.$

476. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+5x-6}}{4x-\sqrt{x^2+1}}+4^x\right).$

477. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x).$

478. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x).$

479. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-5x+2}).$

480. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right].$

481. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$

482. $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}).$

Leida võrrandist arvud m ja n.

483. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-mx-n\right)=0.$

484. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-mx-n)=0.$

485. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-mx-n)=0.$

486. $\lim\limits_{|x|\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-mx-n)=0.$

487.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{r}\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k}-mx-n\right]=0$, kus $a_k>0$.

Näide 23. Arvutada

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{5x+\tan 8}.$$

Lahendus. Et

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{x+3}{x-4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

siis

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{\tan 8} = 1.$$

Järelikult on tegemist määramatusega tüüpi 1^{∞}. Teeme muutuja vahetuse $x - 4 = u$, siis

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{5x+\tan 8} \underset{(1^{\infty})}{=} \lim_{|u|\to\infty} \left(\frac{u+7}{u}\right)^{5u+20} =$$

$$= \lim_{|u|\to\infty} \left(1+\frac{7}{u}\right)^{5u} = e^{7\cdot 5} = e^{35}.$$

Leida piirväärtused

488. $\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$.

489. $\lim_{|x|\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$.

490. $\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

491. $\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}$.

492. $\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-1}\right)^{x^2+4}$.

493. $\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}\right)^{x}$.

§ 5. Lõpmata väikeste suuruste võrdlemine.

Olgu $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ lõpmata väikesed mingis piirprotsessis, näiteks $x \to a$, $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$ jne.

1. Kui $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, siis suurust α nimetatakse kõrgemat järku lõpmata väikeseks β suhtes ja kirjutatakse

$$\alpha = o(\beta).$$

Sel korral suurust β nimetatakse madalamat järku lõpmata väikeseks α suhtes.

2. Kui $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$, kus $0 < |A| < \infty$, siis öeldakse, et suurus α on sama järku lõpmata väike, võrreldes suurusega β.

3. Kui $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, siis suurusi α ja β nimetatakse ekvivalentseteks lõpmata väikesteks ja kirjutatakse $\alpha \sim \beta$.

Näiteks, kui $x \to 0$, siis

$$\sin x \sim x, \qquad \tan x \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1 + x) \sim x, \qquad \sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Kõik need ekvivalentsused kehtivad ka siis, kui neis asendada x mis tahes teise lõpmata väikesega.

4. Kui mingi $k > 0$ korral $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = A$, kus $0 < |A| < \infty$, siis öeldakse, et suurus α on k-järku lõpmata väike β suhtes. Sel korral kirjutatakse

$$\alpha \sim A\beta^k,$$

ning suurust $A\beta^k$ nimetatakse suuruse α peaosaks.

Piirväärtuste arvutamisel on eriti olulised ekvivalentsete lõpmata väikeste suuruste järgmised omadused.

5. Jagatise piirväärtuse arvutamisel võime lugeja või nimetaja (või mõlemad) asendada ekvivalentsete lõpmata väi-

kestega, s.t. kui $\alpha \sim \alpha_1$ ja $\beta \sim \beta_1$, siis

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Sellist asendust liidetavates teha ei tohi.

6. Kui $\alpha \sim \alpha_1$ ja $\beta \sim \beta_1$, siis $\alpha\beta \sim \alpha_1\beta_1$.

7. Kahe ekvivalentse lõpmata väikese suuruse vahe on nende mõlemate suhtes kõrgemat järku lõpmata väike, s.t.

$$\text{kui } \alpha \sim \beta, \text{ siis } \alpha - \beta = o(\alpha) \text{ ja } \alpha - \beta = o(\beta).$$

Viimase teoreemi põhjal näiteks

$$\sin x - x = o(x) \text{ ehk } \sin x = x + o(x),$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 - \frac{x}{n} = o(x), \text{ ehk } \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x) \text{ jne.}$$

<u>Näide 24</u>. Omaduse 5 põhjal

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 7x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7},$$

sest $\tan 2x \sim 2x$, $\sin 7x \sim 7x$, kui $x \to 0$.

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x\sin x})}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1,$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\left(\sqrt{\frac{x^2}{16}+1}-1\right)}{\frac{x^2}{2}} = 8 \lim \frac{\frac{x^2}{32}}{x^2} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

<u>Näide 25</u>. Omaduse 7 põhjal

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-2x} - \sqrt{1+x^2}}{x + x^2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{2x}{4} + o(x) - \left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]}{x(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o(1)\right] = -\frac{1}{2},$$

sest $o(x) - o(x^2) = o(x)$ ja $x(1 + x) \sim x$,

$$\text{b) } \lim \frac{\tan x}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\frac{\sin x}{2}+o(\sin x) - 1 - \frac{\sin x}{2}+o(\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x + o(\sin x)} = 1,$$

sest $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(\sin x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\, o(1) = 1.0 = 0.$

Ülesanded.

Kumb järgmisest kahest suurusest on kõrgemat järku lõpmata väike või sama järku?

494. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ja $\beta_n = \frac{1}{n!}$.

495. $\alpha_n = \frac{n^2 - 2}{n^3}$ ja $\beta_n = \frac{n^2 + 4}{2n^3}$.

496. $\alpha(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ ja $\beta(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, kui $x \to 1$.

497. $\alpha(x) = \frac{x + 1}{x^3 + 1}$ ja $\beta(x) = \frac{1}{x}$, kui $|x| \to \infty$.

498. $\alpha(x) = \tan x - \frac{1}{\cos x}$ ja $\beta(x) = \pi - 2x$, kui $x \to \frac{\pi}{2}$.

499. $\alpha(x) = x^3 - 1$ ja $\beta(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, kui $x \to 1$.

Näidata, et

500. $x^2 + 5x^4 \sim x^2$, kui $x \to 0$;

501. $\sin x + \tan 2x \sim 3x$, kui $x \to 0$;

502. $1 - \cos \frac{x}{a} \sim \frac{x^2}{2a^2}$, kui $x \to 0$;

503. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$, kui $x \to \infty$;

504. $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$, kui $|x| \to \infty$;

505. $x^3 - 3x + 2 \sim 3(x - 1)^2$, kui $x \to 1$;

506. $\frac{n + 2}{\sqrt{3n^3 - 3}} \sim \frac{1}{\sqrt{3n}}$, kui $n \to \infty$.

<u>Näide 26</u>. Leida lõpmata väikese

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

peaosa, kui $x \to 0$, ja määrata $\alpha(x)$ järk $\beta(x) = x$ suhtes.

<u>Lahendus.</u>

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}} = \sqrt{x^{\frac{1}{4}}\left[x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{\sqrt{x} + 1}\right]} =$$

$$= \sqrt[4]{x}\sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[4]{x}.$$

Seega $\alpha(x)$ peaosa on $\sqrt[4]{x}$ ja suuruse $\alpha(x)$ järk $\beta(x) = x$

suhtes on $k = \frac{1}{8}$.

Näide 27. Leida lõpmata väikese

$$\alpha_n = \frac{n \arctan(\pi n + 4)}{\sqrt{n^4 + 3n - 4}}$$

peaosa ja määrata α_n järk $\beta_n = \frac{1}{n}$ suhtes.

Lahendus. Et $\beta_n = o(1)$, siis ilmselt $n \to \infty$, seega

$$\alpha_n = \frac{n \arctan(\pi n + 4)}{n^2 \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{n} \quad \frac{\arctan(\pi n + 4)}{1 + o(1)} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Järelikult α_n peaosa on $\frac{\pi}{2} \frac{1}{n}$ ja suuruse α_n järk $\beta_n = \frac{1}{n}$ suhtes on $k = 1$.

Ülesanded.

Leida lõpmata väikese α peaosa $A\beta^k$ ja määrata järk lõpmata väikese β suhtes.

507. $\alpha_n = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 2}} \arcsin \sqrt{\frac{n^2 + \pi n}{2n^2 + n + 3}}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$.

508. $\alpha_n = \frac{\sqrt[4]{n^7 + \ln 3}}{n^3 + 3n^2 + 4} \arccos \frac{1 - n}{2 + n}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$.

509. $\alpha(x) = 2x - 3x^3 + x^5$, $\beta(x) = x$.

510. $\alpha(x) = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$, $\beta(x) = x$.

511. $\alpha(x) = \sin x - \tan x, \qquad \beta(x) = x.$

512*. $\alpha(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x - 1}}, \qquad \beta(x) = x.$

513*. $\alpha(x) = \sqrt{1 + 2x} + \sqrt{x} - 1, \qquad \beta(x) = x.$

514. $\alpha(x) = \sqrt{1 + x^2} \tan \frac{\pi x}{4}, \qquad \beta(x) = x.$

515. $\alpha(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}, \qquad \beta(x) = x.$

516. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{1 + x} - 1), \qquad \beta(x) = x.$

517. $\alpha(x) = 1 - 2\cos(x + \frac{\pi}{3}), \qquad \beta(x) = x.$

518. $\alpha(x) = \sqrt{1 - x^3} \arctan x, \qquad \beta(x) = x - 1.$

519. $\alpha(x) = \frac{x^2 - 1}{x^5 + 1} \arcsin \sqrt{\frac{2x + 1}{x + 3}}, \qquad \beta(x) = x - 1.$

520. $\alpha(x) = \sqrt{\frac{8x^3 - 27}{x^2 + 4}}, \qquad \beta(x) = 2x - 3.$

521. $\alpha(x) = \sqrt{x + 2} - 2\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}, \qquad \beta(x) = \frac{1}{x}.$

522. $\alpha(x) = \frac{\arcsin \frac{\pi}{x}}{x^2 + 2}, \qquad \beta(x) = \frac{1}{x}.$

Kasutades omadusi 5,6 ja 7 arvutada piirväärtused.

523. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x + x^2}.$

524. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{\arctan 7x}.$

525. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x \arcsin 3x}{\sin 3x \arctan 2x}.$

526. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x \tan 5x}{(x - x^3)^2}.$

527. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$.

528. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x + x^2}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)}{\ln(1-x^2)}$.

530*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + \sin ax}{\tan bx}$.

531. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\arctan 5x}$.

532. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 3x}$.

Arvutada järgmised piirväärtused, kasutades omadusi 4–7.

533. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x + 3\arcsin x}{2x - \arctan x}$.

534. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}{\tan x}$.

535. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$.

536. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x - \sin^3 x}$.

537. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 1}$.

538. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 9x}$.

539. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$.

540. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1 - x}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$.

542. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$.

543. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\tan(a+x) - \tan(a-x)}$.

544. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$.

546. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{1 - \sqrt{x}}$.

547. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi}$.

548*. $\lim\limits_{x\to -1} \cos \dfrac{1 + \sin \frac{\pi x}{2}}{\pi(1 + \sqrt[3]{x})^2}$.

549. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}}}{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

550. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x + \sin^2 x}{x^3 - \sin 2x}$.

551. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$.

552*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$.

553. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\arctan 3x} - \sqrt[3]{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x} - \sqrt{1+\arctan 2x}}$.

554. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \tan x}{\frac{\pi}{4} \cos 2x}$.

§ 6. Funktsiooni pidevus.

Olgu X funktsiooni f(x) määramispiirkond ja olgu $a \in X$. Funktsiooni f(x) nimetatakse pidevaks punktis a, kui

(15) $$\lim_{x\to a} f(x) = f(x).$$

Võrdus (15) on samaväärne võrdusega

(16) $$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Tähistades

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

saame, et võrdus (15) on samuti samaväärne võrdusega

(17) $$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Funktsiooni f(x) nimetatakse pidevaks hulgas X, kui ta on pidev hulga X igas punktis.

Funktsiooni f(x) nimetatakse paremalt (vasakult) pidevaks punktis a, kui

$$f(a+) = f(a) \quad (\text{vastavalt } f(a-) = f(a)).$$

Selleks, et funktsioon f(x) oleks pidev punktis a, on tarvilik ja piisav, et ta oleks selles punktis pidev paremalt ja vasakult, s.t. et

$$f(a-) = f(a) = f(a+).$$

Funktsiooni f(x) nimetatakse ühtlaselt pidevaks hulgas X, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline arv $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et sõltumata punktide x ja x' valikust hulgas X kehtib võrratus

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \text{ niipea, kui } |x - x'| < \delta.$$

Viimases definitsioonis arv δ sõltub ainult arvust ε, s.t. ei sõltu punktide x ja x' valikust hulgas X.

Kui funktsioon f(x) ei ole pidev punktis a ja eksisteerivad lõplikud piirväärtused f(a+) ja f(a-), siis nimetatakse punkti a funktsiooni esimest liiki katkevuspunktiks. Kui lisaks

$$f(a+) = f(a-),$$

siis öeldakse, et funktsioonil f(x) on punktis a kõrvaldatav katkevus. Kui aga

$$f(a+) \neq f(a-),$$

siis öeldakse, et punktis a on funktsioonil f(x) hüpe.

Kui vähemalt üks piirväärtustest f(a+) või f(a-) on lõpmatu või ei eksisteeri, siis nimetatakse punkti a funktsiooni teist liiki katkevuspunktiks.

Ülesanded.

Kirjutada võrratuste abil funktsiooni $f(x)$ jaoks:

555. Pidevuse definitsioon punktis a.

556. Paremalt pidevuse definitsioon punktis a.

557. Vasakult pidevuse definitsioon punktis a.

558. Selgitada, mille poolest erineb funktsiooni $f(x)$ pidevuse definitsioon punktis a funktsiooni $f(x)$ piirväärtuse definitsioonist punktis a. Selgitada sama ka paremalt ja vasakult pidevuse jaoks.

Näide 28. Lähtudes pidevuse definitsioonist, tõestada, et funktsioon $y = |x|$ on pidev kõikjal.

Tõestus. Valemi $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$ põhjal võime kirjutada $|\Delta y| = ||x + \Delta x| - |x|| \leqslant |x + \Delta x - x| = |\Delta x|$.

Kui $\Delta x \to 0$, siis ilmselt $\Delta y \to 0$, seega iga x korral on täidetud võrdus (17). Funktsioon $y = |x|$ on pidev kõikjal definitsiooni põhjal.

Näide 29. Milline peab olema arv A , et funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x + A, & \text{kui } x < 1, \\ \arctan x, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$$

oleks pidev punktis $a = 1$.

Lahendus. Meil $f(1-) = 1 + A$, $f(1) = f(1+) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Järelikult arvu A saame võrrandist

$$1 + A = \frac{\pi}{4}.$$

Seega $f(x)$ on pidev punktis $a = 1$, kui $A = \frac{\pi}{4} - 1$.

Näide 30. Näidata, et funktsioon $f(x) = \frac{2}{x} + 5\cos x$ on ühtlaselt pidev hulgas $X = (-3, -\frac{1}{5})$.

Lahendus. Et $-3 < x < -\frac{1}{5}$, siis $\frac{1}{3} < \frac{1}{|x|} < 5$ ja seega

$$\frac{1}{|x\, x'|} < 25.$$

Selle põhjal võime kirjutada

$$|f(x) - f(x')| = \left|2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right) + 5(\cos x - \cos x')\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{|xx'|}\,|x' - x| + 10\left|\sin\frac{x + x'}{2}\sin\frac{x - x'}{2}\right| =$$

$$= \frac{2}{|xx'|}\,|x - x'| + 10\left|\sin\frac{x + x'}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x'}{2}\right| <$$

$$< 50\,|x - x'| + 10\,\frac{|x - x'|}{2} = 55\,|x - x'| < \varepsilon\,.$$

Seega kehtib võrratus

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

niipea kui

$$|x - x'| < \frac{\varepsilon}{55}$$

sõltumata punktide x ja x' valikust hulgas X. Võime valida $\delta = \frac{\varepsilon}{55}$. Järelikult $f(x)$ on ühtlaselt pidev hulgas X.

Ülesanded.

Lähtudes pidevuse definitsioonist, tõestada, et järgmised funktsioonid on pidevad kogu määramispiirkonnas.

559. $y = x^2 + x - 2.$

560. $y = x^3 - 3x + 5.$

561. $y = \dfrac{1}{3x + 2}.$

562. $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

Millistena peab valima arvud a ja b, et järgmised funktsioonid oleksid pidevad kogu määramispiirkonnas?

563. $f(x) = \begin{cases} 3 + ax^2, & \text{kui } x \leqslant 1, \\ x + 1, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$

564. $f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & \text{kui } x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}. \\ a \sin x + b, & \text{kui } -\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \\ \cos x, & \text{kui } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Milline ühepoolne pidevus punktis a on järgmistel funktsioonidel?

565. $y = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \leqslant 1 \\ 2x + 1, & \text{kui } x > 1, \end{cases}$ $a = 1.$

566. $y = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi x}{4}, & \text{kui } x \leqslant 2, \\ 5, & \text{kui } x > 2, \end{cases}$ $a = 2.$

567. $y = \sqrt{x}, \quad a = 0.$

568. $y = [x], \quad a = 4.$

Näidata, et järgmised funktsioonid on ühtlaselt pidevad kogu määramispiirkonnas.

570.* $f(x) = ax + b.$

571. $f(x) = 3\sin x - 4\cos x.$

572.* $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} + 5\cos 3x, \\ X = [1, \infty). \end{cases}$

573.* $f(x) = |x| + \ln 2.$

574.* $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 3 \\ X = (-2, 5). \end{cases}$

575.* $\begin{cases} f(x) = \frac{4}{x} - 9\sin\frac{x}{5} \\ X = (\frac{1}{10}, 2). \end{cases}$

576.* $\begin{cases} f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \\ X = (\frac{1}{5\pi}, \pi). \end{cases}$

Kõrvaldada katkevus järgmistel funktsioonidel.

577. $f(x) = \frac{\sin x}{x}.$

578. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$

579. $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}.$

580. $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}.$

581. $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x}. \\ X = (-1, 1) \end{cases}$

582. $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & \text{kui } x < 1, \\ x - 1, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$

Millised katkevused on järgmistel funktsioonidel?

583. $y = \sin\frac{\pi}{2x}.$

584. $y = \arctan\frac{1}{x}.$

585.* $y = \frac{\sin x}{x^2}.$

586. $y = \frac{\sin^2 x}{x}.$

587. $y = \frac{\cos x}{x}.$

588. $y = \frac{1}{\log|x|}.$

589. $y = 2^{\frac{-1}{x-3}}$.

592. $y = \dfrac{1}{\exp \dfrac{1}{1 - x}}$.

590. $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$.

593. $y = 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}$.

591. $y = \exp \dfrac{1}{1 - x}$.

594. $y = \dfrac{1}{2 + \cot^2 x}$.

IV. FUNKTSIOONI TULETIS JA DIFERENTSIAAL.

§ 1. Funktsiooni tuletis.

Olgu X funktsiooni

$$y = f(x)$$

määramispiirkond ja olgu Δx argumendi $x \in X$ muut piirkonnas X. Vahet

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ kasvuks punktide x ja $x + \Delta x$ vahel.

Kui eksisteerib piirväärtus

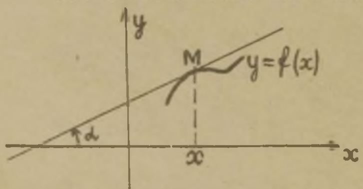
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ tuletiseks punktis x ja kirjutatakse

$$y' = f'(x) \text{ ehk } y'_x = f'_x(x).$$

Geomeetriliselt on tuletis $y' = f'(x)$ funktsiooni $y = f(x)$ puutuja tõus punktis x, s.t. (vt. joon.20)

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha .$$



Joon. 20.

Tehetega seotud tuletise arvutamise reeglid.

Kui c on konstant ja funktsioonidel $v = v(x)$, $u = u(x)$ on olemas tuletised punktis x, siis selles punktis x kehtivad võrdused

1° $(cu)' = cu'$,

2° $(u \pm v)' = u' \pm v'$,

3° $(uv)' = u'v + uv'$,

4° $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Tuletise arvutamise põhivalemid.

1. $c' = 0$ $(c = \text{const.})$.
2. $x' = 1$.
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $(x^a)' = ax^{a-1}$.
6. $(a^x)' = a^x \ln a$.
7. $(e^x)' = e^x$.
8. $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(x \neq 0,\ a > 0)$.
9. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.
10. $(\sin x)' = \cos x$.
11. $(\cos x)' = -\sin x$.
12. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
13. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$.
15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$.
16. $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.
17. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

18. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

19. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

20. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

21. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

22. $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$

23. $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $(|x| > 1).$

24. $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1 - x^2}$ $(|x| < 1).$

25. $(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1 - x^2}$ $(|x| > 1).$

Piirväärtust

$$f'(x+) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ ja } f'(x-) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

nimetatakse vastavalt funktsiooni $y = f(x)$ <u>parempoolseks</u> ja <u>vasakpoolseks</u> <u>tuletiseks</u> punktis x.

Tuletise $f'(x)$ olemasoluks punktis x on tarvilik ja piisav, et kehtiks võrdus

$$(1) \qquad f'(x-) = f'(x+).$$

Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev punktis x ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \infty ,$$

siis öeldakse, et funktsioonil $y = f(x)$ on punktis x <u>lõpmatu</u> <u>tuletis</u>. Geomeetriliselt tähendab see, et punktis x funktsiooni $y = f(x)$ graafikule tõmmatud puutuja on risti x-teljega.

Ülesanded.

