TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA TEADUSKOND
PUHTA MATEMAATIKA INSTITUUT
FUNKTSIONAALANALÜÜSI ÕPPETOOL

Rainis Haller

# $M(r,s)$-VÕRRATUS

Bakalaureusetöö

Juhendaja: Eve Oja,
prof., füüs.-mat. kand.

21.05.1996

Tartu 1996

# Sissejuhatus

Alates 80-ndate aastate algusest on paljud autorid uurinud niisuguseid Banachi ruume, mis kujutavad endast $M$-ideaali oma teises kaasruumis. Käesolevas bakalaureusetöös vaatleme ühte $M$-ideaalide hiljutist üldistust – $M(r,s)$-võrratust rahuldavaid Banachi ruume. Selle mõiste tõid sisse ja uurisid teda J. C. Cabello ja E. Nieto 1995. aastal. Bakalaureusetöö põhitulemusena tõestame me teoreemi, mis annab neli tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et Banachi ruum rahuldaks $M(r,s)$-võrratust. See teoreem üldistab analoogilist $M$-ideaalide kohta käivat tulemust artiklist [LORW].

Töö koosneb neljast paragrahvist.

Esimeses paragrahvis on näidatud, et Banachi ruumi kolmandat kaasruumi võib esitada tema kaasruumi ja annulaatori otsesummana.

Teises paragrahvis defineeritakse mõiste "$M$-ideaal" üldistusena töö põhimõiste "$M(r,s)$-võrratust rahuldav Banachi ruum" ning kirjeldatakse põgusalt nende parameetrite $r$ ja $s$ hulka, mille korral antud Banachi ruum rahuldab $M(r,s)$-võrratust.

Kolmandas paragrahvis sõnastatakse ja tõestatakse üksikasjades töö põhitulemus teoreem 3.1.

Neljandas paragrahvis antakse kaks järeldust põhiteoreemist.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi. Olgu $X$ Banachi ruum, $Y$ ruumi $X$ alamruum, $Z$ ruumi $X$ alamhulk ja $A$ ruumis $X$ tegutsev operaator; siis

$$B(x,r) = \{z \in X : \|z - x\| < r\}, \quad x \in X, \quad r > 0;$$

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\};$$

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\};$$

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* : x^*|_Y = 0\};$$

$$\mathrm{conv} Z = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i : z_i \in Z, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad n \in \mathbb{N}\};$$

$$\mathrm{Im} A = A(X) = \{Ax : x \in X\};$$

$$\mathrm{Ker} A = \{x \in X : Ax = 0\};$$

Sümboliga $w^*$ on tähistatud $*$-nõrk topoloogia. Hulga $A$ $*$-nõrk sulund on tähistatud sümboliga $\overline{A}^{w^*}$. Sümboliga $I_X$ on tähistatud ruumi $X$ samasusteisendus.

# §1. Ruumi $X^{***}$ esitamine alamruumide $X^*$ ja $X^\perp$ otsesummana

On hästi teada, et Banachi ruumi $X$ kolmas kaasruum $X^{***}$ esitub tema kaasruumi $X^*$ ja annulaatori $X^\perp$ otsesummana (vt. näiteks [HWW, lk. 102]). Täpsemalt öeldes kehtib järgmine tulemus.

**Teoreem 1.1.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja $P = j_{X^*} \cdot (j_X)^*$ loomulik projektor tema kolmandas kaasruumis $X^{***}$. Siis $X^{***} = \mathrm{Im}P \oplus \mathrm{Ker}P$, kusjuures $\mathrm{Im}P = X^*$ ja $\mathrm{Ker}P = X^\perp$ (täpsemalt, $\mathrm{Im}P = j_{X^*}(X^*)$ ja $\mathrm{Ker}P = (j_X(X))^\perp$).*

Kuigi teoreem 1.1 on hästituntud ning matemaatilises kirjanduses paljukasutatud fakt, ei ole meil õnnestunud leida ühtegi allikat, kus ta ka tõestatud oleks. Tema formuleeringut ega tõestust ei leidu näiteks järgmistes üldtuntud funktsionaalanalüüsialastes õpikutes ja monograafiates: [HWW, OO, P, ДШ, КА, КФ, Э].