595. Määrata argumendi x muut Δx ja funktsiooni vastav kasv Δy, kui $y = \log x$ ja x muutub väärtuselt 1 väärtusele 100.

596. Argument x saab muudu Δx. Arvutada funktsiooni kasv Δy, kui a) $y = ax + b$, b) $y = a^x$.

597. Tõestada võrdused

a) $\Delta[cf(x)] = c\,\Delta f(x)$;

b) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

c) $\Delta[f(x)\,g(x)] = g(x+\Delta x)\,\Delta f(x) + f(x)\,\Delta g(x)$.

Näide 1. Lähtudes tuletise definitsioonist, arvutame funktsiooni $y = 2^x$ tuletise kohal $x = 3$. Saame

$$\Delta y = 2^{3+\Delta x} - 2^3 = 2^3(2^{\Delta x} - 1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2^3\,\frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

$$y'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2^3 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 2^3 \ln 2.$$

Lähtudes tuletise definitsioonist, leida järgmiste funktsioonide tuletised.

598. $y = x^2$.

599. $y = x^3$.

600. $y = \sqrt[3]{x}$.

601. $y = \frac{1}{x^2}$.

602. $y = \cos x$.

603. $y = \tan x$.

604. $y = \cot x$.

605. $y = \ln|x|$.

Lähtudes tuletise definitsioonist, arvutada järgmised tuletised,

606. $f'(0)$, kui $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv.} \end{cases}$

607. $f'(\frac{\pi}{3})$, kui $f(x) = \sin x$.

608. $f'(1)$, kui $f(x) = \ln x$.

609. Olgu punkti sirgjoonelisel liikumisel tee pikkus s antud aja t funktsioonina järgmiselt:

$$s = t^3 + \frac{3}{t}.$$

Leida punkti keskmine kiirus ajavahemikus $t = 4$ kuni $t = 4 + \Delta t$, võttes $\Delta t = 2;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}03$. Samuti leida punkti liikumise kiirus ajamomendil $t = 4$.

Näide 2. Arvutame funktsiooni

$$y = \sqrt{2x} + \ln x^2 + \frac{3}{4x^2}$$

tuletise. Reegli 2° põhjal

$$y' = (\sqrt{2x} + 2\ln|x| + \frac{3}{4}x^{-2})' = (\sqrt{2x})' + (2\ln|x|)' + (\frac{3}{4}x^{-2})'.$$

Reegli 1° põhjal

$$y' = \sqrt{2}(\sqrt{x})' + 2(\ln|x|)' + \frac{3}{4}(x^{-2})'.$$

Ning lõpuks, kasutades põhivalemeid 4, 9 ja 5, saame

$$y' = \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\frac{1}{x} + \frac{3}{4}(-2)x^{-3} = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^3}.$$

Saadud tuletis on määratud piirkonnas $X = (0, \infty)$. Käesoleval juhul langevad tuletise ja funktsiooni määramispiirkonnad kokku.

Ülesanded.

Kasutades reegleid 1° - 4° ja põhivalemeid 1-25, arvutada tuletised (x, t, z, u on argumendid, a, b, c, α on konstandid).

610. $y = x^5 - 2x^3 + \frac{1}{4}x - 1.$

611. $y = at^2 + bt + c.$

612. $y = \frac{-5x^3}{a + 1}.$

613. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2 + (3x)^2.$

614. $y = \frac{2x + a}{\sqrt{1 + a^2}} + \sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}.$

615. $y = 3x - (2x) + \frac{1}{x^3}.$

616. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}.$

617. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x\sqrt[3]{x}}.$

618. $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}.$

619. $y = \frac{a + bz}{b + cz}.$

620. $y = \frac{5x^2 - x^3 + 1}{x^2}$

621. $y = 2(x+1)e^x.$

622. $y = x^5 e^x + e^\alpha.$

623. $y = \frac{e^x}{x^2}.$

624*. $y = e^{2x} + e^{x+2} + e^{-x}.$

625. $y = (x^2 - 2x + 2)5^x.$

626. $y = x \ln x.$

627. $y = \frac{x^2}{\ln x} + \ln \frac{1}{x}.$

628. $y = xe^x + 2\log|x| - \frac{\ln|x|}{x}.$

629. $y = x^2 \log_3 x.$

630. $y = \frac{x - 1}{\log_2 x}.$

631. $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$

632. $y = \ln(ex) + \log e.$ 635. $y = e^{3x}\ln(3|x|).$

633. $y = \frac{x}{4^x} + 2^{3x}.$ 636. $y = (\frac{a}{b})^x (\frac{b}{x})^a \quad (a>0,\ b>0).$

634. $y = x^3 - 3^x.$

637. $y = \ln x \log x - \ln a \log_a x.$

638. $y = 2\sin x + 3\cos x.$

639. $y = \tan x - \cot x + 3.$

640. $y = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t.$

641. $y = \arctan x + \operatorname{arccot} x.$

642. $y = x \arcsin x + 3\operatorname{arccot} x.$

643. $y = \frac{\sin u}{u} + \frac{u}{\sin u}.$

644. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x.$

645. $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$

646. $y = \frac{x}{1 + x^2} - \arctan x.$

647. $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}.$

648. $y = \frac{x}{\tan x} + \ln (\sqrt{\pi}\, e^{\frac{x+1}{x-1}}).$

649. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x.$ 650. $y = \frac{x^3}{\operatorname{ch} x}.$

651. $y = \operatorname{th} x + \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x} + \sqrt{2x}.$

652. $y = \sin 2t + (2t)^2 + \arcsin(\sin t)$.

653. $y = \arctan x - \operatorname{arth} x$.

654. $y = \arcsin x \operatorname{arsh} x$.

655. $y = \arccos x + \arccos \alpha$.

656. $y = \dfrac{\operatorname{arch} x}{x} \sqrt{\log_a(1 + c)}$.

657. $y = \dfrac{\operatorname{arcth} x}{1 - x^2}$.

<u>Näide 3</u>. Arvutame funktsiooni

$$y = \begin{cases} \arctan x, \text{ kui } |x| \leqslant 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, \text{ kui } |x| > 1 \end{cases}$$

tuletise. Kui $-1 < x < 1$, siis

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} .$$

Kui $x \in \{(-\infty, -1), (1, \infty)\}$, siis

$$y' = (\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x)' + (\frac{x - 1}{2})' = \frac{1}{2} .$$

Uurime tuletise olemasolu punktides $|x| = 1$. Punktis $x = -1$

saame

$$y'(-1-) = \lim_{x \to -1-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y'(-1+) = \lim_{x \to -1+} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Seega

$$y'(-1-) = y'(-1+).$$

Tingimuse (1) põhjal

$$y'(-1) = \frac{1}{2}.$$

Analoogiliselt punktis $x = 1$ on $y'(1) = \frac{1}{2}$. Järelikult

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{kui } |x| \leqslant 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{kui } |x| > 1. \end{cases}$$

Ülesanded.

Arvutada tuletised.

658. $y = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0; \\ x^2, & \text{kui } x \geqslant 0. \end{cases}$

659. $y = \begin{cases} 1 - x, & \text{kui } x < 1; \\ (1-x)(2-x), & \text{kui } 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ -(2-x), & \text{kui } x > 2. \end{cases}$

660. $y = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } x < 1; \\ \ln x, & \text{kui } x \geqslant 1. \end{cases}$

661. $y = \operatorname{sgn} x.$

662. $y = [x]$.

Näide 4. Arvutame funktsiooni

(2) $$y = |x^2 - 4|$$

tuletise. Absoluutväärtuse definitsiooni põhjal

$$y = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kui } |x| > 2, \\ 4 - x^2, & \text{kui } |x| \leqslant 2. \end{cases}$$

Seega

$$y' = \begin{cases} 2x, & \text{kui } |x| > 2, \\ -2x, & \text{kui } |x| < 2. \end{cases}$$

Punktides, kus $|x| = 2$, funktsioonil (2) tuletist ei ole, sest seal tingimus (1) ei ole täidetud. Tõepoolest, punktis $x = 2$ on

$$y'(2-) = \lim_{x \to 2-} (-2x) = -4,$$

$$y'(2+) = \lim_{x \to 2+} 2x = 4.$$

Seega

$$y'(2-) \neq y'(2+).$$

Analoogiliselt saame ka, et punktis $x = -2$ tingimus (1) ei ole täidetud. Järelikult tuletis on määratud piirkonnas

$$X = (-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty).$$

Funktsiooni (2) tuletise võib arvutada ka järgmiselt. Kasutades funktsiooni $y = \operatorname{sgn} x$, võime kirjutada

$$\operatorname{sgn}(x^2 - 4) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| > 2, \\ 0, & \text{kui } |x| = 2, \\ -1, & \text{kui } |x| < 2. \end{cases}$$

Järelikult

$$y = |x^2 - 4| = (x^2 - 4) \operatorname{sgn}(x^2 - 4).$$

Seega, kui $x \in \{(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)\}$, on $\operatorname{sgn}(x^2 - 4)$ konstant ning reegli 1° põhjal selles piirkonnas on siis

$$y' = 2x \operatorname{sgn}(x^2 - 4).$$

Punktides $|x| = 2$ tuletist pole, sest $\operatorname{sgn}(x^2 - 4)$ muudab neis punktides märki, mistõttu võrdus (1) ei saa seal olla täidetud.

Ülesanded.

Arvutada järgmiste funktsioonide tuletised ja leida tuletiste määramispiirkonnad X.

663. $y = |x|$.

664. $y = |x + 1|$.

665. $y = |x^2 - 1|$.

666. $y = x|x|$.

667. $y = |x^2 - 3x + 2|$.

668. $y = |x - x^3|$.

669. $y = |x^2 \sqrt[3]{x}|$.

670. $y = |x^2 + x + 1| - (x+1)$.

671. $y = \dfrac{1}{|x|}$.

672. $y = \dfrac{1}{|2 - x^2|}$.

673. $y = |\ln x|$.

674. $y = |\ln|x||$.

675. $y = |\log_a x^2| + |\log_2 a^x|$.

676. $y = |\sin x|$.

677. $y = |\cos x|$.

678. $y = x|\cos x|$.

679. $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1), & \text{kui } |x| \leq 1; \\ |x| - 1, & \text{kui } |x| > 1. \end{cases}$

680. $y = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{kui } |x| \leq 1; \\ x^2 - 2x + 2, & \text{kui } |x| > 1. \end{cases}$

681. $y = |\tan x| + |\cot x|$.

682. $y = \dfrac{|\sin x|}{x} + 4$.

Liitfunktsiooni tuletise arvutamisel kasutatakse järgmist reeglit. Kui funktsioonidel $y = f(u)$, $u = g(x)$ on olemas lõplikud tuletised y'_u ja u'_x, siis liitfunktsioonil $y = f[g(x)]$ on tuletis

(3) $$y'_x = y'_u u'_x$$

ehk

(4) $$y'_x = f'_{g(x)} g'_x(x).$$

<u>Näide 5</u>. Arvutame funktsiooni

$$y = \ln(x + \cos x)$$

tuletise. Võtame

$$u = x + \cos x,$$

siis

$$y'_u = \frac{1}{u} = \frac{1}{x + \cos x},$$

$$u'_x = 1 - \sin x.$$

Valemi (3) põhjal on seega

$$y'_x = \frac{1 - \sin x}{x + \cos x}.$$

<u>Näide 6</u>. Arvutame funktsiooni

$$y = \sin \sqrt{1 + x^2}$$

tuletise. Selleks kirjutame funktsiooni üles järgmiselt

$$y = \sin u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = 1 + x^2.$$

Nüüd, kasutades põhivalemeid, saame valemi (3) abil, et

$$y'_x = y_u u_x = y_u(u_v v_x) = \cos u \frac{1}{2\sqrt{v}} 2x =$$

$$= \cos\sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,2x = \frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Näide 7. Funktsiooni

$$y = \arctan \ln(ax+b)$$

tuletise arvutamiseks eraldame mõttes vahepealsed muutujad

$$u = \ln(ax+b), \quad v = ax+b.$$

Valemi (4) abil saame siis (kasutades põhivalemeid 16,9,2)

$$y' = \frac{1}{1+\ln^2(ax+b)} \cdot \frac{1}{ax+b}\, a.$$

Ülesanded.

Arvutada tuletised.

683. $y = (3x-5)^4.$

684. $y = (x+1)(x+2)^2.$

685. $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}.$

686. $y = \sqrt{1-x}\,.$

687. $y = (3-2x)^{\frac{2}{3}}.$

688. $y = (1-x^2)^{10}.$

689. $y = x\sqrt{1+x^2}.$

690. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$

691. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}\,.$

692. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$

693. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$

694. $y = \dfrac{3}{56(2x-1)^7} - \dfrac{1}{24(2x-1)^6} - \dfrac{1}{40(2x-1)^5}.$

695. $y = \sin t + \cos 2t.$

696. $y = \tan \dfrac{x + 1}{2}.$

697. $y = \cos^3 4x.$

698. $y = 3\sin(3x+5).$

699. $y = \cos^2 \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}.$

700. $y = \dfrac{x \sin x}{1 + \tan x}.$

701. $y = \cot \sqrt[3]{1 + x^2}.$

702. $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}.$

703. $y = \tan x - \dfrac{1}{3}\tan^3 x + \dfrac{1}{5}\tan^5 x.$

704. $y = \sin(\sin x).$

705. $y = \sqrt{\tan \dfrac{x}{2}}.$

706. $y = \sin^n x \cos nx.$

707. $y = \cos^n x \sin nx.$

708. $y = a^{\sin^3 x}$ $(a > 0).$

709. $y = 2^{3^x}.$

710. $y = \sin(e^{x^2+3x-2}).$

711. $y = 10^{1-\sin^4 3x}.$

712. $y = e^{\sqrt{\ln x}}.$

713. $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}.$

714. $y = \ln \sin \sqrt{\arctan e^{3x}}.$

715. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$

716. $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$ $(a > 0,\ b > 0).$

717. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ $(a > 0).$

718. $y = \operatorname{th}(\ln x).$

719. $y = \sqrt[4]{(1 + \operatorname{th}^2 x)^3}.$

720. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}.$

721. $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}.$

722. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} \ln\left(\operatorname{cth} \dfrac{x}{2}\right).$

723. $y = \arctan(\operatorname{th} x)$.

724. $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

725. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$.

726. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.

727. $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

728. $y = \arctan(x - \sqrt{1 - x^2})$.

729. $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$.

730. $y = \arctan x^2$.

731. $y = \dfrac{x}{1 + x^2} - \arctan x$.

732. $y = \arccos \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.

733. $y = \arcsin \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$.

734. $y = \arccos \dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$.

735. $y = \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$.

736. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

737. $y = \arctan \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

738. $y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$.

739. $y = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

740. $y = \ln(1 - 2x)$.

741. $y = \ln \arctan \sqrt{1 + x^2}$.

742. $y = \arctan \left[\ln(ax + b)\right]$.

743. $y = \log_2 \left[\log_3(\log_5 x)\right]$.

744. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$.

745. $y = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2(1+x)}$.

746. $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

747. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \ln \dfrac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

748. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

749. $y = \sqrt{x + 1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

750. $y = \ln \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

751. $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

752. $y = \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$.

753. $y = x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right]$.

754. $y = x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$.

755. $y = \cos\frac{\arcsin x}{2}$. 756. $y = \ln\arctan\frac{1}{1 + x}$.

757. $y = \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}$. 758. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

759. $y = \arcsin x^2 + \arccos x^2$.

760. $y = (a - \frac{1}{2})\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$.

761. $y = \sqrt{\cot x} - \sqrt{\cot \alpha}$. 762. $y = \sin 2x + \cos^2 3x$.

763. $y = \operatorname{arch}\ln x$. 764. $y = \operatorname{arth}\tan x$.

765. $y = \operatorname{arsh}\frac{x^2}{a^2}$. 766. $y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln\tan x$.

767. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x} - \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}$

768. $y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arccot} x^6$.

769. $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

770. $y = \arctan(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Kui funktsiooni avaldis on hõlpsasti logaritmitav, siis võib algul leida funktsiooni logaritmi tuletise ja sellest avaldada funktsiooni tuletise.

Näide 8. Leida funktsiooni

$$y = \frac{x^2}{1 - x} \sqrt[3]{\frac{3 - x}{(3 + x)^2}}$$

tuletis eelneva logaritmimise teel.

Lahendus.

$$\ln|y| = 2\ln|x| - \ln|1 - x| + \frac{1}{3}\left[\ln|3 - x| - 2\ln|3 + x|\right],$$

$$(\ln|y|)' = \frac{2}{x} - \frac{1}{1 - x}(-1) + \frac{1}{3}\left[- \frac{1}{3 - x} - 2\,\frac{1}{3 + x}\right],$$

$$\frac{1}{y}\,y' = \frac{2 - x}{x(1 - x)} - \frac{9 - x}{3(9 - x^2)}\,.$$

$$y' = \frac{x^2}{1 - x} \sqrt[3]{\frac{3 - x}{(3 + x)^2}} \left[\frac{2 - x}{x(1 - x)} - \frac{9 - x}{3(9 - x^2)}\right]$$

$$(x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq \pm 3).$$

Näide 9. Leida funktsiooni

$$y = (\sin x)^x$$

tuletis.

Lahendus. Et siin on $\sin x > 0$ ja seega $y > 0$, siis saame

$$\ln y = x \ln \sin x,$$

$$\frac{1}{y}\,y' = \ln \sin x + \frac{x}{\sin x} \cos x.$$

$$y' = (\sin x)^x(\ln \sin x + x \cot x).$$

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised.

771. $y = x^x$.

772. $y = x^{\sin x}$.

773. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

774. $y = (1 + \frac{1}{x})^x$.

775. $y = \frac{(x - 2)^9}{\sqrt{(x - 1)^5(x - 3)^{11}}}$.

776. $y = \sqrt[x]{x}$ $(x > 0)$.

777. $y = \sqrt[x]{(x + 1)^2}$.

778. $y = (\ln x)^x$.

779. $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$.

780. $y = \frac{(x - 2)^2 \sqrt[3]{x + 1}}{(x - 5)^3}$.

781. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}$.

782. $y = \log_x a$.

783. $y = 2x^{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

784. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

785. $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

786. Tõestada, et funktsioon $y = \ln \frac{1}{1 + x}$ rahuldab võrrandit

$$x \frac{dy}{dx} + 1 = e^y.$$

787. Tõestada, et funktsioon $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$ rahuldab võrrandit

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1.$$

Järgmistes ülesannetes leida funktsiooni y tuletis, kui funktsioonidel $u = u(x)$, $v = v(x)$ ja $y = f(x)$ on tuletised olemas.

788. $y = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$. 789. $y = \arctan \frac{u(x)}{v(x)}$.

790. $y = \sqrt[u(x)]{v(x)}$ $(u(x) \neq 0,\ v(x) > 0)$.

791. $y = \log_{u(x)} v(x)$ $(u(x) > 0,\ v(x) > 0)$.

792. $y = f(x^2)$. 793. $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$.

794. $y = f(e^x)\, e^{f(x)}$. 795. $y = f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}$.

Arvutada ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja $f'(x-)$, kui

796. $f(x) = |x|$;

797. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e}, & \text{kui } x \neq 0; \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

798. Kuidas peab valima arvud a ja b, et funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{kui } x > x_0 \end{cases}$$

oleks pidev ja tal oleks olemas tuletis punktis $x = x_0$.

Kui funktsioonil $y = f(x)$ $(a < x < b)$ tuletis $f'(x) \neq 0$ ja on olemas ühine pidev pöördfunktsioon $x = f^{-1}(y)$, siis ka pöördfunktsioonil on olemas tuletis x'_y ja

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide pöördfunktsiooni $x = x(y)$ tuletis x'_y.

799. $y = x - \varepsilon \sin x$.

800. $y = e^{\arcsin x}$.

801. $y = x e^{-x}$.

802. $y = x + \ln x$.

803. $y = x + e^x$.

804. $y = \operatorname{sh} x$.

Näide 10. Funktsioon $y = y(x)$ rahuldab võrrandit

$$x^2 + 2xy = y^2 + 2x.$$

Leida y'_x.

Lahendus. Võtame tuletise x järgi võrrandi mõlemast poolest, saame

$$2x + 2y + 2xy'_x = 2yy'_x + 2,$$

kust

$$y'_x = \frac{1 - x - y}{x - y}.$$

Arvutada y'_x järgmiste võrranditega määratud funktsioonide jaoks.

805. $y^2 = 2px$.

806. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

807. $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

808. $x^y = y^x$.

809. $y = 1 + xe^y$.

810. $y = x + \arctan y$.

811. Arvutada $y'(0)$, kui $xy - \ln y = 1$.

§ 2. Funktsiooni tuletise rakendusi.

Puutuja ja normaali võrrand. Kui funktsioonil

$$y = y(x)$$

on kohal $x = x_0$ olemas tuletis $y'(x_0)$, siis punktis $M(x_0, y_0)$ tema graafiku puutuja võrrand on

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

ja normaali võrrand

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0),$$

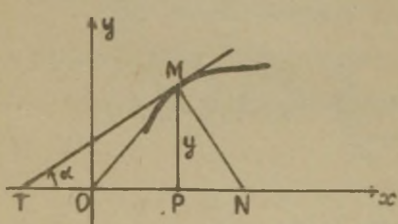
kus

$$y_0 = y(x_0).$$

Puutuja ja normaali lõigud. Lõiku PT nimetatakse puutuja lõiguks. Tema pikkus on

$$\overline{PT} = \left|\frac{y}{y'}\right|.$$

Lõiku PN nimetatakse normaali lõiguks. Tema pikkus on



Joon. 21.

$$\overline{PN} = |y\,y'|.$$

Lõigu TM pikkus on

$$\overline{TM} = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + y'^2}$$

ja lõigu MN pikkus on

$$\overline{MN} = |y| \sqrt{1 + y'^2}\,.$$

<u>Puutepunkti raadiusvektori ja puutuja vaheline nurk</u>.