Käesolevas paragrahvis anname me teoreemi 1.1 üksikasjalise tõestuse. Seejuures on meile vajalikud järgmised mõisted ja abitulemused.

Olgu $X$ Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Definitsioon 1.2.** Ruumi $X$ teiseks kaasruumiks $X^{**}$ nimetatakse ruumi $(X^*)^* = L(X^*, \mathbb{K})$. Ruumi $X$ kolmandaks kaasruumiks $X^{***}$ nimetatakse ruumi $(X^{**})^*$.

**Definitsioon 1.3.** Ruumi $X$ loomulikuks sisestuseks oma teise kaasruumi $X^{**}$ nimetatakse kujutust $j_X : X \longrightarrow X^{**}$, mis on defineeritud võrdusega

$$j_X x = F_x \quad , \qquad x \in X,$$

kus $F_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ on defineeritud võrdusega

$$F_x(x^*) = x^*(x) \quad , \qquad x^* \in X^*.$$

Banachi ruumi alamruumi definitsioonist lähtudes saab vahetult kontrollida, et $j_X(X) = \{F_x : x \in X\}$ on ruumi $X^{**}$ kinnine alamruum.

Näitame, et ruum $X$ on loomulikul viisil samastatav ruumiga $j_X(X)$.

Paneme tähele, et $\|j_X x\| = \|x\|$ , $x \in X$ (tõepoolest,

$$\begin{aligned}\|j_X x\| = \|F_x\| &= \sup_{\|x^*\| \le 1} |F_x(x^*)| \\ &= \sup_{\|x^*\| \le 1} |x^*(x)| = \|x\| \qquad \forall x \in X).\end{aligned}$$

Kujutus $j_X$ on ka lineaarne (tõepoolest,

$$\begin{aligned} j_X(x_1+x_2)(x^*) &= F_{x_1+x_2}(x^*) = x^*(x_1+x_2) = x^*(x_1)+x^*(x_2) \\ &= F_{x_1}(x^*)+F_{x_2}(x^*) \\ &= j_Xx_1(x^*)+j_Xx_2(x^*) \qquad \forall x_1,x_2\in X, \quad \forall x^*\in X^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_X(\lambda x)(x^*) &= F_{\lambda x}(x^*) \\ &= x^*(\lambda x) = \lambda x^*(x) \\ &= \lambda F_x(x^*) = \lambda j_X x(x^*) \qquad \forall x\in X, \quad \forall \lambda\in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Järelikult $j_X$ on isomeetriline isomorfism ruumide $X$ ja $j_X(X)$ vahel. Seda silmas pidades kirjutatakse sageli, et $X = j_X(X)$ ja $X \subset X^{**}$.

**Näide 1.4.** *Olgu $X = c_0$. On teada, et $c_0^* = \ell_1$ ja $\ell_1^* = m$. Seega $c_0^{**} = m$, kusjuures viimase võrduse sisu on antud kahe eelmise võrdusega. Samastamise $c_0^{**} = m$ tõttu $j_{c_0} : c_0 \longrightarrow m$. Olgu $x \in c_0$. Saab näidata (vt. näiteks* [OO, *lk.* 173]), *et $F_x = x$, mistõttu $j_{c_0}x = x$ iga $x \in c_0$ korral.*

Olgu $P = j_{X^*} \cdot (j_X)^*$, kus $j_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}$ on ruumi $X^*$ loomulik sisestus ruumi $X^{***}$. Kujutuse $P$ paremaks mõistmiseks teeme järgmise skeemi:

$$X^{***} \xrightarrow{(j_X)^*} X^* \xrightarrow{j_{X^*}} X^{***}.$$

Alljärgnevas lemmas 1.9 selgub, et $P$ on projektor.