Kui $r = r(\varphi)$ on kõvera võrrand polaarkoordinaatides ja β puutepunkti raadiusvektori ning puutuja vaheline nurk, siis

$$\tan \beta = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}\,.$$

<u>Sirgjooneliselt liikuva punkti kiirus</u>. Kui punkti sirgjoonelisel liikumisel läbitud teepikkus s on antud aja t funktsioonina võrrandiga

$$s = f(t),$$

siis punkti liikumise kiirus v ajamomendil $t = t_0$ on

$$v = f'(t_0).$$

<u>Ülesanded</u>.

812. Leida puutuja ja normaali võrrand kõverale $y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$ punktides a) $A = (-1,0)$; b) $B(2,3)$; $C(3,0)$.

813. Leida kõvera $y = 2 + x - x^2$ punktid, kus puutuja on a) paralleelne x-teljega; b) paralleelne sirgega $y = x$.

814. Millise nurga all kõver $y = \ln x$ lõikab x-telge?

815. Millise nurga all kõverad $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ lõikuvad?

816. Näidata, et logaritmilise spiraali $r = ae^{h\varphi}$ korral puutuja ja raadiusvektori vaheline nurk on konstantne.

817. Arvutada puutuja lõigu pikkus, kui $y = ax^n$.

818. Näidata, et kõvera $y^2 = 2px$ normaali lõigu pikkus on konstantne.

819. Näidata, et kõvera $y = a^x$ puutuja lõigu pikkus on konstantne.

820. Missuguses seoses peavad olema kordajad a, b ja c, et parabool $y = ax^2 + bx + c$ puutuks x-teljega?

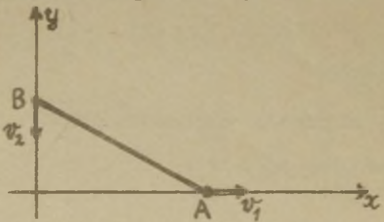
821. Missuguse parameetri a väärtuse korral kõverad $y = ax^2$ ja $y = \ln x$ puutuvad?

822. Punkt võngub seaduse

$$x = a \cos(\frac{2\pi}{T} t)$$

järgi. Leida punkti liikumise maksimaalne kiirus.

823. Sirge varb AB pikkusega 1 libiseb otstega piki koordinaattelgi (vt. joonist). Teades punkti A kiirust v_1, leida punkti B kiirus v_2.



§ 3. Funktsiooni diferentsiaal.

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse punktis x diferentseeruvaks, kui tema kasv

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

avaldub kujul

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha, \tag{5}$$

kus

$$\alpha = o(\Delta x), \text{ kui } \Delta x \to 0.$$

Funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv punktis x parajasti siis, kui tal punktis x on olemas lõplik tuletis $f'(x)$

Valemis (5) suurust

$$dy = f'(x)\Delta x$$

nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaaliks punktis x. Suurust $dx = \Delta x$ nimetatakse argumendi diferentsiaaliks. Seega võime kirjutada

$$dy = f'(x)dx, \tag{6}$$

kust

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Valem (6) kehtib ka siis, kui muutuja x on mingi uue muutuja funktsioon, s.t. valemis (6) dx võib olla ka funktsiooni diferentsiaal.

Kui Δx on küllalt väike, siis valemist (5) saame ligikaudse võrduse

$$(7) \qquad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Ülesanded.

824. Leida funktsiooni $y = x^2$ kasv Δy ja diferentsiaal dy, mis vastab argumendi muudule Δx. Arvutada Δy ja dy, kui $x = 1$ ja $\Delta x = 0{,}1$; $0{,}01$.

825. Arvutada funktsiooni $f(x) = x^3 - 2x + 1$ kasv $\Delta f(1)$ ja diferentsiaal $df(1)$ ning võrrelda neid, kui a) $\Delta x = 1$, b) $\Delta x = 0{,}1$, c) $\Delta x = 0{,}01$.

826. Leida funktsiooni $y = \cos x$ diferentsiaal kohal $x = \frac{\pi}{6}$, kui $\Delta x = \frac{\pi}{36}$.

827. Leida funktsiooni

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

diferentsiaal kohal $x = 9$.

828. Leida funktsiooni $y = \tan x$ diferentsiaal kohal $x = \frac{\pi}{3}$, kui $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

Leida järgmiste funktsioonide diferentsiaalid.

829. $y = \frac{1}{x}$.

830. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$.

831. $y = \arcsin \frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$.

832. $x = \frac{1}{1 - t^2}$.

833. $y = \ln \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4})$.

834. $y = \sqrt{\arcsin x} + (\arctan x)^2$.

Leida

835. $d(xe^x)$;

836. $d(\sin x - x\cos x)$;

837. $d(\sqrt{a^2 + x^2})$;

838. $d(\frac{1}{x^3})$;

839. $d(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})$;

840. $d\ln(1 - x^2)$;

841. $d(\arccos \frac{1}{|x|})$.

Olgu u,v,w diferentseeruvad argumendi x funktsioonid. Leida funktsiooni y diferentsiaal, kui

842. $y = uvw$;

843. $y = \frac{u}{v^2}$;

844. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$;

845. $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$;

846. $y = \arctan \frac{u}{v}$.

Leida

847. $\frac{d}{d(x^2)}(\frac{\sin x}{x})$;

848. $\frac{d}{d(\cot x)}(\tan x)$;

849. $\frac{d}{d(\cos x)}(\sin x)$;

850. $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

Kasutades valemit (7) arvutada ligikaudu

851. $\sqrt[3]{1,02}$;

852. $\sin 29°$;

853. $\arctan 1,05$;

854. $\sqrt{24,5}$;

855. arccot 0,97;

856. arcsin 0,45;

857. arccos 0,48;

858. log 11 $\left(\log e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4343\right)$;

859. $\sqrt{e}$;

860. tan 46°.

§ 4. Kõrgemat järku tuletised ja diferentsiaalid.

Funktsiooni $y = f(x)$ <u>teist järku</u> ehk <u>teiseks tuletiseks</u> y'' nimetatakse tuletist funktsiooni tuletisest, s.o.

$$y'' = (y')' = \left[f'(x)\right]'.$$

Üldiselt funktsiooni $y = f(x)$ n-järku ehk n-ndaks tuletiseks $y^{(n)}$ nimetatakse tuletist funktsiooni (n-1) -järku tuletisest, s.o.

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]' = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ <u>teist järku</u> ehk <u>teiseks diferentsiaaliks</u> d^2y nimetatakse diferentsiaali tema esimest järku diferentsiaalist, s.o.

$$d^2y = d(dy).$$

Analoogiliselt defineeritakse <u>n-järku</u> ehk <u>n-es diferentsiaal</u> d^ny võrdusega

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Kui x on sõltumatu muutuja, siis

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n, \qquad (8)$$

kui aga x on mingi muutuja t funktsioon $x = x(t)$, siis

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x,$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx.d^2x + f'(x)d^3x$$

jne.

Valemist (8) saame

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Leibnizi valem. Kui $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on n korda diferentseeruvad, siis

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, u^{(n-i)} \, v^{(i)}$$

ja

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, d^{n-i} u \, d^i v,$$

kus $u^{(o)} = u$, $v^{(o)} = v$, C_n^i on kombinatsioon n elemendist i kaupa ja $d^o u = u$, $d^o v = v$.

Ülesanded.

Tõestada valemid.

861. $(e^x)^{(n)} = e^x$.

862. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.

863. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.

864. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

865. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

866. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Leida y" järgmistest funktsioonidest.

867. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

868. $y = e^{-x^2}$.

869. $y = \tan x$.

870. $y = \ln f(x)$.

871. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$.

872. $y = x^x$.

Arvutada y" järgmistest funktsioonidest, kus $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on kaks korda diferentseeruvad.

873. $y = u^2$.

874. $y = \ln \frac{u}{v}$.

875. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

876. $y = u^v$ $(u > 0)$.

Funktsioon $f(x)$ on kolm korda diferentseeruv. Arvutada y" ja y"', kui

877. $y = f(x^2)$;

878. $y = f(\frac{1}{x})$;

879. $y = f(e^x)$;

880. $y = f(\ln x)$.

Arvutada d^2y, kui

881. $y = \frac{\ln x}{x}$;

882. $y = \sqrt{1 + x^2}$;

883. $y = x^x$;

884. $y = \arctan(\frac{b}{a} \tan x)$.

Funktsioonid $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on kaks korda diferentseeruvad. Leida d^2y, kui

885. $y = \frac{u}{v}$;

886. $y = a^u$;

887. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

Leida märgitud järku tuletised.

888. $y = x(2x - 1)^2 (x + 3)^3$; $y^{(6)}$, $y^{(7)}$.

889. $y = \dfrac{1}{1 - x}$; $y^{(5)}$.

890. $y = x^3 \ln x$; $y^{(4)}$.

891. $y = \dfrac{a}{x^m}$; y'''.

892. $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; $y^{(100)}$.

893. $y = \dfrac{e^x}{x}$; $y^{(10)}$.

894. $y = e^x \cos x$; y^{IV}

895. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; $y^{(n)}$.

896. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$; $y^{(n)}$.

897. $y = \cos^2 x$; $y^{(n)}$.

898. $y = \dfrac{\ln x}{x}$; $y^{(n)}$.

Leida märgitud järku diferentsiaalid.

899. $y = x^5$; $d^5 y$.

900. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $d^3 y$.

901. $y = e^x \ln x$; $d^4 y$.

Leida märgitud järku diferentsiaalid, kui $u = u(x)$ on piisav arv kordi diferentseeruv.

902. $y = e^u$; $d^4 y$.

903. $y = u^2$; $d^{10} y$.

904. $y = \ln u$; $d^3 y$.

Leida $f^{(n)}(0)$, kui

905. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; 907. $f(x) = x^2 e^{ax}$.

906. $f(x) = \arcsin x$;

908. Tõestada, et funktsioon

$$y = A\cos x + B\sin x$$

rahuldab võrrandit

$$y'' + y = 0$$

mis tahes arvude A ja B korral.

909. Leida x'_y, x''_{yy}, x'''_{y^3} kolm korda diferentseeruva funktsiooni $y = f(x)$ jaoks.

Leida y'_x ja y''_{xx} funktsioonist $y = y(x)$, kui

910. $x^2 + y^2 = 25$; 911. $y^2 + 2\ln y = x^4$;

912. $\sqrt{x^2 + y^2} = a\, e^{\operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x}}$ $(a > 0)$.

913. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse

$$s = \frac{2}{9} \sin \frac{\pi t}{2} + s_0$$

järgi. Leida liikumise kiirus ja kiirendus pärast esimese sekundi möödumist (s on meetrites ja t sekundites mõõdetud).

914. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse järgi $s = \sqrt{t}$. Veenduda, et liikumine on aeglustuv ja et kiirendus a ja kiiruse kuup v^3 on võrdelised suurused.

§ 5. Piirväärtuste arvutamine L'Hospitali reegli abil.

L'Hospitali reegel. Kui jagatis

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

kohal $x = a$ kujutab määramatust tüüpi $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$, siis kehtib võrdus

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{9}$$

eeldusel, et eksisteerib piirväärtus võrduse (9) paremal poolel.

Valem (9) on rakendatav ka siis, kui $a = \infty$ või $a = -\infty$. Piirväärtuste arvutamisel on otstarbekohane koos L'Hospitali reegliga rakendada peatükis III antud võtteid.

Määramatused tüüpi $0 \cdot \infty$ või $\infty - \infty$ L'Hospitali reegli rakendamiseks taandatakse tüüpidele $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$.

Näide 11. Arvutada

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\cot x}.$$

Lahendus. Kohal 0 tekib määramatus tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$. L'Hospitali reegli abil saame

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\cot x} \underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(\cot x)'} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Tekkis määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$ ja võime L'Hospitali reeglit veel kord rakendada, kuid seda ei ole otstarbekohane teha, sest protsessis $x \to 0$ on $\sin x \sim x$ ja seega saame vahetult

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Järelikult

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = 0.$$

Näide 12. Arvutada

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Lahendus. Kohal 0 tekib määramatus $\infty - \infty$. Võttes murrud ühisele nimetajale, saame

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Nüüd tekib kohal 0 määramatus $\frac{0}{0}$. Enne L'Hospitali reegli rakendamist asendame nimetajas $\sin x$ temaga antud piirprotsessis ekvivalentse suurusega x. Seega

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}.$$

Rakendades 2 korda L'Hospitali reeglit, saame

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \underset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{12x^2} \underset{\left(\substack{1-\cos 2x = \\ = 2\cdot\sin^2 x}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^2 x}{12x^2} = \frac{1}{3}.$$

Näide 13. Arvutada

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) \cot x.$$

Lahendus. Kohal 0 esineb määramatus $0 \cdot \infty$. Viime $\cot x$ nimetajasse, saame

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}.$$

Tekkis määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$. Antud piirprotsessis saame asendada $\tan x$ temaga ekvivalentse suurusega x, siis L'Hospitali reegli abil on

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) \cot x \underset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised piirväärtused, kasutades L'Hospitali reeglit.

915. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

916. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

917. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cot x - 1}{x^2}$.

918. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

919. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.

920. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$.

921. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$.

922. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a > 0,\ n > 0)$.

923. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi}{x}}{\cot \frac{\pi x}{2}}$.

924. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan^3 x}{\tan x}$.

925. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$.

926. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

927. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$.

928. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2 \sin x}$.

929. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{\sin^3 x}$.

930. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{\sin x^3}$ $(a > 0)$.

931. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$.

932. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{\tan x - x}$.

933. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^3 \arcsin x \cos x}$.

934. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot 2x$.

935. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)\tan \frac{\pi}{2} x$.

936. $\lim\limits_{x\to 1-} \ln x \ln(1 - x)$.

937. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cot x$.

938. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x^2 - 2x + 1)\sin \pi x$.

939. $\lim\limits_{x\to \infty} x^n \sin \frac{a}{x}$ $(n > 0)$.

940. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

941. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

942. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$.

943. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{\ln x}\right)$.

944. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\cot x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Määramatuse 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} korral tuleb enne leida avaldise u^{v} logaritmi $v \ln u$ piirväärtus ja siis kasutada võrdust

$$\lim_{x \to a} u^{v} = e^{\lim\limits_{x \to a} v \ln u} .$$

Näide 13. Arvutada

$$\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{2}{\sin^2 x}}$$

Lahendus. Esineb määramatus tüüpi 1^{∞}. Arvutame L'Hospitali reegliga algul avaldise logaritmi piirväärtuse, saame

$$\lim_{x \to 0} \ln(\cos 2x)^{\frac{2}{\sin^2 x}} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin^2 x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 2 \lim_{x \to 0} \frac{-\tan 2x}{2x} = -2 .$$

Seega valemi (10) järgi

$$\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{2}{\sin^2 x}} = e^{-2}.$$

Ülesanded.

Leida järgmised piirväärtused.

945. $\lim\limits_{x \to 0} x^{x}$.

946. $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$.

947. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

948. $\lim\limits_{x \to 0} (\cot x)^{\sin x}$.

949. $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.

950. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2x - \pi}$.

951. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$.

952. $\lim\limits_{x \to 0} (e^{x} + x)^{\frac{1}{x}}$.

953. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

954. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

955. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$.

956. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

957. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\cot x}$.

958. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln|x-2|}$.

959. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

960. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

961. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

962. $\lim\limits_{x\to\pi-}(\sin x)^{\cot x}$.

Leida järgmised piirväärtused, veendudes eelnevalt, et neid L'Hospitali reegli abil arvutada ei saa.

963. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

964. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

965. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\cos x}{x+\sin x+e^{\sin x}}$.

966. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-\cos x}{x^2+x+\cos x}$.

967. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\sin x-1}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-e}$.

968. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+e^{\cos x}}{x+\ln x}$.

969. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\sin x}$.

V. FUNKTSIOONI UURIMINE.

§ 1. Funktsiooni monotoonsus.

Funktsiooni monotoonsuse uurimine tugineb järgmistele teoreemidele.

1) Vahemikus X diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on monotoonselt kasvav selles vahemikus parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral on

$$f'(x) \geqslant 0$$

ja monotoonselt kahanev parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral on

$$f'(x) \leqslant 0.$$

2) Diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on konstantne vahemikus X parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral on

$$f'(x) = 0.$$

Punkte $x \in X$, kus $f'(x) = 0$, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ statsionaarseteks punktideks.

3) Vahemikus X diferentseeruv funktsioon on kasvav (kahanev) selles vahemikus parajasti siis, kui

1° $f'(x) \geqslant 0$ (vastavalt $f'(x) \leqslant 0$) iga $x \in X$ korral;

2° statsionaarsed punktid ei moodusta ühtegi vahemikku.

Seega, kui iga $x \in X$ korral on $f'(x) > 0$, siis $f(x)$ kasvab ja $f'(x) < 0$ korral – kahaneb piirkonnas X.

Funktsiooni statsionaarseid punkte ja neid punkte funktsiooni määramispiirkonnast, kus tuletis on lõpmatu või ei eksisteeri, nimetatakse funktsiooni kriitilisteks punktideks.

Nagu näeme, tuleb funktsiooni monotoonsuse piirkondade leidmisel lahendada võrratused

$$f'(x) > 0 \quad \text{ja} \quad f'(x) < 0,$$

mis sageli osutub raskeks. Niisugustel juhtudel kasutatakse järgmist teoreemi.

4) Kui funktsioonil $f(x)$ on vahemikus (a,b), mis kuulub funktsiooni määramispiirkonda, lõplik arv kriitilisi punkte $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kus

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b,$$

siis igas osavahemikus

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_k, b)$$

tuletis $f'(x)$ säilitab märki.

Seega võime igas vaadeldavas osavahemikus $f'(x)$ märgi kindlaks teha argumendi x ühe (sobivalt valitud) väärtuse abil.

Näide 1. Leiame funktsiooni

$$f(x) = x^2 e^x$$

monotoonsuse piirkonnad.

Funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv piirkonnas $X = (-\infty, \infty)$ ja

$$f'(x) = e^x x(x + 2).$$

Siit näeme, et funktsiooni $f(x)$ ainukesteks kriitilisteks punktideks on statsionaarsed punktid

$$x_1 = 0 \quad \text{ja} \quad x_2 = -2.$$

Et alati $e^x > 0$, siis võrratuse $f'(x) > 0$ lahendid moodustavad piirkonna $\{(-\infty, -2), (0, \infty)\}$ ja võrratuse $f'(x) < 0$ lahendid - vahemiku $(-2, 0)$. Seega funktsioon $f(x) = x^2 e^x$

kasvab vahemikus $(-\infty, -2)$ ja $(0, \infty)$,

kahaneb vahemikus $(-2, 0)$.

Näide 2. Leiame funktsiooni

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

monotoonsuse piirkonnad.

Funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty, \infty)$.

Arvutame tuletise:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \, \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)}}.$$

Seega on funktsioonil kolm kriitilist punkti:

$$x_1 = -1, \; x_2 = \frac{1}{2}, \; x_3 = 2.$$

Punktides x_1 ja x_3 on tuletis lõpmatu, punkt x_2 on statsionaarne. Paigutame nad x-teljele, teoreemi 4 põhjal funktsiooni tuletis $f'(x)$ säilitab märki igas tekkinud vahemikus

$$(-\infty, -1), (-1, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 2), (2, \infty).$$

Seega on tuletise märgi leidmiseks nendes vahemikes küllaldane, kui tuletise märk teha kindlaks vahemiku mingis ühes punktis. Vahemikus $(-\infty, -1)$ on $f'(x) < 0$, sest näiteks $f'(-2) < 0$. Vahemikus $(-1, \frac{1}{2})$ on $f'(x) > 0$, sest näiteks $f'(0) > 0$. Vahemikus $(\frac{1}{2}, 2)$ on $f'(x) < 0$, sest näiteks $f'(1) < 0$. Ja lõpuks vahemikus $(\frac{1}{2}, \infty)$ on $f'(x) > 0$, sest näiteks $f'(10) > 0$. Oleme saanud järgmise tulemuse. Funktsioon $f(x)$

kasvab vahemikus $(-1, \frac{1}{2})$ ja $(2, \infty)$,
kahaneb vahemikus $(-\infty, -1)$ ja $(\frac{1}{2}, 2)$.

Näide 3. Leiame funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

monotoonsuse piirkonnad.

Funktsiooni määramispiirkond on $X = [-1, \infty)$. Arvutame tuletise:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}.$$

Funktsioonil on kaks kriitilist punkti: statsionaarne punkt $x = 0$ ja määramispiirkonna otspunkt $x = -1$, kus eksisteerib vaid parempoolne tuletis $f'(-1+) = \infty$. Kõikjal piirkonnas $(-1, \infty)$ on $f'(x) \geq 0$. Et statsionaarseid punkte on vaid üks, siis teoreemi 3) põhjal on funktsioon selles vahemikus $(-1, \infty)$ kasvav.

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad.

970. $y = 8x^2 - x^4$.
971. $y = \frac{x}{\ln x}$.
972. $y = 2x - \sin 2x$.
973. $y = \arccos(1 + x)$.

974. $y = 2e^{x^2-6x}$.

975. $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.

976. $y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

977. $y = x + |\sin 2x|$.

978. $y = \left|\frac{x^2}{4} - x\right|$.

979. $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0,\ x \geqslant 0)$.

980. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kui } x \leqslant -1, \\ -1, & \text{kui } -1 < x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$

981. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 1, & \text{kui } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ 1 + \tan x, & \text{kui } x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right). \end{cases}$

982. $f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & \text{kui } |x| \leqslant 1, \\ \arctan x, & \text{kui } |x| > 1. \end{cases}$

983. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sgn} \sin x, & \text{kui } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi. \end{cases}$

984. Joonestada ülesannetes 980 – 983 olevate funktsioonide graafikud.

985. Tõestada, et funktsioon $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ kahaneb vahemikus $(0, \frac{\pi}{2})$.

986. Tõestada, et $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ on $x > 0$ korral kasvav funktsioon.

Funktsiooni monotoonsuse uurimise teel saab tõestada mitmesuguseid võrratusi.

Näide 4. Tõestada, et iga $x > 1$ korral kehtib võrratus

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

Tõestus. Moodustame funktsiooni

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (0, \infty)$. On vaja näidata, et $f(x) > 0$, kui $x \in (1, \infty)$. Arvutades tuletise saame

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}.$$

Tuletises ei kuulu nimetaja nullkohad $x = 0$, $x = -1$ funktsiooni määramispiirkonda X. Seega ainuke kriitiline punkt on statsionaarne punkt $x = 1$. Et alati on $f'(x) \geq 0$, siis teoreemi 3) järgi funktsioon $f(x)$ kasvab piirkonnas X. Et $f(1) = 0$, siis kõikjal vahemikus $(1, \infty)$ on $f(x) > 0$, mida oligi tarvis tõestada.

Ülesanded.

Tõestada järgmised võrratused.

987. $\ln(1 + x) < x$, kui $x > 0$.

988. $\ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$, kui $x > 0$.

989*. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, kui $x > 0$.

990*. $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$, kui $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

991*. $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, kui $x > 0$.

992.* $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, kui $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

993. $x^2 + 2\ln|\cos x| > 0$, kui $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

994.* $\cos x < 1 - \frac{x^2}{\pi}$, kui $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

995.* $x \ln x + 4\ln \frac{x+1}{2} > 3(x-1)$, kui $x > 1$.

996. $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$, kui $|x|$ $\frac{\pi}{2}$.

997. $x - \frac{x^3}{6} < \arctan x < x$, kui $x > 0$.

§ 2. Funktsiooni ekstreemumid.

Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on kohal a lokaalne maksimum (lokaalne miinimum), kui leidub a niisugune ümbrus $(a-\delta, a+\delta)$, kus kehtib võrratus

$$(1) \qquad f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{vastavalt } f(x) \geqslant f(a)).$$

Punkti a nimetatakse funktsiooni $f(x)$ lokaalseks ekstreemumpunktiks, arvu $f(a)$ aga funktsiooni $f(x)$ lokaalseks ekstreemumiks.

Kui võrratuses (1) esineb võrdus vaid punktis $x = a$, siis räägitakse funktsiooni $f(x)$ rangest lokaalsest ekstreemumist punktis a.

Funktsioonil $f(x)$ võib lokaalne ekstreemum esineda vaid kriitilises punktis.

Lokaalse ekstreemumi olemasolu kriitilises punktis uuritakse järgmiste teoreemide (piisavate tunnuste) abil.

I. Olgu funktsioon $f(x)$ pidev kriitilises punktis a.

Kui $f'(x) > 0$ (s.t. $f(x)$ kasvab) punkti a vasakpoolses ümbruses ja $f'(x) < 0$ (s.t. $f(x)$ kahaneb) parempoolses ümbruses, siis funktsioonil $f(x)$ on punktis a range lokaalne maksimum.

Kui $f'(x) < 0$ punkti a vasakpoolses ümbruses ja $f'(x) > 0$ parempoolses ümbruses, siis funktsioonil $f(x)$ on punktis a range lokaalne miinimum.

Kui aga $f'(x)$ on punkti a vasakpoolses ja parempoolses ümbruses ühe ja sama märgiga, siis punktis a ekstreemumit ei ole.

II. Olgu funktsioon $f(x)$ vähemalt kaks korda diferentseeruv statsionaarses punktis a.

Kui $f''(a) < 0$, siis punktis a on range lokaalne maksimum. Kui $f''(a) > 0$, siis punktis a on range lokaalne miinimum.

III. Olgu funktsioon $f(x)$ n korda diferentseeruv statsionaarses punktis a ja olgu

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Kui n on paarisarv, siis punktis a on $f^{(n)}(a) < 0$ korral range lokaalne maksimum, $f^{(n)}(a) > 0$ korral range lokaalne miinimum.

Kui n on paaritu arv, siis punktis a ekstreemumit ei ole.

Näide 5. Leida funktsiooni

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\, e^x$$

lokaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Funktsioon $f(x)$ on pidev määramispiirkonnas

$x = (-\infty, \infty)$. Leiame tema kriitilised punktid. Et

$$f'(x) = \frac{(2 + 3x)\, e^x}{3\sqrt[3]{x}},$$

siis funktsioonil on kaks kriitilist punkti: statsionaarne punkt $x_1 = -\frac{2}{3}$ ja punkt $x_2 = 0$, kus tuletis pole määratud.

Ekstreemumite määramiseks rakendame tunnust I (tunnuseid II ja III ei saa kasutada, kuna punktis $x_2 = 0$ funktsioon pole diferentseeruv). Selleks leiame funktsiooni kasvamise ja kahanemise piirkonnad. Saame teoreemi 4 põhjal paragrahvist 1 , et funktsioon $f(x)$

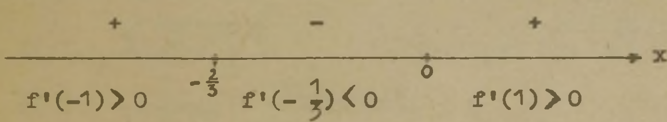
vahemikus $(-\infty, \frac{2}{3})$ kasvab, sest näiteks $f'(-1) > 0$,

vahemikus $(-\frac{2}{3}, 0)$ kahaneb, sest näiteks $f'(-\frac{1}{3}) < 0$,

vahemikus $(0, \infty)$ kasvab, sest näiteks $f'(1) > 0$.

Tunnuse I põhjal on funktsioonil $f(x)$ kohal $x_1 = -\frac{2}{3}$ range lokaalne maksimum $f(-\frac{2}{3}) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}\, e^{-2}}$ ja kohal $x_2 = 0$ range lokaalne miinimum $f(0) = 0$.

Praktiliselt tehakse tuletise märgimuutudest ülevaate saamiseks vaid järgmine joonis (vt. joon. 22), millest piisab ekstreemumite määramiseks tunnuse I abil.



Joon. 22.

Näide 6. Leida funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4$$

lokaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Funktsioon on pidev kogu x-teljel ja on paarisfunktsioon. Leiame kriitilised punktid. Et

$$f'(x) = x^3(x^2 - 1),$$

siis kriitilisteks punktideks on kolm statsionaarset punkti:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Uurime ekstreemumi olemasolu punktis $x_3 = 1$ tunnuse II abil, saame

$$f''(x) = 5x^4 - 3x^2,$$

$$f''(1) = 2 > 0.$$

Seega punktis $x_3 = 1$ on range lokaalne miinimum $f(1) = -\frac{1}{12}$. Et $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis punktis $x_1 = -1$ on samuti range lokaalne miinimum $f(-1) = -\frac{1}{12}$.

Uurime ekstreemumi olemasolu punktis $x_2 = 0$. Et

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{IV}(0) < 0,$$

siis tunnuse III põhjal on punktis $x = 0$ range lokaalne maksimum $f(0) = 0$.

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid otseselt lokaalse ekstreemumi definitsiooni abil.

998. $f(x) = 1 - x^6$.

999. $g(x) = e^{-|x|}$.

1000. $h(x) = \begin{cases} |x|, & \text{kui } x \neq 0, \\ 3, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

1001. $f(x) = 1 - |x|$.

1002. $f(x) = |1 - x|$.

1003. $f(x) = |\tan x|$.

1004. $h(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$.

1005. $g(x) = 1 - |\sin x|$.

1006. $v(x) = 2\sin^2 x$.

1007. $u(x) = e^{\sin x}$.

1008. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid märgitud punktis a.

1009. $f(x) = x^{11} + 3x^6 + 1, \quad a = 0.$

1010. $f(x) = x^2 + 2\cos x, \quad a = 0.$

1011. $f(x) = 1 - 18x + 9x^2 - 2x^3 + 6\ln x, \quad a = 1.$

1012. $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctan x - \frac{1}{2}(2x - \pi), \quad a = -1.$

Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

1013. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3.$

1014. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5.$

1015. $f(x) = x - \ln(1 + x)$.

1016. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$.

1017. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$.

1018. $f(x) = x \ln x$.

1019. $f(x) = x \ln^2 x$.

1020. $f(x) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1 - x}, \quad X = (0,1), \quad ab > 0.$

1021. $f(x) = x|x|$.

1022. $g(x) = (x - 1)^3$.

1023. $g(x) = (x-1)^4$. 1024. $h(x) = 1 - |x| + \ln|x|$.

1025. $f(x) = x - \arctan x$.

1026. $f(x) = x^5 - \dfrac{5x^4 - 12}{12}$.

1027. $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$.

1028. $f(x) = e^x \cos x$.

1029*. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$.

1030*. $f(x) = \ln(x^4 + 4x^3 + 30)$.

1031*. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^4 + 8x^3 + 40)}$.

Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on piirkonnas X <u>globaalne maksimum</u> (globaalne miinimum), kui leidub niisugune punkt $a \in X$, et

$$f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{vastavalt } f(x) \geqslant f(a))$$

iga $x \in X$ korral.

Weierstrassi teoreem ekstremaalsetest väärtustest ütleb, et lõigus pideval funktsioonil $f(x)$ on alati olemas globaalne maksimum ja globaalne miinimum.

Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $X = [\alpha, \beta]$, siis globaalsete ekstreemumite leidmiseks toimime järgmiselt:

1) leiame funktsiooni kriitilised punktid

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \quad \text{vahemikus } (\alpha, \beta);$$

2) arvutame funktsiooni väärtused kriitilistes punktides, s.o. väärtused

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k);$$

3) arvutame funktsiooni väärtused lõigu otspunktides, s.o. $f(\alpha)$ ja $f(\beta)$;

4) valime funktsiooni saadud väärtuste $f(x_1)$, $f(x_2)$,... ..., $f(x_k)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ hulgast välja suurima arvu M ja väikseima arvu m.

Siis on $M = \max\limits_{x \in [\alpha,\beta]} f(x)$ globaalne maksimum ja $m = \min\limits_{x \in [\alpha,\beta]} f(x)$ globaalne miinimum.

Näide 7. Leida funktsiooni $f(x) = (x^2 - 1)^2$ globaalsed ekstreemumid lõigus $[-1/2, 3]$.

Lahendus: 1) $f'(x) = 4(x^2 - 1)x$, siis kriitilisteks punktideks vahemikus $(-1/2,3)$ on statsionaarsed punktid $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

2) arvutades funktsiooni väärtused kriitilistes punktides, saame

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0;$$

3) arvutame $f(-\frac{1}{2}) = \frac{25}{16}$, $f(3) = 64$;

4) leiame, et $\max\{f(0), f(1), f(-\frac{1}{2}), f(3)\} = 64$ ja

$$\min\{f(0), f(1), f(-\frac{1}{2}), f(3)\} = 0.$$

Seega on globaalne maksimum

$$\max_{x \in [-\frac{1}{2},3]} (x^2 - 1)^2 = 64$$

ja globaalne miinimum

$$\min_{x \in [-\frac{1}{2},3]} (x^2 - 1)^2 = 0.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid määramispiirkonnas X.

1032. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, a) $X = [-1,5]$; b) $X = [-10,12]$.

1033. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $X = [0,4]$.

1034. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $X = [-10,10]$.

1035. $f(x) = \arccos x$.

1036. $f(x) = \sin^2 x$, $X = [-\pi,\pi]$.

1037. $f(x) = \cos^2 x - 1$, $X = [-\pi,\pi]$.

1038. $f(x) = \sin 2x - x$, $X = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

1039. $f(x) = \arctan \dfrac{1-x}{1+x}$, $X = [0,1]$

1040. $f(x) = \sin 4x - 2x$, $X = [0, \frac{\pi}{2}]$.

1041. $f(x) = x - \ln \cos x$, $X = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

1042. $f(x) = |x| - \ln \cos x$, $X = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

1043.* $f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$.

1044. $f(x) = x - 2\ln x$, $X = [1,e]$.

1045. $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $X = [0,\pi]$.

Kui funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $X = (\alpha, \beta)$, siis globaalsete ekstreemumite leidmiseks kasutatakse järgmist teoreemi.

IV. Kui piirkonnas X pideval funktsioonil f(x) on üksainus lokaalne ekstreemum, siis viimane kujutab funktsiooni f(x) globaalset ekstreemumit piirkonnas X.

Kui funktsioonil f(x) on määramispiirkonnas mitu lokaalset ekstreemumit,siis teoreemi IV rakendamiseks võib määramispiirkonna sobivalt jaotada osadeks, nii et igas osas oleks ainult üks lokaalne ekstreemum.

Näide 8. Leida funktsiooni $f(x) = x^2 \ln x$ globaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Funktsiooni f(x) määramispiirkond on vahemik $X = (0, \infty)$ ja

$$f'(x) = x\,(1 + 2\ln x).$$

Ainsaks kriitiliseks punktiks on statsionaarne punkt

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Et $f''(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 2 > 0$, siis punktis $x_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ tunnuse II põhjal lokaalne miinimum $f(\frac{1}{\sqrt{e}})$. Et leitud lokaalne ekstreemum on ainuke funktsioonil f(x), siis teoreemi IV põhjal on ta ka globaalseks miinimumiks. Seega

$$m = \min_{x \in X} f(x) = f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}.$$

Funktsioonil f(x) globaalset maksimumi ei ole.

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid määramispiirkonnas X.

1046. $f(x) = e^{-x^2}$. 1047. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

1048. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

1049. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1050. $f(x) = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{1 - x}$, $X = (0,1)$, $ab > 0$.

1051. $f(x) = 2\tan x - \tan^2 x$, $X = [0, \frac{\pi}{2})$.

1052. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

1053. $f(x) = 2\operatorname{ch} x - x^2$.

Näide 9. Tõestada, et iga $x \neq 0$ korral kehtib võrratus

$$e^x > 1 + x.$$

Lahendus. Moodustame funktsiooni

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

Tuleb näidata, et iga $x \neq 0$ korral on $f(x) > 0$. Funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond on $X = (-\infty, \infty)$. Et

$$f'(x) = e^x - 1,$$

siis funktsiooni $f(x)$ ainuke kriitiline punkt on statsionaarne punkt $x = 0$. Kogu vahemikus X on

$$f''(x) = e^x > 0.$$

Seega punktis $x = 0$ on funktsioonil range lokaalne miinimum, mis teoreemi IV põhjal on ka funktsioonil globaalseks miinimumiks. Tähendab, iga $x \neq 0$ korral on

$$f(x) > f(0) = 0,$$

mida oligi tarvis näidata.

Ülesanded.

Tõestada järgmised võrratused.

1054. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, kui $x > 1$.

1055. $\ln(1 + x) \leqslant x$, kui $x > -1$.

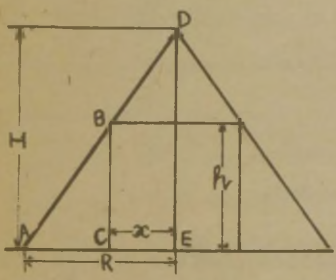
1056. $2x \arctan x \geqslant \ln(1 + x^2)$.

1057. $1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqslant \sqrt{1 + x^2}$.

1058. $\ln(1 + x) > \frac{\arctan x}{1 + x}$, kui $x > 0$.

1059. $\frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q} \geqslant 1$, kui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja $x > 0$.

Näide 10. Koonusesse kõrgusega H ja põhja raadiusega R tuleb kujundada maksimaalse ruumalaga püstsilinder. Milline peab olema silindri raadius r ja kõrgus h?



Joon. 23.

Lahendus. Tähistame otsitava silindri raadiuse tähega x ja kõrguse antud tähega h. Siis silindri ruumala on

$$V = \pi x^2 h.$$

Suurused x ja h on ülesande tingimuste järgi teineteisest sõltuvad. Seepärast võime avaldada näiteks h raadiuse x funktsioonina.

Selleks joonistame koonuse ja otsitava silindri telglõike (vt. joon.23). Kolmnurkade ABC ja ADE sarnasusest saame

$$\frac{R}{R-x} = \frac{H}{h},$$

kust

$$h = \frac{H}{R}(R - x).$$

Seega silindri ruumala V avaldub muutuja x funktsioonina:

$$\begin{cases} V = \frac{\pi H}{R} x^2(R - x) \\ X = (0,R). \end{cases}$$

Tuleb leida funktsioonil $V = V(x)$ globaalne maksimumpunkt.

Et

$$V'(x) = \frac{\pi H}{R} x(2R - 3x),$$

siis funktsiooni V ainukeseks kriitiliseks punktiks on statsionaarne punkt

$$x_1 = \frac{2}{3}R,$$

sest $0 \in X$. Arvutades

$$V''(x) = \frac{\pi H}{R}(2R - 6x),$$

saame, et $V''(x) < 0$. Tunnuse II põhjal punktis $x_1 = \frac{2}{3}R$ on funktsioonil V range lokaalne maksimum, mis teoreemi IV järgi on ka globaalseks maksimumiks.

Seega saame vastuseks, et

$$r = x_1 = \frac{2}{3}R,$$

$$h = \frac{1}{3}H.$$

Ülesanded.

1060. Leida arvu 36 niisugused kaks tegurit, mille ruutude summa on minimaalne.

1061. Valmistamisel on kaanega kast, mille ruumala on 72 cm^3. Määrata kasti mõõtmed nii, et põhja servade suhe oleks 1 : 2 ja kasti täispindala maksimaalne.

1062. Akna kuju on ristkülik korrapärase kolmnurgaga ülemises osas. Akna ümbermõõt on 3 m. Milline peab olema akna alus, et akna pindala oleks maksimaalne.

1063. Kanali ristlõige on ristkülik poolringiga alumises osas. Kanali ristlõike ümbermõõt on 4,5 m. Milline peab olema poolringi raadius, et kanali ristlõike pindala oleks maksimaalne?

1064. Korrapärase kolmnurkse prisma ruumala on V. Milline peab olema aluse pikkus, et prisma täispindala oleks minimaalne?

1065. Koonuse moodustaja pikkus on 20 cm. Missuguse kõrguse korral on koonuse ruumala maksimaalne?

1066. Leida kerasse kujundatud maksimaalse silindri mõõtmed, kui kera raadius on R.

1067. Leida kerasse kujundatud silindrite maksimaalne külgpindala, kui kera raadius on R.

1068. Määrata kerasse kujundatud maksimaalse täispindalaga püstkoonuse mõõtmed, kui kera raadius on R.

1069. Missuguse kesknurga korral saab ringist väljalõigatud sektorist valmistada maksimaalse ruumalaga koonuse ?

1070. Missugusest kõvera $y = \frac{1}{1 + x^2}$ punktist tõmmatud puutuja moodustab x-teljega suurima nurga?

1071. Paraboolil $y = x^2$ leida punkt, mille kaugus sirgest $y = 2x - 4$ on minimaalne.

1072. Võrdhaarne kolmnurk ümbermõõduga 2p pöörleb oma aluse ümber. Milline peab olema alus, et tekkinud pöördkeha ruumala oleks maksimaalne?

1073. Leida maksimaalse ümbermõõduga ristkülik, mis on kujundatud poolringi raadiusega R.

1074*. Leida maksimaalse pindalaga ristkülik, mis on kujundatud ellipsisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1075. Punkt A asub ringjoonel. Kõõl BC on paralleelne ringjoone puutujaga punktis A. Kui kaugel peab asuma kõõl BC punktist A, et kolmnurga ABC pindala oleks maksimaalne?

1076. Punktist A väljub punkti B suunas auto, liikudes kiirusega 80 km/t. Samal ajal väljub punktist B rong, liikudes punkti C suunas kiirusega 50 km/t. On teada, et $\angle ABC = 60°$ ja AB = 200 km. Missugusel ajamomendil (lugedes aega liikumise algmomendist alates) on sõidukid teineteisele kõige lähemal?

1077. Vihmapiisk langeb raskustungi mõjul ning aurustub ühtlase kiirusega nii, et algmass m_0 kahaneb võrdeliselt ajaga (võrdetegur on k). Mitmendal sekundil pärast langemise algust on vihmapiisal maksimaalne kineetiline energia, kui õhu takistust mitte arvestada? Kui suur on maksimaalne kineetiline energia?