**Definitsioon 1.5.** Lineaarset operaatorit $P : X \longrightarrow X$ nimetatakse projektoriks, kui $P^2 = P$.

**Lause 1.6.** (*vt.* [OO, *lk.* 259]). *Kui projektor $P : X \longrightarrow X$ on pidev, siis* Im$P$ *on kinnine ja $P \neq 0$ korral $\|P\| \geq 1$.*

**Definitsioon 1.7.** Olgu $Y$ vektorruum ning $Z$ ja $W$ tema alamruumid. Kui iga element $y \in Y$ esitub ühesel viisil summana

$$y = z + w, \qquad z \in Z, \quad w \in W,$$

siis öeldakse, et ruum $Y$ on alamruumide $Z$ ja $W$ otsesumma ja kirjutatakse $Y = Z \oplus W$.

Algebra põhikursusest on teada järgmine tulemus.

**Lause 1.8.** . *Olgu $X$ vektorruum, $P : X \longrightarrow X$ projektor. Siis $X = \mathrm{Im}P \oplus \mathrm{Ker}P$.*

**Lemma 1.9.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Siis $P = j_{X^*} \cdot (j_X)^* \in L(X^{***})$, $P^2 = P$, $\|P\| = 1$, $\mathrm{Im}P = X^*$ ja $\mathrm{Ker}P = X^\perp$ (täpsemalt, $\mathrm{Im}P = j_{X^*}(X^*)$ ja $\mathrm{Ker}P = (j_X(X))^\perp$).*

*Tõestus.* Fikseerime vabalt $x^{***} \in X^{***}$. Kehtivad samaväärsused:

$$\begin{aligned}
x^* \in \mathrm{Ker}P &\Longleftrightarrow Px^{***} = 0 \\
&\Longleftrightarrow j_{X^*}((j_X)^* x^{***}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (j_{X^*}((j_X)^* x^{***}))(x^{**}) \qquad \forall x^{**} \in X^{**} \\
&\Longleftrightarrow x^{**}((j_X)^* x^{***}) = 0 \qquad \forall x^{**} \in X^{**} \\
&\Longleftrightarrow (j_X)^* x^{***} = 0 \\
&\Longleftrightarrow x^{***} j_X = 0 \\
&\Longleftrightarrow x^{***} \in (j_X(X))^\perp.
\end{aligned}$$

Seega $\mathrm{Ker}P = (j_X(X))^\perp$.

On selge, et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}P &= \mathrm{Im} j_{X^*} \cdot (j_X)^* \\
&= j_{X^*}(\mathrm{Im}((j_X)^*)) \\
&= j_{X^*}(X^*).
\end{aligned}$$

Näitame, et $P^2 = P$. Tuleb näidata, et iga $x^{***} \in X^{***}$ korral $P^2 x^{***} = Px^{***}$, s.t. $(j_{X^*} \cdot (j_X)^* \cdot j_{X^*} \cdot (j_X)^*)(x^{***})$. Piisab näidata, et

$$(j_X)^* \cdot j_{X^*} = I_{X^*},$$

s.t.

$$((j_X)^* \cdot j_{X^*})x^* = x^* \qquad \forall x^* \in X^*$$

ehk

$$(((j_X)^* \cdot j_{X^*})x^*)(x) = x^*(x) \qquad \forall x^* \in X^*, \quad \forall x \in X.$$

Kuid

$$\begin{aligned}
(((j_X)^* \cdot j_{X^*})x^*)(x) &= ((j_X)^*(j_{X^*}x^*))(x) \\
&= (j_{X^*}x^*)(j_X x) \\
&= (j_X x)(x^*) \\
&= x^*(x) \qquad \forall x^* \in X^*, \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

Järelikult $P^2 = P$. Kuna $P$ on projektor ning $P \neq 0$, siis $\|P\| \geq 1$. Teiselt poolt

$$\begin{aligned}
\|P\| &= \|j_{X^*}(j_X)^*\| \\
&\leq \|j_{X^*}\| \|(j_X)^*\| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Lemma on tõestatud. □

*Teoreemi* 1.1 *tõestuseks* tuleb rakendada lemmat 1.9 ja lauset 1.8. □

# §2. $M(r, s)$-võrratus kui $M$-ideaali üldistus

Eelmises paragrahvis nägime, et Banachi ruumi $X$ kolmas kaasruum $X^{***}$ esitub tema kaasruumi $X^*$ ja annulaatori $X^\perp$ otsesummana, nimelt leidub projektor $P$ ruumis $X^{***}$ nii, et $X^{***} = \mathrm{Im}P \oplus \mathrm{Ker}P$, kusjuures $\mathrm{Im}P = X^*$ ja $\mathrm{Ker}P = X^\perp$.