1078. Horisontaalalusel asetsevat koormist kaaluga P tuleb nihutada temale rakendatud jõu F abil. Hõõrdumine on võrdeline jõuga , mis vajutab keha vastu alust ja on suunatud vastupidi nihutavale jõule. Hõõrdetegur on k. Missuguse nurga α all aluse suhtes tuleb rakendada jõud F, et ta suurus oleks minimaalne? Leida nihutava jõu minimaalne väärtus.

§ 3. Joone kumerus ja käänupunktid.

Öeldakse, et joon

$$y = f(x)$$

on piirkonnas X kumer (nõgus), kui igas punktis $a \in X$ joone $y = f(x)$ puutuja asetseb ülalpool (vastavalt allpool) seda joont.

Joone kumeruse ja nõgususe piirkondade leidmiseks kasutatakse järgmist teoreemi.

I. Joon $y = f(x)$, kus funktsioon $f(x)$ on vähemalt kaks korda diferentseeruv, on kumer (on nõgus) piirkonnas X parajasti siis, kui

$$f''(x) < 0 \quad (\text{vastavalt } f''(x) > 0)$$

kogu piirkonnas X.

Joone $y = f(x)$ punkti $(a, f(a))$ nimetatakse tema <u>käänupunktiks</u>, kui leiduvad ühepoolsed ümbrused $(a - \delta, a)$ ja $(a, a + \delta)$, et ühes neist on joon $y = f(x)$ kumer, teises aga nõgus.

Joonel $y = f(x)$ võib olla käänupunkt vaid tuletise $y' = f'(x)$ kriitilises punktis.

Joone käänupunktide leidmiseks võib kasutada järgmist teoreemi.

II. Kui tuletisel $f'(x)$ on kriitilises punktis $x = a$ range ekstreemum, siis punkt

$$(a, f(a))$$

on joone $y = f(x)$ käänupunkt.

<u>Näide 11</u>. Leida joone

$$y = (1 + x^2)\, e^x$$

kumeruse ja nõgususe piirkonnad ja käänupunktid.

<u>Lahendus</u>. Funktsioon

$$f(x) = (1 + x^2)\, e^x$$

on diferentseeruv kaks korda. Leiame tuletise

$$f'(x) = (1 + x)^2\, e^x$$

kriitilised punktid. Võrrandist

$$f''(x) = (x + 1)(x + 3)\, e^x = 0$$

saame kaks kriitilist punkti

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -3.$$

Funktsioon $f''(x)$ on pidev. Ta muudab märki vaid punktides x_1 ja x_2. Seega võime $f''(x)$ märgi kindlaks teha tema üksikute väärtuste abil ja see on antud joonisel 24.

$$\begin{array}{ccccc} & + & & - & & + & \\ \longrightarrow & & -3 & & -1 & & \longrightarrow x \end{array}$$

$f''(-10) > 0$ $\quad$ $f''(-2) < 0$ $\quad$ $f''(0) > 0$

Joon. 24.

Jooniselt näeme, kasutades teoreemi I, et joon

$$y = (1 + x^2)\, e^x$$

on kumer vahemikus $(-\infty, -3)$ ja $(-1, \infty)$ ning nõgus vahemikus $(-3, 1)$. Definitsiooni järgi on kohtadel $x_1 = -3$ ja $x_2 = -1$ joonel käänupunktid. Käänupunktide koordinaadid on

$$(-3,\ 10e^{-3}),\quad (-1,\ 2e^{-1}).$$

Näide 12. Leida joone

$$y = 3x - \sin 3x$$

käänupunktid.

Lahendus. Leiame funktsiooni $y = y(x)$ tuletised

$$y' = 3 - 3\cos 3x,$$

$$y'' = 9\sin 3x,$$

$$y''' = 27\cos 3x.$$

Tuletise y' kriitilisteks punktideks on punktid, kus

$$y'' = 9\sin 3x = 0,$$

s.t. punktid

$$x_k = \frac{k\pi}{3} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Et

$$y'''\left(\frac{k\pi}{3}\right) \neq 0,$$

siis teoreemi II järgi on punktid

$$\left(\frac{k\pi}{3}, k\pi\right)$$

iga täisarvulise k korral joone käänupunktid.

Ülesanded.

Leida järgmiste joonte kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid.

1079. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4.$

1080. $y = \dfrac{3}{x - 4}.$

1081. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}.$

1082. $y = \arctan x - x.$

1083. $y = x^2 \ln x.$

1084. $y = 4x - \cos 2x.$

1085. $y = e^{\arctan x}.$

1086. $y = e^{-x^2}.$

1087. $y = x + 2.$

1088. $y = x - \sin x.$

1089. $y = 4x^3 - 12x.$

1090. Olgu $P(x)$ positiivsete kordajatega ja paarisarvuliste astmenäitajatega polünoom. Tõestada, et funktsiooni $y = P(x) + ax + b$ graafik on kõikjal nõgus.

1091. Olgu jooned $y = \varphi(x)$ ja $y = \psi(x)$ nõgusad vahemikus (a,b). Näidata, et selles vahemikus on a) joon $y = \varphi(x) + \psi(x)$ nõgus; b) joon $y = \varphi(x)\psi(x)$ samuti nõgus, kui funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on positiivsed ja neil on ühine miinimumpunkt.

Ülesanded.

Leida järgmiste joonte käänupunktid.

1092. $y = \sin 2x - 4x + 2.$

1093. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$

1094. $y = \ln(1 + x^2).$

1095. $y = x \sin(\ln x) \quad (x > 0).$

1096. $y = (x^2 - 1)^2.$

1097. Näidata, et joone $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ kolm käänupunkti asuvad ühel sirgel.

1098. Missuguste h väärtuste korral on punktid (a, y(a)), kus $a \neq 0$, joone

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \quad (h > 0)$$

käänupunktideks?

1099. Näidata, et joontel $y = \pm e^{-x}$ ja $y = e^{-x}\sin x$ on ühised puutujad joone $y = e^{-x}\sin x$ käänupunktides.

1100. Missuguste a ja b väärtuste korral on punkt (1,3) joone $y = ax^3 + bx^2$ käänupunktiks?

§ 4. Joone asümptoodid.

Kui joone

$$y = f(x)$$

punkt (x,y) kaugenemisel lõpmatusse tema kaugus mingist sirgest läheneb nullile, siis seda sirget nimetatakse joone $y = f(x)$ asümptoodiks.

Asümptooti võrrandiga

$$x = a$$

nimetatakse püst- ehk vertikaalasümptoodiks, asümptooti võrrandiga

$$y = mx + b$$

aga kaldasümptoodiks.

Kui kõvera $y = f(x)$ punkt (x,y) läheneb kaldasümptoodile protsessis $x \to \infty$, siis seda asümptooti nimetatakse parempoolseks, kui aga protsessis $x \to -\infty$, siis vasakpoolseks.

Kui $m = 0$, siis kaldasümptooti nimetatakse rõht- ehk horisontaalasümptoodiks.

Kehtivad järgmised teoreemid.

I. Sirge $x = a$ on joone $y = f(x)$ püstasümptoodiks parajasti siis, kui

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty.$$

II. Sirge $y = m_1x + b_1$ on joone $y = f(x)$ parempoolseks kaldasümptoodiks parajasti siis, kui

$$m_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - m_1x\right].$$

III. Sirge $y = m_2x + b_2$ on joone $y = f(x)$ vasakpoolseks kaldasümptoodiks parajasti siis, kui

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - m_2x\right] .$$

Näide 14. Leida joone

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

asümptoodid.

Lahendus. Et

$$\lim_{|x|\to 1} y = \infty,$$

siis sirged

$$x = 1 \quad \text{ja} \quad x = -1$$

on teoreemi I järgi joone püstasümptoodid.

Leiame kaldasümptoodid. Saame

$$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to\infty} (y - x) = \lim \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x\right) = 0.$$

Seega teoreemi II järgi sirge $y = x$ on parempoolne kaldasümptoot. Analoogiliselt

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (y - x) = 0.$$

Teoreemi III järgi sirge $y = -x$ on vasakpoolne kaldasümptoot.

Näide 15. Leida joone

$$y = x + \ln x$$

asümptoodid.

Lahendus. Et

$$\lim_{x \to 0+} y = -\infty,$$

siis sirge $x = 0$ on joone püstasümptoot.

Vasakpoolset kaldasümptooti joonel ei ole, sest $x > 0$. Uurime parempoolse asümptoodi olemasolu. Saame:

$$m_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} (y - x) = \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$$

Seega joonel parempoolset kaldasümptooti ei ole teoreemi II põhjal.

Ülesanded.

Leida järgmiste joonte asümptoodid.

1101. $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

1102. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

1103. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

1104. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 9}$.

1105. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

1106. $y = \ln(1 + x)$.

1107. $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$.

1108. $y = 2x + \arctan \frac{x}{2}$.

1109. $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

1110. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

1111. $y = e^{-x^2} + 2$.

1112. $y = \dfrac{1}{1 - e^x}$.

1113. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

1114. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1115. $xy = a \quad (a \neq 0)$.

1116. $y = c + \dfrac{a^3}{(x - b)^2}$.

§ 5. Funktsiooni graafiku joonestamine iseloomustavate andmete järgi.

Funktsiooni graafiku joonestamisel iseloomustavate andmete järgi toimime järgmiselt.

1) Leiame funktsiooni määramispiirkonna ning katkevuspunktid, selgitame kas funktsioon pole paaris-, paaritu või perioodiline funktsioon.

2) Leiame asümptoodid.

3) Leiame monotoonsuse piirkonnad ja ekstreemumid.

4) Leiame kumeruse piirkonnad ja käänupunktid.

5) Saadud andmete järgi joonestame funktsiooni graafiku. Selleks valime saadud andmete põhjal kõigepealt sobiva mõõtühiku ja sobiva telgede paigutusega koordinaattasandi. Seejärel kanname koordinaattasandile asümptoodid, ekstreemumid ja käänupunktid. Siis joonestame järk-järgult funktsiooni graafiku, arvestades punktides 1),3) ja 4) saadud andmeid. Vajaduse korral leiame veel täiendavalt mõned teised graafiku punktid (näiteks graafiku lõikepunktid koordinaattelgedega, asümptootidega või muud, samuti ka ühepoolsed piirväärtused esimest liiki katkevuspunktides).

Näide 16. Joonestada funktsiooni

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

graafik iseloomustavate andmete järgi.

Lahendus. 1) Funktsiooni määramispiirkond on $X = \{(-\infty, 0), (0, \infty)\}$. Katkevuspunkte piirkonnas X ei ole. Funktsioon ei ole paaris-, paaritu ega perioodiline funktsioon.

2) Leiame graafiku asümptoodid. Funktsiooni graafikul on püstasümptoot

$$x = 0,$$

sest

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty ,$$

(mis ütleb, et funktsiooni graafik läheneb asümptoodile $x = 0$ mõlemalt poolt) ja ühine parem- ja vasakpoolne kaldasümptoot

$$y = x,$$

sest

$$m = \lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{|x| \to \infty} \left[f(x) - x\right] = 0.$$

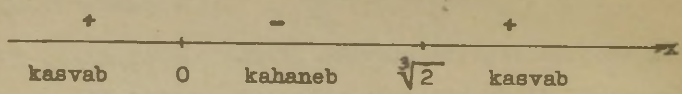
3) Leiame monotoonsuse piirkonnad ja ekstreemumid. Selleks leiame kõigepealt funktsiooni kriitilised punktid. Et

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} ,$$

siis ainukeseks kriitiliseks punktiks on statsionaarne punkt

$$x_1 = \sqrt[3]{2},$$

sest $x_2 = 0 \notin X$. Kanname x-teljele punktid x_1 ja x_2 ning määrame tuletise märgi x-telje igal saadud osal (näiteks argumendi x sobivalt valitud väärtuse abil).



Joon. 25.

Saame tulemuseks, et funktsioon

vahemikus $(-\infty, 0)$ kasvab,

vahemikus $(0, \sqrt[3]{2})$ kahaneb,

vahemikus $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ kasvab.

Monotoonsuse vahemike väljakirjutamise asemel võib tulemuse märkida lihtsalt joonisele (vt. joon. 25). Jooniselt näeme, et punktis $x_1 = \sqrt[3]{2}$ on lokaalne miinimum $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx \frac{3}{2}$ 1,26, mis (teoreemi IV järgi paragrahvist 2) on vahemikus $(0, \infty)$ ühtlasi ka globaalne.

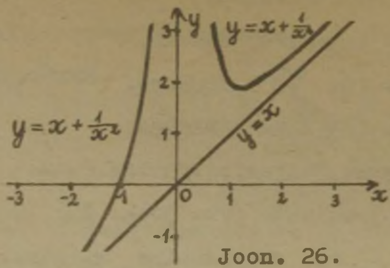
4) Leiame graafiku kumeruse piirkonnad ja käänupunktid. Et

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0,$$

siis funktsiooni graafik on kogu piirkonnas X kumer ja seega graafikul käänupunkte ei ole.

5) Saadud andmete järgi joonestame funktsiooni graafiku. Enne leiame veel graafiku lõikepunktid x-teljega (y-telge graafik ei lõika, sest $x = 0 \notin X$). Need saame võrrandist $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2} = 0$, kust $x = -1$. Et $f(x) - (mx + b) = x + \frac{1}{x^2} - x = \frac{1}{x^2} > 0$, siis graafik kaldasümptooti $y = x$ ei lõika ja asetseb ülalpool seda asümptooti.

Nüüd kanname xy-tasandile asümptoodid $x = 0$, $y = x$, ekstreemumi $E = (\sqrt[3]{2}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}) \approx (1{,}26;\ 1{,}89)$ ja funktsiooni nullkoha $x = -1$ ning joonestame ülejäänud andmete põhjal funktsiooni graafiku (vt. joon.26).



Joon. 26.

Näide 17. Joonestada funktsiooni

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$$

graafik iseloomustavate andmete järgi.

Lahendus. 1) Funktsiooni määramispiirkond on X = $= (-\infty, \infty)$, milles ta on pidev. Ta ei ole paaris- ega paaritu ega perioodiline funktsioon.

2) Püstasümptoote ei ole. Et $m = \lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{|x| \to \infty} (y - x) = -2$, siis graafikul on ühine parem- ja vasakpoolne kaldasümptoot $y = x - 2$.

3) Arvutades

$$y' = \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x(x - 6)^2}},$$

saame funktsiooni kriitilised punktid

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 6.$$

Paigutades nad x-teljele, määrame x-telje igal saadud osal y' märgi, mille abil teeme kindlaks monotoonsuse piirkonnad (vt. joon. 27).

+		−		+		+	
kasvab	0	kahaneb	4	kasvab	6	kasvab	x

Joon.27.

Jooniselt näeme, et kohal $x = 0$ on funktsioonil lokaalne maksimum f(0) ja kohal $x = 4$ lokaalne miinimum

$f(4) = -2\sqrt{4} \approx -3{,}17$.

4) Arvutades (logaritmilise diferentseerimise teel)

$$y'' = -\frac{8}{\sqrt{x^4(x-6)^5}},$$

saame tuletise y' kriitilised punktid

$$x_1 = 0,\ x_3 = 6.$$

Paigutades nad x-teljele, määrame x-telje igal saadud osal y" märgi, mille abil teeme kindlaks kumeruse piirkonnad (vt. joon.28).

```
       +              +                -
───────────┼──────────────────┼──────────────►x
  nõgus    0     nõgus        6     kumer
```

Joon. 28.

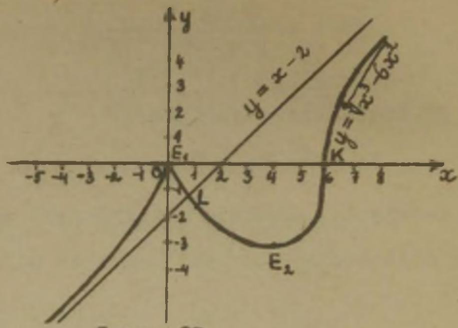
Jooniselt näeme, et punkt K = (6,0) on graafiku ainuke käänupunkt.

5) Joonestame funktsiooni graafiku. Selleks kanname xy-tasandile asümptoodi $y = x - 2$, ekstreemumid $E_1 = (0,0)$, $E_2 \approx (4;\ -3{,}17)$ ja käänupunkti K = (6,0). Edasi uurime veel graafiku ja asümptoodi vastastikust asendit. Funktsiooni pidevusest ja punktide E_1, E_2 ja K asendist näeme, et graafik lõikab asümptooti. Lõikepunkti L saamiseks lahendame võrrandi

$$f(x) - (mx + b) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - (x - 2) = 0,$$

kust saame $x = \frac{2}{3}$. Seega punktis $L = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ lõikab graafik asümptooti.

Ekstreemumite asendi järgi näeme, et punktist L vasakul on graafik ülalpool asümptooti ja punktist L paremal – allpool asümptooti. Nüüd joonestame ülejäänud andmete põhjal graafiku (vt. joon.29).



Joon. 29.

Ülesanded.

Joonestada järgmistele funktsioonidele graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

1117. $y = \dfrac{x^3 - 9x}{10}$.

1118. $y = x^3 - \dfrac{3}{x}$.

1119. $y = x^3 - 3x^2$.

1120. $y = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$.

1121. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1122. $y = \dfrac{16}{x^2(x - 4)}$.

1123. $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$.

1124. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$.

1125. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{3 - x}$.

1126. $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

1127. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x - 1)^2}$.

1128. $y = \dfrac{3x - 2}{5x^2}$.

1129. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$.

1130. $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}$.

1131. $y = (x + 1)^3 \sqrt[3]{x^2}$.

1132. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

1133. $y = e^{-x^2}$.

1134. $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

1135. $y = xe^{-x}$.

1136. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

1137. $y = |e^x - 1|$.

1138. $y = \ln(1 + e^{-x})$.

1139. $y = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$.

1140. $y = \ln|x| - \frac{2(x - 1)}{x + 1}$.

1141. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1142. $y = \frac{\sin x}{x}$.

1143. $y = x + \frac{\sin x}{x}$.

1144*. $y = \sin x \cdot \sin 2x$.

1145. $y = x + \sin x$.

1146. $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$.

1147. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1148. $y = \begin{cases} 1 + \ln|x|, & \text{kui } -\infty < x \leq 1, \\ e^{-x}, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$

1149. $y = x \operatorname{arccot} x$.

1150. $f(x) = \ln|\cos x|$.

1151. $f(x) = x - \ln|\sin x|$, kus $0 < |x| < \pi$.

1152. $f(x) = \begin{cases} e^{x+2} - 1, & \text{kui } x < -1, \\ x^3 - 3x^2 - 1, & \text{kui } x \geq -1. \end{cases}$

VI. DIFERENTSIAALARVUTUSE RAKENDUSI.

§ 1. Ligikaudne arvutamine.

Kui funktsioon $f(x)$ on vähemalt n korda diferentseeruv kohal x_0, siis kehtib Taylori valem

$$f(x) = P_n(x) + \alpha_n,$$

kus $x = x_0 + \Delta x$ ja

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f'(x_0)\Delta x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n.$$

Suurust $P_n(x)$ nimetatakse Taylori polünoomiks ja suurust

$$\alpha_n = o(\Delta x^n), \quad \text{kui } \Delta x \to 0,$$

jääkliikmeks.

Kui $f^{(n)}(x)$ on pidev lõigus $[x_0, x_0 + \Delta x]$ ja on diferentseeruv vähemalt vahemikus $(x_0, x_0 + \Delta x)$, siis võime jääkliikme kirjutada Lagrange'i kujus

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)\,\Delta x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1$$

või Cauchy kujus

$$\alpha_n = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)(1 - \Theta)^n\,\Delta x^{n+1}.$$

Kui Taylori valemis on $x_0 = 0$, siis $\Delta x = x$ ja me saame <u>Maclaurin'i</u> <u>valemi</u>

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \alpha_n.$$

1° Taylori valemi jääkliikme jaoks saame jääkliikme Lagrange'i kujust hinnangu

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Delta x|^{n+1},$$

kus

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \Delta x} \left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

2° Teades argumendi x väärtust ligikaudselt (vea ülemmäär ehk <u>absoluutne</u> <u>viga</u> olgu δx), saame valemist $y = f(x)$ arvutamise tulemusena ka y väärtuse ligikaudselt, kusjuures vastav absoluutne viga δy avaldub valemiga

$$\delta y = |f'(x)|\delta x.$$

Suuruste x ja y <u>suhtelisteks</u> ehk <u>relatiivseteks</u> vigadeks nim. vastavalt väärtusi

$$\frac{\delta x}{|x|} \quad \text{ja} \quad \frac{\delta y}{|y|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta x.$$

3° Algebralise summa absoluutne viga võrdub liidetavate absoluutsete vigade summaga:

$$\delta(u \pm v) = \delta u + \delta v.$$

4° Korrutise relatiivne viga võrdub tegurite relatiivsete vigade summaga:

$$\frac{\delta(uv)}{|uv|} = \frac{\delta u}{|u|} + \frac{\delta v}{|v|}.$$

5° Jagatise relatiivne viga võrdub jagatava ja jagaja relatiivsete vigade summaga:

$$\frac{\delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\left|\frac{u}{v}\right|} = \frac{\delta u}{|u|} + \frac{\delta v}{|v|} .$$

Näide 1. Mitu liiget tuleb võtta Maclaurin'i valemis, et arvutada funktsiooni e^x väärtusi lõigus $[-1, 1]$ täpsusega 10^{-5}?

Lahendus. Et $f^{(k)}(x) = e^x$, siis

$$M_{n+1} = \max_{-1\leq x\leq 1}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = e < 3.$$

Liikmete arvu n määramiseks saame seega võrratuse

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{3}{(n+1)!} 1^{n+1} = \frac{3}{(n+1)!} \leqslant 10^{-5}$$

(sest peab olema $|\alpha_n| \leqslant 10^{-5}$ ja $\Delta x = 1$), millest

$$(n + 1)! \geqslant 3 \cdot 10^5 = 300000.$$

Et 9! = 362880, siis võime võtta n + 1 = 9 ehk n = 8. Seega valem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^8}{8!}$$

võimaldab arvutada eksponentfunktsiooni väärtusi lõigus $[-1, 1]$ täpsusega 10^{-5}.

Näide 2. Milline viga tekib matemaatilise pendli perioodi arvutamisel valemiga $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kui pendli pikkus on $l = (24{,}0 \pm 0{,}2)$ cm?

Arvutame vastava relatiivse vea $\frac{\delta T}{T}$. Selle määramiseks paneme tähele, et arvutamisel kasutame suuruste π ja

g ligilähedasi väärtusi. Seega sõltub otsitava suuruse viga ka sellest, mitme õige kümnendkohaga on võetud π ja g. Vastavate kümnendkohtade arv tuleb valida nii, et see ei muudaks oluliselt suuruse $\frac{\delta T}{T}$ väärtust, kuid ei tooks ka kaasa liiga suuri arvutusi.

Vastavalt reeglitele 2°, 4° ja 5°, saame

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \pi}{\pi} + \frac{\delta \sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{\delta \pi}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\frac{l}{g}\right)}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} =$$

$$= \frac{\delta \pi}{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\delta\left(\frac{l}{g}\right)}{\frac{l}{g}} = \frac{\delta \pi}{\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g}\right).$$

Et $\frac{1}{2}\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{2}\frac{0{,}2.100}{24}\,\% = 0{,}42\,\%$, siis piisab võtta

$g = (980 \pm 2)\ \frac{cm}{sek^2}$ ning $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}002$, sest sel korral

$\frac{1}{2}\frac{\delta g}{g} = \frac{2.100}{2.980}\,\% = 0{,}01\,\%$ ning $\frac{\delta \pi}{\pi} = \frac{0{,}002.100}{3{,}14}\,\% = 0{,}07\,\%$.

Seega

$$\frac{\delta T}{T} = (0{,}07 + 0{,}01 + 0{,}42)\,\% = 0{,}5\,\%.$$

Ülesanded.

1153. Tõestada ligikaudne võrdus

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \qquad (a > 0),$$

kus $|x| \ll a^2$ (kirjutis $A \ll B$ tähendab, et kahe positiivse arvu A ja B puhul A on oluliselt väiksem kui B).

Arvutada: a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{34}$ ja c) $\sqrt{120}$.

1154. Tõestada valem

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0),$$

kus $|x| \ll a^n$.

Arvutada: a) $\sqrt[3]{9}$, b) $\sqrt[4]{80}$, c) $\sqrt[3]{100}$, d) $\sqrt[10]{1000}$.

Leida järgmiste ligikaudsete võrduste absoluutne viga:

1155. $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1156. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

1157. $\tan x \approx x + \frac{x^3}{3}$, $|x| \leqslant 0,1$.

1158. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1159. Veenduda, et nende nurkade korral, mis on väiksemad kui 28°, on ligikaudse võrduse

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

viga väiksem kui 10^{-6}. Seda teades, leida $\sin 20^\circ$ kuue õige kohaga.

1160. Leida $\cos 10^\circ$ täpsusega 10^{-3}. Veenduda, et selleks piisab võtta teise astme Taylori polünoom.

Taylori valemi abil arvutada ligikaudselt järgmised suurused, võttes sobiva n. Hinnata vastavat viga.

1161. $\sqrt[3]{30}$.

1162. $\sqrt[5]{250}$.

1163. ln 1,2.

1164. arctan 0,8.

1165. arcsin 0,45.

1166. $(1,1)^{1,2}$.

1167. Ruudu külg $a = (2,4 \pm 0,05)$m. Millise absoluutse ja relatiivse veaga on võimalik arvutada ruudu pindala?

1168. Millise relatiivse veaga võib mõõta kera raadiust, et kera ruumala saaks määrata 1% täpsusega?

1169. Tehnilistes arvutustes taandatakse sageli π ja $\sqrt{g}$, kui üks neist seisab lugejas ning teine nimetajas. Kui suur viga sel juhul tehakse?

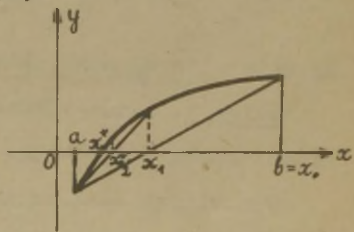
§ 2. Võrrandite ligikaudne lahendamine.

Olgu vaja lahendada võrrand

$$f(x) = 0,$$

kus $f(x)$ on vaadeldavas piirkonnas vähemalt kaks korda diferentseeruv funktsioon.

1° Kõõlude meetod (vt. joon.30).



Joon.30.

Leiame a ja b selliselt, et $f(a)$ ja $f(b)$ on erinevate märkidega ning $f'(x)$ ja $f''(x)$ säilitavad märki lõigus $[a,b]$. Alglähendiks x_0 võtame lõigu $[a,b]$ selle otspunkti, kus $f(x)$ ja $f''(x)$ on erinevate märkidega. Järgmised lähendid x_{n+1} arvutame järk-järgult valemist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a-x_n)f(x_n)}{f(a)-f(x_n)} \quad (n = 0,1,\ldots).$$

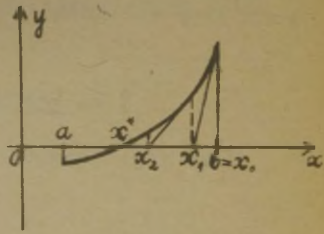
Selliselt saadud jada $\{x_n\}$ koondub võrrandi lahendiks x^*, kusjuures

$$(1) \qquad |x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m},$$

kus

$$m = \min_{a \le x \le b} f'(x) .$$

2°. <u>Newtoni (puutujate) meetod</u> (vt. joon.31). Punktid a ja b valime nagu eelmisel juhul 1°. Alglähendiks x_0 valime lõigu [a,b] selle otspunkti, kus f(x) ja f"(x) on sama märgiga. Järgnevad lähendid x_{n+1} arvutame järk-järgult valemist



Joon.31.

$$(2) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0,1,\ldots).$$

Ka siin $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Lähendi viga hinnatakse valemiga (1).

<u>Näide 1</u>. Leida võrrandi $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ lahend ning hinnata selle viga.

Proovimise teel leiame, et $f(2) = -3$ ning $f(3) = 13$. Seega asetseb lahend lõigus $[2, 3]$. Arvutame $f'(x) = 3x^2 - 3$ ja $f''(x) = 6x$. Vahetult kontrollides näeme, et lõigus $[2,3]$ on eeldused Newtoni meetodi rakendamiseks täidetud. Et selles lõigus $f''(x) > 0$, siis valime alglähendiks $x_0 = 3$. Arvutame valemi (2) abil järgmise lähendi x_1. Et

$$f(3) = 27 - 9 - 5 = 13,$$

$$f'(3) = 27 - 3 = 24,$$

siis

$$x_1 = 3 - \frac{13}{24} = 2,5.$$

Hindame saadud lähendi x_1 täpsust valemi (1) abil. Et tuletis f'(x) kasvab lõigus [2,3] , siis

$$m = f'(2) = 12 - 3 = 9.$$

Seega valemi (1) järgi

$$|x_1 - x^*| \leqslant \frac{f(2,5)}{9} = \frac{3,1}{9} = 0,36.$$

Arvutame järgmise lähendi x_2. Leides

$$f'(2,5) = 3.2,5^2 - 3 = 15,75,$$

saame

$$x_2 = 2,5 - \frac{3,1}{15,75} = 2,5 - 0,19 = 2,3.$$

Edasi leiame lähendi x_3, saame

$$f(2,3) = 0,267, \quad f'(2,3) = 12,87,$$

$$x_3 = 2,3 \frac{0,267}{12,87} = 2,279.$$

Et

$$f(x_3) = f(2,279) = 0,003,$$

siis

$$|x_3 - x^*| \leqslant \frac{f(x_3)}{m} = \frac{0,003}{9} = 0,00036,$$

kust näeme, et x_3 annab meile lahendi, kus vähemalt kaks kohta pärast koma on õiged. Kui arvutada x_4, saaksime veel täpsema lähendi lahendile.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid kolmekohalise täpsusega (algklähendid leida graafiliselt).

1170. $x^3 - 6x + 2 = 0.$ 1173. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x.$

1171. $x^4 - x - 1 = 0.$ 1174. $x \log x = 1.$

1172. $x - 0,1 \sin x = 2.$ 1175. $x + e^x = 0.$

1176. Näidata, et positiivsete kordajatega polünoomil f(x), millel on vaid paaritute astendajatega liikmed, on üks ja ainult üks (võib-olla ka kordne) A-punkt (s.t. võrrandi f(x) = A lahend). Leida kõõlude meetodi abil võrrandi

$$x^3 + 3x - 1 = 0$$

lahend täpsusega 10^{-2}.

1177. Tõestada teoreem: võrrandil $x^3 + px + q = 0$ on kolm reaalset lahendit parajasti siis, kui $4p^3+27q^2 < 0$. Leida kõõlude meetodi abil võrrandi

$$x^3 - 9x + 2 = 0$$

lahendid täpsusega 10^{-2}.

§ 3. Parameetriliselt antud funktsioonid.

Olgu antud pidev joon võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta). \tag{3}$$

Kui joont (3) saab esitada võrrandiga

$$y = f(x) \quad \text{või} \quad x = g(y),$$

siis öeldakse, et funktsioon f(x) või vastavalt g(y) on antud parameetriliselt võrranditega (3).

Kui $x(t)$ ja $y(t)$ on vahemikus (α, β) diferentseeruvad funktsioonid ning $y'(t) \neq 0$, siis võrrandid (3) määravad ühese pideva funktsiooni

$$(4) \qquad y = y\,[t(x)] = f(x)$$

(kus $t = t(x)$ on $x = x(t)$ pöördfunktsioon), millel kohal x on tuletis

$$(5) \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} .$$

Tähistades $y'_t = \dot{y}$ ja $x'_t = \dot{x}$, võime valemi (5) kirjutada kujul

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Funktsiooni (4) teine tuletis y''_{x^2} arvutatakse järgmise eeskirja järgi (kasutades valemit (5)):

$$(6) \qquad y''_{x^2} = (y'_x)'_x \underset{(5)}{=} \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} .$$

Analoogiliselt valemi (5) põhjal

$$(7) \qquad y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x \underset{(5)}{=} \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t} ,$$

jne.

Vastaku joone (3) punktile (a,b) parameetri väärtus $t = t_0$, s.t.

$$\begin{cases} a = x(t_0), \\ b = y(t_0) \end{cases}$$

siis punktis (a,b) on joone (3) puutuja määratud võrrandiga

$$(8) \qquad \frac{y - b}{y'(t_o)} = \frac{x - a}{x'(t_o)}$$

ja normaal-võrrandiga

$$(9) \qquad \frac{y - b}{x'(t_o)} = \frac{x - a}{y'(t_o)}.$$

Polaarkoordinaatides antud joont

$$r = f(\varphi) \qquad (\alpha < \varphi < \beta)$$

võib vaadelda parameetriliselt antud joonena

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Näide 1. Arvutada funktsiooni

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$$

tuletised y'_x, y''_{x^2} ja y'''_{x^3} .

Lahendus. Valemi (5) järgi saame

$$y'_x = \frac{3t^2}{-e^{-t}} = - 3t^2e^t.$$

Eeskirja (6) (või vahetult valemi (5)) järgi on

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \frac{-6t\ e^t - 3t^2\ e^t}{-e^{-t}} = 3e^{2t}(2t + t^2).$$

Ja lõpuks saame eeskirja (7) (või jällegi vahetult valemi

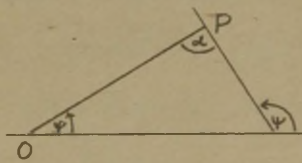
(5)) järgi

$$y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x = \frac{6e^{2t}(t^2 + 3t + 1)}{-e^{-t}} =$$

$$= 6e^{3t}(t^2 + 3t + 1).$$

<u>Näide 2</u>. Näidata, et joon $r = e^{a\varphi}$ lõikab punktist O väljuvaid raadiusvektoreid ühe ja sama nurga all.

<u>Lahendus</u>. Olgu raadiusvektori ja joone vaheline nurk α ning puutuja tõusunurk ψ (vt. joon. 32). Sel juhul



Joon. 32.

$$\alpha = \psi - \varphi .$$

Piisab, kui näidata, et

$$\tan(\psi - \varphi) = \text{const.}$$

Arvestades, et $\tan\psi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, saame

$$\tan(\psi - \varphi) = \frac{\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi}{\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi} = \frac{\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi}{\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi}.$$

Et $x = r\cos\varphi = e^{a\varphi}\cos\varphi$ ning $y = r\sin\varphi = e^{a\varphi}\sin\varphi$,

siis $\dot{x} = a\,e^{a\varphi}\cos\varphi - e^{a\varphi}\sin\varphi = e^{a\varphi}(a\cos\varphi - \sin\varphi)$,

$\dot{y} = a\,e^{a\varphi}\sin\varphi + e^{a\varphi}\cos\varphi = e^{a\varphi}(a\sin\varphi + \cos\varphi)$.

Seega

$\tan(\psi - \varphi) =$

$$= \frac{e^{a\varphi}(a\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi - a\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)}{e^{a\varphi}(a\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + a\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)} = \frac{1}{a}.$$

Ülesanded.

Elimineerida parameeter järgmistest võrranditest.

1178. $x = 3t, \quad y = 6t - t^2.$

1179. $x = t^3 + 1, \quad y = t^2.$

1180. $x = \cos t, \quad y = \sin 2t.$

1181. $x = \varphi - \sin\varphi, \ y = 1 - \cos\varphi.$

1182. $x = \tan t, \quad y = \sin 2t + 2\cos 2t.$

Leida järgmiste funktsioonide puhul $\frac{dy}{dx}$.

1183. $x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$

1184. $x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi).$

1185. $x = \frac{t+1}{t}, \quad y = \frac{t-1}{t}.$

1186. $x = \ln(1 + t^2), \quad y = t - \arctan t.$

1187. $x = e^t\sin t, \quad y = e^t\cos t.$

1188. $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$

Milliste nurkade all lõikuvad järgmised jooned?

1189. $y = x^2$ ja $x = \frac{5}{3}\cos t, \quad y = \frac{5}{4}\sin t.$

1190. $x = a\cos\varphi, \ y = a\sin\varphi$ ja $x = \frac{at^2}{1+t^2}, \ y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}.$

Leida järgmiste joonte puutujate ja normaalide võrrandid märgitud kohas.

1191. $x = \sin t, \ y = \cos 2t$, kui $t = \frac{\pi}{6}$.

1192. $x = 2\ln\cot t + 1, \ y = \tan t + \cot t$, kui $t = \frac{\pi}{4}$.

1193. $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^2}$, kui $t = 2$.

Arvutada järgmiste funktsioonide puhul märgitud tuletis.

1194. $x = at^2$, $y = bt^3$; $\frac{d^2x}{dy^2}$.

1195. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$; $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1196. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$; $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1197. $x = a(t - \sin t)$, $y = a \cos t$; $\frac{d^4y}{dx^4}$.

1198. Näidata, et joone

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

normaalid on ringjoone

$$x^2 + y^2 = a^2$$

puutujateks.

<u>Näide 3</u>. Leida joone

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = \sin t \end{cases}$$

käänupunktid.

<u>Lahendus</u>. Tuleb leida tuletise y'_x kriitilised punktid. Selleks arvutame y''_{x^2}, saame

$$y''_{x^2} = - \frac{\sin t + \cos t}{e^{2t}}.$$

Et $e^{2t} \neq 0$, siis käänupunktid võivad olla vaid seal, kus $y''_{x^2} = 0$, s.t. kus

$$\sin t + \cos t = 0.$$

Viimane võrrand on samaväärne võrrandiga

$$\tan t = -1,$$

kust saame

$$t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Paigutades need parameetri väärtused joone võrrandisse, saame punktid (x,y), mis kõik osutuvad käänupunktideks (sest neis $y'''_{x^3} \neq 0$).

Näide 4. Joonestada joon $x^2y^2 = x^2 + y^2$.

Lahendus. Selle joone leidmiseks esitame joone parameetrilisel kujul:

$$x = \frac{1}{\sin t}, \quad y = \frac{1}{\cos t}.$$

Et $\sin t$ ja $\cos t$ on perioodilised funktsioonid perioodiga 2π, siis on mõtet vaadelda vaid parameetri t muutumist lõigus $[0, 2\pi]$. Kuidas muutuvad joone koordinaadid x ja y parameetri t muutudes, selle kindlakstegemiseks jaotatakse parameetri muutumispiirkonnad (antud juhul lõik $[0, 2\pi]$ osadeks. Jaotuspunktideks võetakse

1) punktid, kus x või y pole määratud,

2) punktid, kus $\dot{x}$ või $\dot{y}$ pole määratud,

3) punktid, kus $\dot{x}$ või $\dot{y}$ võrdub nulliga.

Antud juhul

$$\dot{x} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} \quad \text{ja} \quad \dot{y} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}.$$

Seega vaadeldaval juhul tuleb meil jaotuspunktideks võtta kõik sin t ja cos t nullkohad lõigus $[0, 2\pi]$, s.t. punktid $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ ja $t = \frac{3}{2}\pi$. Järgnevalt uurime x ja y käitumist nendele jaotuspunktidele lähenemisel. Selleks leiame piirväärtused:

a) kui $t \to 0+$, siis $x \to \infty$ ja $y \to 1+$;

b) kui $t \to \frac{\pi}{2}-$, siis $x \to 1-$ ja $y \to \infty$;

c) kui $t \to \frac{\pi}{2}+$, siis $x \to 1-$ ja $y \to -\infty$;

d) kui $t \to \pi-$, siis $x \to +\infty$ ja $y \to -1+$;

e) kui $t \to \pi+$, siis $x \to -\infty$ ja $y \to -1+$;

f) kui $t \to \frac{3}{2}\pi-$, siis $x \to -1+$ ja $y \to -\infty$;

g) kui $t \to \frac{3}{2}\pi+$, siis $x \to -1+$ ja $y \to \infty$;

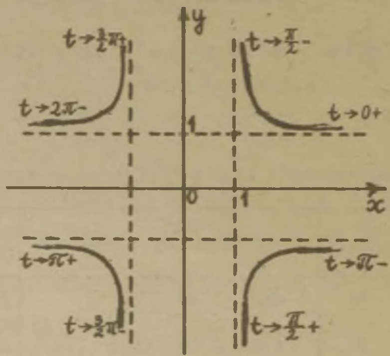
h) kui $t \to 2\pi-$, siis $x \to -\infty$ ja $y \to 1-$.

Saadud andmed võtame kokku järgmisse tabelisse:

Piirkond	$\dot{x}$ märk	$\dot{y}$ märk	x muutumise iseloom	y muutumise iseloom
$(0, \frac{\pi}{2})$	$-$	$+$	kah. $(\infty, 1-)$	kasv. $(1+, \infty)$
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$+$	$+$	kasv. $(1-, \infty)$	kasv. $(-\infty, -1-)$
$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$+$	$-$	kasv. $(-\infty. -1-)$	kah. $(-1-, -\infty)$
$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$	$-$	$-$	kah. $(-1-, -\infty)$	kah. $(\infty, 1-)$

Järgnevalt asumegi joonise tegemisele. Eelnevalt aga leiame veel $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ väärtused nende jaotuspunktidena esinevate t väärtuste korral, kus x ja y on mõlemad lõplikud. Kui selliseid on, siis märgime need punktid kõigepealt graafikule koos vastavate puutujalõikudega. Antud joone puhul aga niisuguseid punkte pole.

Edasi vaatleme, kas meie joonel on rõht- ja püstasümptoote. Selleks vaatleme koostatud tabelist, kas muutuja x lähenemine lõpmatusse ei vasta muutuja y lähenemisele mingile kindlale konstandile. Näeme, et antud juhul on niisuguseid asümptoote neli: $x = \pm 1$ ja $y = \pm 1$. Kanname need graafikule ja joonestame joone (vt. joon. 33). Selleks paneme veel enne tähele, et võrrandist $x^2y^2 = y^2 + x^2$ järeldub vaadeldava joone sümmeetrilisus nii koordinaattelgede kui ka nullpunktide suhtes.



Joon. 33.

<u>Näide 4</u>. Joonestada joon $x^3 + y^3 = 3x^2$.