Olgu $X$ Banachi ruum ja $P$ eespool mainitud projektor. Paneme tähele, et iga $x^{***} \in X^{***}$ esitub kujul $x^{***} = Px^{***} + (I - P)x^{***}$. Tähistame edaspidi $x^* = Px^{***} \in X^*$ ja $x^\perp = (I - P)x^{***} \in X^\perp$.

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et Banachi ruum $X$ on $M$-ideaal, kui ruumi $X^{***}$ iga elemendi $x^{***} = x^* + x^\perp$ korral

$$\|x^{***}\| = \|x^*\| + \|x^\perp\|. \tag{2.1}$$

**Näide 2.2.** *Klassikaline näide $M$-ideaali kohta on ruum $c_0$.*

Mõiste "$M$-ideaal" toodi sisse 1972. aastal E. M. Alfseni ja E. G. Effrose poolt artiklis [AE].

$M$-ideaalide valdkonnaga on tegelenud väga paljud matemaatikud. Täpsemalt saab $M$-ideaalide ajaloo ja nende kohta käivate tulemuste kohta teavet 1993. aastal ilmunud monograafiast [HWW].

Vaatame nüüd uuesti võrdust (2.1). Paneme tähele, et ühtepidi võrratus kehtib automaatselt, nimelt

$$\begin{aligned} \|x^{***}\| &= \|x^* + x^\perp\| \\ &\leq \|x^*\| + \|x^\perp\|. \end{aligned}$$

Seega tähtsaks osutub teistpidi võrratus, nimelt

$$\|x^{***}\| \geq \|x^*\| + \|x^\perp\|.$$

Seda võrratust võime vaadelda kujul

$$\|x^{***}\| \geq r\|x^*\| + s\|x^\perp\|, \tag{2.2}$$

kus $r = s = 1$. Hispaania matemaatikud J. C. Cabello ja E. Nieto [CN] panid tähele, et mõned $M$-ideaalide head omadused kanduvad üle ka ruumidele, millel tingimuses (2.2) $r = 1$ ja $s \leq 1$; mõned $M$-ideaalide omadused kanduvad üle ruumidele, millel tingimuses (2.2) $r \leq 1$ ja $s = 1$; mõned omadused kanduvad aga üle, kui $r + s > 1$.

Näiteks, kui ruum $X$ rahuldab tingimust (2.2), kus $r + s > 1$, siis tema kaasruum $X^*$ on Radon-Nykodými omadusega (samaväärne sellega, et ruum $X$ on Asplundi omadusega), s.t. ruumi $X$ iga separaabli alamruumi $Y$ kaasruum $Y^*$ on samuti separaabel.

J. C. Cabello ja E. Nieto mõttekäik viis neid mõiste "$M$-ideaal" üldistuseni, mille nad nimetasid $M(r,s)$-võrratust rahuldavaks Banachi ruumiks [CN].

**Definitsioon 2.3.** Olgu $r, s \in (0,1]$. Öeldakse, et Banachi ruum $X$ rahuldab $M(r,s)$-võrratust, kui ruumi $X^{***}$ iga elemendi $x^{***}$ korral

$$\|x^{***}\| \geq r\|x^*\| + s\|x^{\perp}\|$$

alati, kui $x^{***} = x^* + x^{\perp}$, kus $x^* \in X^*$ ja $x^{\perp} \in X^{\perp}$.

$M(r,s)$-võrratust rahuldavaid Banachi ruume on veel suhteliselt vähe uuritud. Cabello ja Nieto töö [CN] ilmus 1995. aasta oktoobris. Selles uurivad nad niisuguste ruumide omadusi, mis rahuldavad $M(r,s)$-võrratust mingite etteantud parameetrite $r$ ja $s$ korral.