Ka siin läheme üle parameetrilistele võrranditele, võttes $y = tx$. Sel juhul

$$x^3 + t^3x^3 = 3x^2,$$

millest

$$x = \frac{3}{1 + t} \quad \text{ning} \quad y = \frac{3t}{1 + t^3}.$$

Leiame, et

$$\dot{x} = -\frac{9t^2}{(1+t^3)^2} \quad \text{ja} \quad \dot{y} = -\frac{3(2t^3-1)}{(1+t^3)^2}.$$

Kui koostada ka siin tabel samal põhimõttel nagu eelmises ülesandes, siis saame järgmise tabeli:

Piirkond	$\dot{x}$ märk	$\dot{y}$ märk	x muutumise iseloom	y muutumise iseloom
$(-\infty, -1)$	$-$	$+$	0 kahaneb $-\infty$	0 kasvab ∞
$(-1, 0)$	$-$	$+$	kahaneb 3	$-\infty$ kasvab 0
$(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}})$	$-$	$+$	3 kahaneb 2	0 kasvab $\sqrt[3]{4}$
$(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \infty$	$-$	$-$	2 kahaneb 0	$\sqrt[3]{4}$ kahaneb 0

Tabelist näeme, et $t = -\infty$ korral $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ korral $x = 3$, $y = 0$, $t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ korral $x = 2$, $y = \sqrt[3]{4}$ ning $t = \infty$ korral $x = 0$, $y = 0$. Leiame nüüd $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ nendes punktides. Saame, et $y' = \infty$, kui $t = \pm\infty$, $y' = \infty$, kui $t = 0$, ja $y' = 0$, kui $t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

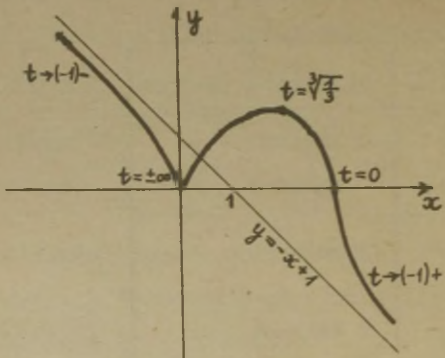
Samuti nähtub tabelist, et kui $t \to -1$, siis nii x kui ka y lähenevad lõpmatusele. Seal võib esineda kaldasümptoot. Kui kaldasümptoot $y = mx + b$ esineb, siis

$$m = \lim \frac{y}{x} \quad \text{ning} \quad b = \lim(y - mx).$$

Arvutades näeme, et

$$m = \lim_{t\to -1} \frac{y}{x} = -1 \quad \text{ning} \quad \lim_{t\to -1} (y - mx) = 1.$$

Konstrueerime nüüd joone graafiku, kandes xy-tasandile kõigepealt need punktid koos vastavate puutujalõikudega, mis vastavad parameetri väärtustele $t = \pm\infty$, $t = 0$ ja $t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Samuti kanname joonisele saadud asümptoodi $y = -x + 1$ (vt. joon. 34).



Joon. 34.

Ülesanded.

Joonestada järgmised jooned:

1199. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.

1200. $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6 \arctan t$.

1201. $x = \frac{3t}{1 + t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$.

1202. $r = a \sin 3\varphi$ (kolmeleheline roos).

1203. $r = a \tan\varphi$.

1204. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (kardioid).

Joonestada järgmised jooned, viies eelnevalt nende võrrandid polaarkoordinaatidesse.

1205. $(x^2 + y^2)x = 2y.$ 1207. $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2.$

1206. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$

§ 4. Joonte puutumine. Kõverus.

Öeldakse, et punktis x_0 on joontel

$$y = f(x) \quad \text{ja} \quad y = g(x)$$

n-järku puutumine, kui

$$g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0,1,\dots,n)$$

ning

$$g^{(n+1)}(x_0) \neq f^{(n+1)}(x_0).$$

Ringjoont

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

millel on antud joonega $x = x(t)$, $y = y(t)$ punktis x vähemalt teist järku puutumine, nim. antud joone kõverusringiks punktis x. Selle ringi raadiust

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}$$

nim. kõverusraadiuseks ning viimase pöördväärtust $\varkappa$ -kõveruseks.

Kui joon on antud polaarkoordinaatides $r = f(\varphi)$, siis

$$\varkappa = \frac{r^2 + 2r'^2 + rr''}{(r^2 + r'^2)}.$$

Joone kõverusringide keskpunktide geomeetrilist kohta nim. joone <u>evoluudiks</u>. Kui joon on antud võrranditega $x = x(t)$, $y = y(t)$, siis evoluudi määravad võrrandid

$$\xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\dot{y}$$

$$\eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\dot{x}.$$

<u>Näide 1</u>. Leida polünoom, millel on funktsiooniga $f(x) = \cos x$ punktis $x = 0$ vähemalt neljandat järku puutumine.

<u>Lahendus</u>. Et meil $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$ ning $f^{IV}(0) = 1$, siis vastava polünoomi $P(x)$ kordajate määramiseks saame viis võrrandit:

$P(0) = 1$, $P'(0) = 0$, $P''(0) = -1$, $P'''(0) = 0$ ning $P^{IV}(0) = 1$.

Otsitav polünoom $P(x)$ peab olema neljanda astme polünoom

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

(sellel on viis kordajat, mida saame määrata viie tingimuse abil). Et

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3,$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3 + 12a_4x^2,$$

$$P'''(x) = 6a^3 + 24a_4x, \quad P^{(IV)}(x) = 24a_4,$$

siis saame siit

$$P(0) = a_0 = 1, \; P'(0) = a_1 = 0, \; P''(0) = 2a_2 = -1,$$

$$P'''(0) = 6a_3 = 0, \quad P^{(IV)}(0) = 24a_4 = 1,$$

millest $a = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0$ ja $a_4 = \frac{1}{24}$.

Seega polünoomil

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

on funktsiooniga $f(x) = \cos x$ punktis $x = 0$ neljandat järku puutumine. Näeme, et saadud polünoom on funktsiooni $\cos x$ neljanda astme Taylori polünoom. See on ka loomulik, sest n-astme Taylori polünoomi esimesed n tuletist vastavas punktis langevad kokku vaadeldava funktsiooni vastavate tuletistega, s.t. funktsioonil on n-järku puutumine oma n-astme Taylori polünoomiga.

Näide 2. Leida ellipsi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ evoluut.

Lahendus. Arvutades saame

$$\dot{x} = -a\sin t, \quad \dot{y} = b\cos t,$$

$$\ddot{x} = -a\cos t, \quad \ddot{y} = -b\sin t$$

ning siit

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$$

$$\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y} = ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab.$$

Seega

$$\xi = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\, b\cos t = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

$$\eta = b\sin t + \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}(-a\sin t) = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

Siit näeme, et ellipsi evoluudiks on astroid.

Ülesanded.

1208. Näidata, et joontel $y = \tan x$ ja $y = \arctan x$ on teist järku puutumine punktis $x = 0$.

1209. Leida selline sirge $y = mx + b$, millel oleks joonega $y = x^3 - 3x^2 + 2$ enam kui esimest järku puutumine.

1210. Millisel ruutparaboolil $y = ax^2 + bx + c$ on punktis x_0 joonega $y = e^x$ teist järku puutumine?

1211. Leida neljanda astme parabool $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, millel on punktis $x = 0$ aheljoonega $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ neljandat järku puutumine.

1212. Olgu $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, kui $x \neq 0$, ja $y = 0$, kui $x = 0$. Näidata, et sel joonel on punktis $x = 0$ x-teljega lõpmata suur puutumise järk.

Leida järgmiste joonte kõverused.

1213. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, kui $t = 1$.

1214. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, kui $t = \frac{\pi}{2}$.

1215. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Leida suurim kõverus järgmistel joontel.

1216. $y = \ln x$.

1217. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1218. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

1219. Leida suurim kõverusraadius joonel $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

Leida järgmiste joonte kõverusringide keskpunktide koordinaadid ja evoluudi võrrand.

1220. $y = x^n$.

1221. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1222. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1223. $y^3 = ax^2$.

1224. $r = a\, e^{m\varphi}$.

1225. Näidata, et tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ evoluudiks on samuti tsükloid, mis esialgsest erineb vaid asendi poolest tasandil.

V A S T U S E D.

I. peatükk.

§ 2.

1. $\sum_{k=1}^{10} a_k$. 2. $\sum_{k=0}^{m} b_k$. 3. $\sum_{k=1}^{6} k$. 4. $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k$.

5. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1}k^2$. 6. $\sum_{i=0}^{k} q^i$. 7. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. 8. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

9. $20+\sum_{k=0}^{4} 2^k$. 10. $1^1+2^{-1}+3^1+4^{-1}+\ldots+7^1=\sum_{k=1}^{7} k^{(-1)^{k+1}}$.

11. $\sum_{k=1}^{5} \frac{2^{k-1}}{x^k+k^2}$. 12. $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$. 13. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$.

14. $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6$. 15. $3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}$. 16. $2+3+4+5+6$.

17. $a_1+a_2+\ldots+a_9$. 18. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2}$.

19. $\log 2-\log 3+\ldots+(-1)^n \log n$. 20. -5. 21. $\frac{(a+b)^1}{b+2}+$

$+\frac{(a+b+1)^{l+1}}{b+2}+\frac{(a+b+1)^{l+1}}{b+2}+\ldots+\frac{(a+m)^m}{m+1}$. 22. $1+1+1+1+1+1$.

24. $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{i-1}{i^2}$. 25. n. 26. 0. 27. $4+5+3(1-1+1)=12$. 28. $1+(1+2^2)+$

$+(1+2^2+3^2)=20$. 29. $12+8t$. 30. $\sum_{t=0}^{n+1} 2^t-\sum_{j=0}^{n} 2^j=2^{n+1}$.

§3.

33. $|x-2|\sqrt{y}=\begin{cases}(x-2)\sqrt{y}, & \text{kui } x\geqslant 2,\\ (2-x)\sqrt{y}, & \text{kui } x\leqslant 2.\end{cases}$

34. $\frac{a-b}{|a-b|}\sqrt{a+b} = \begin{cases} \sqrt{a+b}, \text{ kui } a-b>0, \\ -\sqrt{a+b}, \text{kui } a-b<0. \end{cases}$ $(a \neq b)$.

35. $(b^2+1)\sqrt{a^2+1}$. 36. $(x^2-x+1)\sqrt{x-1}$, sest $x-x^2-1<0$.

37. $5|xy|\sqrt{2xy} = 5xy\sqrt{2xy}$, sest $xy \geq 0$. 38. $x+|x-1| = \begin{cases} 2x-1, \text{kui } x \geq 1; \\ 1, \text{kui } x \leq 1. \end{cases}$

39. $\sqrt{x^2-4x+4} = |x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ kui } x \geq 2. \\ 2-x, \text{ kui } x \leq 2. \end{cases}$ 40. $(10a-3x)\sqrt{ax}$, kui $a>0$ $x>0$; $(8a-5x)\sqrt{ax}$, kui $a<0$, $x<0$. 41. $\sqrt{2x^2}$, kui $x \geq 0$; $-\sqrt{2x^2}$, kui $x \leq 0$. 42 $-\sqrt{(1-m)^2(m-2)}$, sest juure all peab olema $m-2 \geq 0$, mille tõttu $1-m<0$. 43. $\sqrt{x^2-9}$, kui $x \leq -3$; $-\sqrt{x^2-9}$, kui $x \geq 3$. (juured pole määratud, kui $-3<x<3$).

44. $\sqrt{(x+1)^3}$, kui $x \leq -1$, või $x>1$; $-\sqrt{(x+1)^3}$, ~~kui $-1<x<1$.~~

45. $\sqrt{5(x^2+x+1)^2}$. 46. $\sqrt{x^2(x-1)}$. 47. $\sqrt{x^6(y-2)}$, kui $x \geq 0$; $-\sqrt{x^6(y-2)}$, kui $x \leq 0$. 48. $\sqrt{(x^2-2)x}$. 49. $\sqrt{(y^2-1)^2(y-10)}$.

50. $\sqrt{z^2(1-z^2)}$, kui $0 \leq z \leq 1$; $-\sqrt{z^2(1-z^2)}$, kui $-1 \leq z \leq 0$.

§ 4.

57. $S_n = n^2$. 58. $S_n = n(n+1)$. 59. $S_n = \frac{n}{2n+1}$. 60. $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$. 66. Võrratuse a) implikatsiooni osa kontrollimiseks liita antud võrratusele võrratus $2^n > 2$; võrratuse b) tõestamisel kasutada võrratust a).

§ 5.

69. $x\in(0,\infty)$. 70. $x\in[0,\frac{2}{3}]$. 71. $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$.

72. $x\in(-\infty,-\frac{2}{3})$. 73. $x\in(-1{,}01;-0{,}99)$. 74. $x\in(-\infty,0)$.

75. $x\in\{[-4,0],[4,\infty)\}$. 76. $x\in[0,2]$. 77. $x\in\{(-\infty,1),(1,2)$.

78. $x\in\{[\frac{3}{4},1),(1,\infty)\}$. 79. $x\in\{(-\infty,-2),(\frac{2}{3},2),(2,\infty)\}$.

80. $x\in\{(-\infty,1),(3,\infty)\}$. 81. $x\in(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$. 82. $x\in(-\infty,\frac{7}{10}]$.

83. $x\in\{[-\frac{24}{7},-\frac{7}{4}),(-\frac{7}{4},-\frac{18}{17}]\}$. 84. $x\in\{[\frac{1}{13},\frac{2}{5}),(\frac{2}{5},\frac{11}{17}]\}$.

§ 6.

85. $x\in\{(-\infty,1],[2,\infty)\}$. 86. $x\in(-\infty,\infty)$. 87. $x\in(-3,3)$.

88. $x\in\{(-\infty,-5],[-1,\infty)\}$. 89. $x\in\{(-\infty,-4),(1,2),(3,\infty)\}$.

90. $x\in\{(-\infty,0),(1,\infty)\}$. 91. $x\in(-\infty,\infty)$. 92. $x\in(-\infty,\infty)$.

93. $x\in\{(-6,-1),(0,3)\}$. 94. $x\in\{(-\infty,5),(-2,-1),(4,\infty)\}$.

95. $x\in\{(-\infty,-2],[1,2]\}$. 96. $x\in\{[-1,1],2\}$. 97. $x\in(-\infty,-2)$.

98. $x\in\{(-3,-0{,}5),(4,\infty)\}$. 99. $x\in\{(-\infty,-1),(0,1),(3,\infty)\}$.

100. $x\in\{(-3,-0{,}5),(0,1),(2,\infty)\}$. 101. $x\in\{[-2;-0{,}5],[3,\infty)\}$.

102. $x\in\{(-5,2),(3,5)\}$. 103. $x\in\{(-\infty,-6),(-6,1),(2,9)\}$.

104. $x\in\{(-\infty,-8),(-8,-5],[1,\infty)\}$. 105. $x\in\{(-\infty,-2),(1,2)\}$.

106. $x\in\{(3,4),(4,5),(5,9)\}$.

§ 7.

107. $\frac{2}{17}$; $-0{,}5$. 108. 1;puudub. 109. puudub; 8. 110. puudub; puudub. 111. 3; puudub; 3; 1. 112. puudub; 0;3;0. 113. puudub; puudub; 4;0. 114. puudub; -1; ∞ ; -1. 115. puudub; puudub; ∞ ; $-\infty$. 116. 1; 0; 1; 0. 117. 1;0. 118. 1, 5; -1. 119. 5; $-3{,}5$. 120. 2; 0. 121. ∞; $-\infty$. 122. -1; $-\infty$. 123. ∞; 0. 124. 1,25; -5. 125. Võrduse a) tõestus. Olgu $\inf\{-x\} = a$. Siis teoreemi II põhjal on $-x \geqslant a$, kust $x \leqslant -a$; ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline x, et $a+\varepsilon > -x \geqslant a$, kust $-a-\varepsilon < x \leqslant -a$. Teoreemi I järgi on siis $\sup\{x\} = -a$, mida oligi tarvis tõestada. 126. Võrduse a) tõestus. Olgu $\inf\{x\} = a$ ja $\inf\{y\} = b$ ja $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Siis $x \geqslant a$, $y \geqslant b$, kust $x+y \geqslant a+b$. Samuti leiduvad sellised x ja y, et $a+\frac{\varepsilon}{2} > x \geqslant a$, $b+\frac{\varepsilon}{2} > y \geqslant b$, kust $a+b+\varepsilon > x+y \geqslant a+b$. Teoreemi II järgi on siis $\inf\{x+y\} = a+b$, mida oligi tarvis tõestada.

II peatükk.

§ 1.

~~123~~ 128. $(-\infty, \infty)$. 129. $\{(-\infty,-2),(-2,2),(2,\infty)\}$. 130. $\{(-\infty, -\sqrt{3}], [\sqrt{3}, \infty)\}$. 131. $(-2,0]$. 132. $\{(-\infty,-3], [-1,0], [1,\pi]\}$ 133. $\{(-1,1),(2,\infty)\}$. 134. $[-\frac{1}{3},1]$. 135. $[1,100]$. 136. $\{[-2,0),(0,1)\}$. 137. Valem ei määra funktsiooni. 138. $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ $(n=1,2,\ldots)$. 139. $(10^{(2k-\frac{1}{2})\pi}, 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi})$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. 140. $\left[-1\frac{2}{3},5\right]$. 141. $(-\infty,\infty)$.

142. $\{(0,1),(1,\infty)\}$. 143. $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k=0\pm1,\pm2,\ldots$.

144. $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\right\}$. 145. Valem ei määra funktsiooni. 146. $\left[\tan\frac{3}{2},\infty\right)$. 147. $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k=1,2,3,\ldots$.

148. $[1,4)$. 149. Valem ei määra funktsiooni. 150. Valem ei määra funktsiooni. 151. Samad. 152. Erinevad. 153. Erinevad. 154. Samad. 155. Samad. 156. Erinevad. 157. Erinevad.

158. Erinevad. 159. $f(0)=0$; $f(0,1)=0,3081$; $f(-1)=1$; $f(2)=10$; $f(\rho^2)=\rho^2(\rho^6-2\rho^4+\rho^2+3)$. 160. $-0,5$; $\pm\sqrt{2}$. 161. $f[f(x)]=\log(\log x)$; $f[g(x)]=\log x^2$; $g[g(x)]=x^4$; $g[f(x)]=\log^2 x$. 162. a) $\varphi(-x)=1-x^2$; $\varphi(x+1)=-x^2-2x$; $\varphi(x)+1=2-x^2$; $\varphi(\frac{1}{x})=1-\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{1-x^2}$; $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-(2x+h)$. b) $\varphi(-x)=\frac{1+x}{1-x}$; $\varphi(x+1)=-\frac{x}{x+2}$; $\varphi(x)+1=\frac{2}{1+x}$; $\varphi(\frac{1}{x})=\frac{x-1}{x+1}$; $\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1+x}{1-x}$; $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-\frac{2}{(1+x)(1+x+h)}$. 163. $f(-3)=2$; $f(0)=1$; $f(\frac{1}{10})=\pi$; $f(1)=\frac{\pi}{2}$; $f(10)=0$. 164. $F(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $F(-\frac{\pi}{2})=-1$; $F(-\frac{\pi}{4})=1$; $F(\frac{\pi}{4})=1$; $F(0)+\pi=\pi$; $F(\frac{\pi}{2})=1$; $F(\pi)-\pi=2-\pi$. 167. $f(x)=x^2-5x+6$. 168. $f(x)=3x-x^2$. 169. $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. 170. $f(x)=1+2x^2$. 171. $f(x)=\sin 2x-x$. 172. $f(x)=x^2-2$, sest $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$. 173. $f(x)=0$, kui $x=-1$; $x=4$; $f(x)>0$, kui $x\in\{(-\infty,-1);(4,\infty)\}$; $f(x)<0$,

kui $x \in (-1,4)$. 174. $f(x) \neq 0$; $f(x) > 0$, kui $x \in \{(0,1), (2, \infty)\}$; $f(x) < 0$, kui $x \in \{(-\infty,0);(1,2)\}$. 175. $f(x) > 0$, kui $x \in (-\infty, \infty)$. 176. $f(x)=0$, kui $x=0$; või $x=\frac{2}{3}$; $f(x) > 0$, kui $x \in \{(-\infty,0), (\frac{2}{3},1),(1,\infty)\}$; $f(x) < 0$, kui $x \in (0,\frac{2}{3})$.
177. $f(x) > 0$, kui $x \in (-\infty, \infty)$. 178. $f(x)=0$, kui $x=-1$; $f(x) < 0$, kui $x \in (-\frac{3}{2},-1)$. 179. $f(x)=0$, kui $x=0$; $f(x) > 0$, kui $x \in (-\infty,-3)$; $f(x) < 0$, kui $x \in (-3,2)$. 180. $\varphi(x)=0$, kui $x=0$ ja $x=2$; $\psi(x)=0$, kui $x=-1$ ja $x=3$.

§ 2.

181. Paaritu. 182. Paaris. 183. Paaris. 184. Paaritu. 185. Paaritu. 186. Paaris. 187. Paaritu. 188. Ei paaris ega paaritu. 189. Paaris. 190. Paaritu. 191. Ei paaris ega paaritu. 192. Ei paaris ega paaritu. 193. $f(x)= \begin{cases} x-1, & \text{kui } x \in [0, \infty); \\ -x-1, & \text{kui } x \in (-\infty,0). \end{cases}$ 194. $f(x)= \begin{cases} -\sqrt{x}, & \text{kui } x \in [0,9), \\ \sqrt{-x}, & \text{kui } x \in (-9,0). \end{cases}$

195. Paaritu. 196. Paaris. 198. $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$. 199. $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$. 200. $\omega = \frac{\pi}{\lambda}$. 201. $\omega = \frac{\pi}{\lambda}$. 202. $\omega = \frac{\pi}{\lambda}$. 203. $\omega = \frac{\pi}{\lambda}$. 204. $\omega = \frac{\pi}{\lambda}$. 205. $\omega = \pi$. 206. $\omega = 12\pi$. 207. $\omega = 4\pi$. 208. $\omega = \pi$. 209. $\omega = \pi$. 210. Ei ole perioodiline. 211. Ei ole perioodiline. 212. Ei ole perioodiline. 213. $\omega = 2\pi$. 214. Ei ole perioodiline. 217. $y=(x-2k)^2$, $x \in [2k-1,2k+1]$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

218. $y = \begin{cases} -x+4k, \text{ kui } x \in [4k, 1+4k), \\ -(x-2-4k)^2, \text{ kui } x \in [1+4k, 3+4k], \\ x-4-hk, \text{ kui } x \in [3+4k, 4+4k] \end{cases}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2)$.

221. y kahaneb piirkonnas $(-1, \infty)$. 222. y kasvab piirkonnas $(-1, \infty)$. 223. y kahaneb piirkonnas $(-1, \infty)$.

224. f(x) kasvab monotoonselt piirkonnas $(-\infty, \infty)$.

225. a) $x = \frac{1}{2}y$; b) $x=\frac{y}{2}$, $Y=(-\infty, -4]$. 226. a) $x=\frac{1}{y}$; b) $x=\frac{1}{y}$, $Y=(0, \infty)$. 227. a) $x=-\sqrt{y}$, $Y=(0, \infty)$; b) $x=\sqrt{y}$, $Y=[0, \infty)$; c) $x=\pm\sqrt{y}$, $Y=[0, \infty)$. 228. a) $x=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{y+5})$, $Y=[-5, \infty)$; b) $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{y+5})$, $Y=[-5, \infty)$. 229. $x = \log y - 1$, $Y=(0, \infty)$.

230. $x=\log_3\frac{y}{1-y}$, $Y=(0,1)$. 231. a) $x=10^{y-1}-2$, $Y=(-\infty, \infty)$; b) $x=-(10^{y-1}-2)$, $Y=(-\infty, \infty)$. 232. a) $x=-\sqrt{1-y^2}$, $Y=[0,1]$; b) $x=\sqrt{1-y^2}$, $Y=[0,1]$. 233. a) $x=\frac{1}{3}\sin 2y$, $Y=\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; b) $x=-\frac{1}{3}\sin 2y$, $Y=\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$. 234. a) $x=\pm 2\sqrt{\cos y}$, $Y=\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; b) $x=-2\sqrt{\cos y}$, $Y=\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 235. a) $x=1+\cos y$, $Y=[-\pi, 0]$; b) $x=1+\cos y$, $Y=\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$. 236. $x=\frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{4}-y)-3$, $Y=\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

237. $x=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}\tan\frac{y}{6}$, $Y=(6\pi, 9\pi)$.

238. $y= \begin{cases} x, & \text{kui } x \in (-\infty, 1), \\ \sqrt{x}, & \text{kui } x \in [1, 16], \\ \log_2 x, & \text{kui } x \in [16, \infty). \end{cases}$

239. $y = \begin{cases} \arccos(x+1), & \text{kui } x \in [-2, -1), \\ \arcsin(-x), & \text{kui } x \in [-1, 1), \\ -\arccos(1-x), & \text{kui } x \in [1, 2). \end{cases}$

<u>245</u>. vt.ülesanne 243. <u>271</u>. $f(x)=\begin{cases}-x-3, & \text{kui } x\in[-5,-2),\\ -1+\sqrt{4-x^2}, & \text{kui } x\in[-2,2),\\ 2x-5, & \text{kui } x\in[2,4].\end{cases}$

$X=[-5,4]$, $Y=[-1,3]$.

<u>272</u>. $f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{kui } x\in(-\infty,-1],\\ -x, & \text{kui } x\in(-1,0],\\ x, & \text{kui } x\in(0,2),\\ \frac{3}{2}, & \text{kui } x\in[2,3],\\ 1, & \text{kui } x\in[3,\infty).\end{cases}$

<u>273</u>. $V=\pi x(R^2-\frac{x^2}{4})$, $X=(0,2R)$.

<u>274</u>. $S=\begin{cases}\pi(2R-x)^2, & \text{kui } x\in[0,R],\\ \pi R^2, & \text{kui } x\in[R,3R],\\ \pi(6Rx-x^2-8R^2), & \text{kui } x\in[3R,4R].\end{cases}$

<u>275</u>. $x\approx 0{,}68$. <u>276</u>. $x_1\approx 1{,}37$; $x_2=10$. <u>277</u>. $x\approx 0{,}86$.

<u>278</u>. $x_1=-3$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-3$; $x_3=2$, $y_3=3$; $x_4=3$, $y_4=2$.

<u>279</u>. $x_1\approx -3{,}6$, $y_1\approx -3{,}1$; $x_2\approx -2{,}7$, $y_2\approx 2{,}9$; $x_3\approx 2{,}9$, $y_3\approx 1{,}8$; $x_4\approx 3{,}4$, $y_4\approx -1{,}6$. <u>280</u>. $x_1=\frac{\pi}{4}$, $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=-\frac{5}{4}$ $y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

III peatükk.

§ 1.

<u>281</u>. $N=\frac{1}{5\varepsilon}$. <u>282</u>. $N=(\frac{3-4\varepsilon}{\varepsilon})^2$. <u>283</u>. $N=\frac{[4+3(\varepsilon+\sqrt{10})]^2}{2\varepsilon^2}$.

284. $N=\sqrt{1+M}$. 285. $N=\frac{1}{4}(1+\sqrt{1+8M})$. 286. $N=\ln M$. 287. $N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

290. 2,5. 291. 1. 292. $-\frac{2}{3}$. 293. 0. 294. $\frac{1}{9}$. 295. $\frac{1}{18}$.

296. $\frac{3}{4}$. 297. $\lim x_n = \begin{cases} 0, & \text{kui } |a|<1, \\ \frac{1}{2}, & \text{kui } a=1, \\ 1, & \text{kui } |a|>1, \\ \text{ei eksisteeri}, & \text{kui } a=-1. \end{cases}$

298. $1-e^2$. 299. $\frac{1}{e}$. 300. 0. 303. Kasutada võrdust $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. 304. Kasutada võrratust $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k+1)}$. 305. Vaadelda avaldist $(x_{2n}-x_n)$. 308. $\lim x_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$. 309. 1. 310. 0 ja 1. 311. 0 ja 2. 312. 0 ja 1. 313. $-\infty$ ja ∞. 314. $-\infty$ ja ∞. 315. $-\infty$. 316. $-\frac{1}{2}$ ja 1. 317. ∞. 318. 0 ja 1. 319 0 ja log 4. 320. a ja b. Jada koondub juhul a=b. 321. $\min(a,b,-\frac{1}{2})$ ja $\max(a,b,-\frac{1}{2})$, kui $|a|<1$; $\min(a,b,-\frac{1}{2})$ ja ∞, kui $a>1$; $-\infty$ ja ∞, kui $a<-1$; $\min(\frac{1}{2},b)$ ja $\max(1,b)$, kui $a=1$; $\min(-\frac{3}{2},b)$ ja $\max(\frac{1}{2},b)$ kui $a=-1$. 322. -1 ja 1. 323. $\delta=\varepsilon$. 324. $\delta=\varepsilon$. 325 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. 326. $\delta=\sqrt{7\varepsilon}$. 327. $\delta=\varepsilon$. 328. $\delta=\sqrt{7\varepsilon}$. 329. $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. 330. $\delta=-3+\sqrt{9+\varepsilon}$ või $\delta=\min(1;\frac{\varepsilon}{7})$. 331. $\delta=-2+\sqrt{4+\frac{5}{2}\varepsilon}$ või $\delta=\min(1;\frac{\varepsilon}{2})$. 332. $\delta=\frac{7}{6}(-1+\sqrt{1+6\varepsilon})$ või $\delta=\min(1;\frac{49}{20}\varepsilon)$. 333 $\delta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+8\varepsilon})$. 334. $\delta=\frac{16}{1+4\varepsilon}$ või

$\delta=\min(1;12\varepsilon)$. 335. $\delta=\frac{36\varepsilon}{1+6\varepsilon}$ või $\delta=\min(1;30\varepsilon)$.

336. $\delta=\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}$ või $\delta=\min(1;\frac{2}{5}\varepsilon)$. 339. $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$.

340. $\delta=\frac{1}{2M}(-1+\sqrt{1+4M})$. 341. $\delta=\frac{3}{1+M}$. 342. $\delta=\frac{1}{2+M}$. 356. Valida jadad $x_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ ja $x_n'=\frac{2}{(4n-1)\pi}$.

§ 3.

357. -77. 358. 23. 359. 0. 360. 2. 361. log 2.

362. $\frac{1}{2}$. 363. $\frac{\pi}{2}$. 364. 0. 365. 0,5. 366. 1. 367. 1,5.

368. -4. 369. $\frac{1}{3}$. 370. 0. 371. 1. 372. $\frac{1}{2}$. 373. $\frac{9}{16}$.

374. $-\frac{1}{4}$. 375. $\frac{1}{4}$. 376. $\frac{3}{4}$. 377. 3. 378. $\frac{1}{9}$. 379. -3.

380. $-\frac{1}{3}$. 381. 0. 382. $-\frac{1}{56}$. 383. 0. 384. 1. 385. $-\frac{1}{3}$.

386. $\frac{3}{4}$. 387. -2. 388. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 389. $-\frac{1}{3}$. 390. $\frac{1}{3}$. 391. 1.

392. $\frac{1}{n}$. 393. 4. 394. $\frac{6}{7}$. 395. $\frac{2}{3}$. 396. 1. 397. π. 398. $\frac{2}{5}$.

399. $-\frac{3}{2}$. 400. 0. 401. 1. 402. $\frac{\pi}{2}$. 403. 2. 404. $\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

405. $\frac{2}{3}$. 406. -4. 407. $\sqrt{2}$. 408. $\frac{2}{\pi}$. 409. $-\frac{3}{\pi}$. 410. 0.

411. 0. 412. 1. 413. $\frac{3}{5}$. 414. $\frac{2}{3}$. 415. $\frac{1}{2}$. 416. e^2.

417. e. 418. e^{-3}. 419. $\sqrt{e}$. Teha muutuja vahetus $u=\sqrt{x}$ ja astmenäitajas kasutada valemit (7). 420. $e^{-\frac{1}{2}}$. Kasu-

tada võrdust $\cos x = 1-(1-\cos x)$ ja teha muutuja vahetus $x=2u$. 421. $e^{-\frac{1}{2}}$. 422. $e^{\frac{5}{2}}$. 423. 1.

§ 4.

425. $\delta = \varepsilon^2$. 426. $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon^2}$. 427. $\delta = \min(1, \tan\varepsilon)$.

428. $\delta = 1-\cos\varepsilon$. 429. $\delta = 1-\cos\varepsilon$. 430. $\delta = 1-\cos\varepsilon$.

431. $N=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-4}$, kui $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$. 432. $N=\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}-3}$, kui $0<\varepsilon\leqslant\frac{4}{3}$.

433. $N=\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. 434. $N=\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}$, kui $0<\varepsilon\leqslant\frac{5}{2}$. 435. $N=2+\sqrt{4+M}$.

436. $N=\frac{1}{2}(M+\sqrt{M^2-4M-12})$, kui $M>6$; $N=1$, kui $0<M<6$.

437. $N=\frac{1}{2}(M+\sqrt{M^2+4M-3})$, kui $M\geqslant -2+\sqrt{7}$; $N=1$, kui $0<M<-2+\sqrt{7}$.

438. $N=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+12M})$. 439. $N=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+12M})$. 440. $f(1-)=2$, $f(1+)=5$, $f(2)=8$. 441. $g(0)=0$, $g(2-)=4$, $g(2+)=5$. 442. $h(0-)=1$, $h(0+)=0$, $h(1-)=1$, $h(1+)=3$. 443. $\{a\}=a-[a]$; $\varphi(-1-)=-2$, $\varphi(-1+)=-1$, $\varphi(1-)=1$, $\psi(1+)=0$. 444. $\psi(-1-)=1$, $\psi(-1+)=0$, $\psi(1-)=0$, $\psi(1+)=1$. 445. 1. 446. -1. 447. 1. 448. -1.

449. ∞. 450. $-\infty$. 451. -6. 452. 6. 453. 0. 454. 1.

455. 0. 456. ∞. 457. $\frac{b}{a}$. 458. $\frac{b}{a}$. 459. 0, kui $a>0$ või $b=0$; $-\infty$, kui $a<0$, $b>0$; ∞, kui $a<0$, $b<0$. 460. 0, kui $a<0$ või $b=0$; ∞, kui $a>0$, $b>0$; $-\infty$, kui $a>0$, $b<0$.

461. 1. 462. ∞. 463. $-\infty$. 464. 0. 465. 27. 466. ∞. 467. 6.

468. 1. 469. 0. 470. 0,25. 471. $-0{,}5$. 472. 1. 473. 0.

474. 0. 475. 45. 476. $\frac{1}{3}$ ~~0,2~~. 477. 0 ja ∞. 478. 0,5 ja $-\infty$. 479. 2,5 ja $-2{,}5$. 480. 0. 481. 0. 482. 0.

483. $m=1$, $n=-1$. 484. $m=1$; $n=-0{,}5$. 485. $m=-1$; $n=0{,}5$.

486. $m=-1$, $n=0$. 487. Viia avaldis mx summa märgi alla ja kasutada omadust 1) paragrahvist 3; $m=r\sqrt{a_k}$, $n=\sum_{k=1}^{r}\frac{b_k}{2\sqrt{a_k}}$.

488. $\frac{1}{e}$. 489. $\frac{1}{e}$. 490. e^6 491. e^2 492. e. 493. e.

§ 5.

494. $\beta_n = o(\alpha_n)$. 495. Sama järku. 496. Sama järku.

497. $\alpha = o(\beta)$. 498. Sama järku. 499. $\alpha = o(\beta)$. 507. $\alpha_n \sim \frac{\pi}{6}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $k=\frac{1}{2}$. 508. $\alpha_n \sim \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{1,25}$, $k=\frac{5}{4}$. 509. $\alpha(x) \sim 2x$, $x \to 0$, $k=1$.

510. $\alpha(x) \sim x$, $k=1$. 511. $\alpha(x) \sim -\frac{x^3}{2}$, $k=3$. 512. $\alpha^5(x) = -(\sqrt[3]{1-x}-1) \sim -\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$, $k=\frac{1}{5}$. 513. $\alpha(x) \sim \sqrt{x}$, sest $\sqrt{1+2x} = 1+x+o(x)$; $k=\frac{1}{2}$. 514. $\alpha(x) \sim \frac{\pi}{4}x$, $k=1$. 515. $\alpha(x) \sim -\frac{1}{3}x^2$, $k=2$.

516. $\alpha(x) \sim \frac{x}{2}$, $k=1$. 517. $\alpha(x) \sim x\sqrt{3}$, $k=1$. 518. $\alpha(x) \sim \frac{\pi}{4}\sqrt{3(1-x)}$, kui $x \to 1-$; $k=\frac{1}{2}$. 519. $\alpha(x) \sim \frac{\pi}{3}(x-1)$, $x \to 1$, $k=1$.

520. $\alpha(x) \sim \frac{6}{5}\sqrt{3(2x-3)}$, $x \to \frac{3}{2}+$, $k=\frac{1}{2}$. 521. $\alpha(x) \sim -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{1,5}$, $x\to\infty$, $k=\frac{3}{2}$. 522. $\alpha(x) \sim \pi\left(\frac{1}{x}\right)^3$, $|x|\to\infty$, $k=3$. 523. 5. 524. $\frac{3}{7}$.

525. 1. 526. 15. 527. -1. 528. $\frac{1}{2}$. 529. $-\frac{1}{4}$. 530. $\frac{a}{b}$ ($b\neq 0$, sest $\tan 0=0$). 531. $\frac{1}{20}$. 532. $\frac{1}{6}$. 533. 5. 534. 0.

535. -1. 536. $-\infty$. 537. 0. 538. $\frac{1}{3}$. 539. -1. 540. -1. 541. -3. 542. $\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$. 543. $\cos^3 a$. 544. 1. 545. 1. 546. 2. 547. $-\frac{1}{2}$. 548. 0; võib kasutada võrdust $\lim\limits_{x\to a} \cos f(x) = \cos \lim\limits_{x\to a} f(x)$. 549. 1. 550. $-\frac{3}{2}$. 551. $\frac{1}{e}$. 552. $\frac{a^2}{b^2}$; kasutada teisendust $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$. 553. -2. 554. -1.

§ 6.

563. $a=-1$. 564. $a=-1$, $b=1$. 565. Vasakpoolne. 566. Vasakpoolne. 567. Parempoolne. 568. Parempoolne. 569. Parempoolne. 570. $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$. 571. $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$. 572. $\delta = \frac{2\varepsilon}{31}$. 573. $\delta = \varepsilon$. 574. $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$. 575. $\delta = \frac{5\varepsilon}{2009}$. 576. Lahutades ja liites avaldise $x'\sin\frac{1}{x}$, saame $f(x)-f(x')=(x-x')\sin\frac{1}{x}+x'\left(\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x'}\right)$; $\delta = \frac{\varepsilon}{1+25^3}$. 577. $f(1)=1$. 578. $f(-1)=3$. 579. $f(7)=-\frac{1}{56}$.

580. Ei saa. 581. $f(0)=0$. 582. $f(1)=0$. 583. Teist liiki katkevus punktis $x=0$. 584. Hüpe punktis $x=0$. 585. Teist liiki katkevus punktis $x=0$. 586. Kõrvaldatav katkevus punktis $x=0$.

587. Teist liiki katkevus punktis $x=0$. 588. Kõrvaldatav katkevus punktis $x=0$; teist liiki katkevus punktides $x=\pm 1$.

589. Teist liiki katkevus punktis $x=3$. 590. Hüpe punktis $x = 0$. 591. Teist liiki katkevus punktis $x = 1$. 592. Hüpe punktis $x = 1$. 593. Hüpe punktis $x = 0$. 594. Kõrvaldatav katkevus punktides $x = k\pi$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

IV peatükk.

§ 1.

595. $\Delta x=999$; $\Delta y=3$. 596. a) $\Delta y=a\Delta x$; b) $\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

598. $2x$. 599. $3x^2$. 600. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x\neq 0)$. 601. $-\frac{2}{3}$.

602. $-\sin x$. 603. $\frac{1}{\cos^2 x}$. 604. $-\frac{1}{\sin^2 x}$. 605. $-\frac{1}{x}$. 606. 0.

607. $\frac{1}{2}$. 608. 1. 609. 75,88; 60,85; 49,03; 48,05.

610. $5x^4-6x^2+\frac{1}{4}$. 611. $2at+b$. 612. $-\frac{15x^2}{a+1}$. 613. $-\frac{3}{x^2}+18x$.

614. $\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{3}{5x\sqrt{x^3}}$. 615. $2x^{-\frac{1}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}-3x^{-4}$. 616. $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$.

617. $\frac{12}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. 618. $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$. 619. $\frac{b^2-ac}{(b+cz)^2}$.

620. $-\frac{2+x^3}{x^3}$. 621. $2e^x(x+1)$. 622. $x^3e^x(5+x)$.

623. $\frac{e^x(x-2)}{x^3}$. 624. $2e^{2x}+e^{x+2}-e^{-x}$. Kasutada võrdust $e^{2x}+3^{x+2}+e^{-x}=e^x(e^x+e^2)+\frac{1}{x}$. 625. $5^x\left[x^2\ln5-2(\ln5-1)x+2(\ln5-1)\right]$.

626. $1+\ln x$. 627. $\frac{2x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2x}-\frac{1}{x}$. 628. $e^x(1+x)+\frac{2\ln10}{x}+\frac{\ln x-1}{x^2}$. 629. $2x\log_3x+\frac{x}{\ln3}$. 630. $\frac{1}{\log_2x}-\frac{x-1}{\log_2^2x\ln2}$.

631. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$. 632. $\frac{1}{x}$. 633. $\frac{1-x\ln4}{4^x}+8^x\ln8$. 634. $3x^2-3^x\ln3$. 635. $e^{3x}(3\ln3+3\ln|x|+\frac{1}{x})$. 636. $(\frac{a}{b})^x\ln\frac{a}{b}-\frac{ab^a}{x^{a+1}}$.

637. $\frac{2\log x}{x}-\frac{1}{x}$. 638. $2\cos x-3\sin x$. 639. $\frac{4}{\sin^22x}$.

640. $t^2\sin t$. 641. 0. 642. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{1+x^2}$.

643. $(u\cos u-\sin u)(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{\sin^2u})$. 644. $\frac{1}{1+\cos t}$.

645. $\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$. 646. $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

647. $\frac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

648. $\cot x-\frac{x}{\sin^2x}-\frac{2}{(x-1)^2}$. 649. $x\,\mathrm{ch}\,x$. 650. $\frac{3x^2\mathrm{ch}\,x-x^3\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2x}$.

651. $\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}+\frac{3}{\mathrm{sh}^2x\ln x}-\frac{3\,\mathrm{cth}\,x}{x\ln^2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}$. 652. $2\cos2t+8t+1$.