Teiselt poolt, kui meil on antud mingi Banachi ruum $X$, siis pole raske põgusalt kirjeldada nende parameetrite $r$ ja $s$ hulka, mille korral $X$ rahuldab $M(r,s)$-võrratust. Selleks toome sisse nn. $M(r,s)$-hulga

$$K_X = \{(r,s) \in [0,1] \times [0,1] : \|x^{***}\| \geq r\|x^*\| + s\|x^{\perp}\|\}.$$

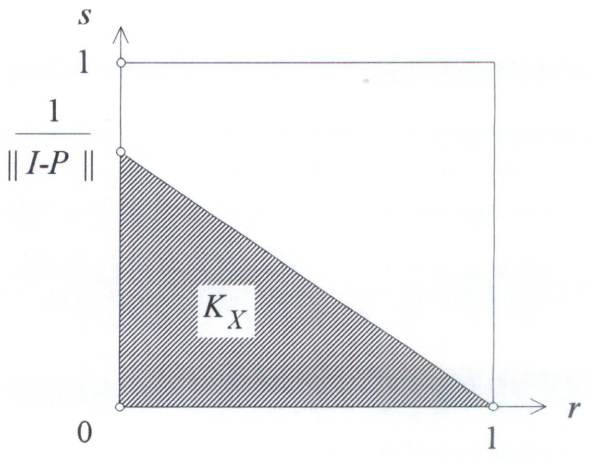
Paneme tähele, et $K_X$ on kumer hulk. (Tõepoolest, olgu $(r_1, s_1)$ ja $(r_2, s_2)$ sellised, et $\|x^{***}\| \geq r_1\|x^*\| + s_1\|x^{\perp}\|$ ja $\|x^{***}\| \geq r_2\|x^*\| + s_2\|x^{\perp}\|$. Siis $\lambda(r_1, s_1) + (1 - \lambda)(r_2, s_2) \in K_X$ iga $\lambda \in [0,1]$ korral, sest

$$(\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2)\|x^*\| + (\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)\|x^{\perp}\|$$

$$\leq \lambda\|x^{***}\| + (1-\lambda)\|x^{***}\| = \|x^{***}\|.)$$

Veel on selge, et $K_X = [0,1] \times [0,1]$ parajasti siis, kui $X$ on $M$-ideaal. Nii on see näiteks erijuhul, kui $X$ on refleksiivne ruum, sest siis $X^{\perp} = \{0\}$.

Olgu $X$ mitterefleksiivne Banachi ruum. Siis $I \neq P$, mistõttu $\|I - P\| \geq 1$ (kuna $I - P$ on projektor). Teisalt on selge, et $\|I - P\| \leq \|I\| + \|P\| = 1 + 1 = 2$. Paneme tähele, et antud juhul hulk $K_X$ sisaldab punkte $(0, \frac{1}{\|I-P\|})$ (sest $\frac{1}{\|I-P\|}\|x^{\perp}\| = \frac{1}{\|I-P\|}\|(I-P)x^{***}\| \leq \|x^{***}\|$), $(1,0)$ ja $(0,0)$. Seega on $K_X$ vähemalt nii suur nagu joonisel 1.

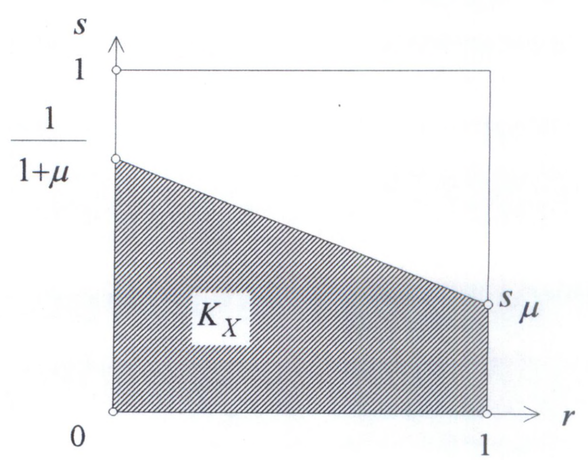



JOON. 1

Cabello ja Nieto vaatlevad oma artiklis [CN] artiklist [JW] pärinevat ruumi $c_0$ ümbernormeeringut, mida alljärgnevas kirjeldame. Olgu $\mu \in (0,1)$; normeerime ruumi $c_0$ ümber, tuues sisse normi

$$\|x\| = \sup\{\frac{|x_1|}{\mu}, |x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, \dots\},$$

kus $x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0$. Siis $X = (c_0, \|\cdot\|)$ on Banachi ruum ja $\|I - P\| = 1 + \mu$ (vt. [JW]). Artiklis [O] on näidatud, et $X$ rahuldab $M(1, s_\mu)$-võrratust, kus $s_\mu = \frac{1-\mu}{1+\mu}$. Seega tema $M(r,s)$-hulk $K_X$ on vähemalt nii suur nagu joonisel 2.




JOON. 2

# §3. Põhiteoreemi sõnastus ja tõestus

Alljärgnev teoreem on käesoleva bakalaureusetöö põhitulemus. Ta annab neli tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et Banachi ruum rahuldaks $M(r,s)$-võrratust. Teoreem 3.1 üldistab analoogilist $M$-ideaalide kohta käivat tulemust artiklist [LORW].

**Teoreem 3.1.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja $r, s \in (0,1]$. Järgmised tingimused on samaväärsed.*

(a) *$X$ rahuldab $M(r,s)$-võrratust.*

(b) *Mistahes arvu $\epsilon > 0$, elemendi $x \in B_X$, kera $B_X$ kumera alamhulga $K$ ja $x^{**} \in \overline{K}^{w^*}$ korral leidub element $z \in K$ nii, et*

$$\|rx + s(x^{**} - z)\| \leq 1 + \epsilon.$$

(c) *Mistahes $\epsilon > 0$, $x \in B_X$, $(x_n) \subset B_X$ ja jada $(x_n)$ $w^*$-piirpunkti $x^{**}$ korral leidub element $u \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots\}$ nii, et*

$$\|rx + s(x^{**} - u)\| \leq 1 + \epsilon.$$

(d) *Mistahes $\epsilon > 0$, $x \in S_X$ ja $(x_n) \subset S_X$ korral leiduvad $n_0 \in \mathbb{N}$, element $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$ ja element $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ nii, et*

$$\|rx + s(t - u)\| \leq 1 + \epsilon.$$

(e) *Mistahes $x \in S_X$ ja $x^{**} \in S_{X^{**}}$ korral leidub pere $(x_\alpha) \subset S_X$ nii, et $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$ ja*

$$\overline{\lim_{\alpha}} \|rx + s(x^{**} - x_\alpha)\| \leq 1.$$

*Tõestus.* (a)$\Longrightarrow$(b). Kehtigu tingimus (a), s.t. $X$ rahuldab $M(r,s)$-võrratust, s.t. iga $x^{***} \in X^{***}$ korral

$$\|x^{***}\| \geq r\|x^*\| + s\|x^\perp\|$$

alati, kui $x^{***} = x^* + x^\perp$, kus $x^* \in X^*$ ja $x^\perp \in X^\perp$. Oletame, et tingimus (b) ei kehti. Siis leiduvad $\epsilon > 0$, $x \in B_X$, kumer hulk $K \subset B_X$ ja $x^{**} \in \overline{K}^{w^*}$ ($\|x^{**}\| \leq 1$, sest $x^{**} \in \overline{K}^{w^*} \subset \overline{B_X}^{w^*}$ ning vastavalt Goldstine'i teoreemile (vt. näiteks [D, lk. 47, teoreem 4]) $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$) nii, et

$$\|rx + s(x^{**} - z)\| > 1 + \epsilon \qquad \forall z \in K.$$

Järelikult on hulk $sK$ ja kera $B(sx^{**}+rx, 1+\epsilon)$ lõikumatud ruumis $X^{**}$. Vastavalt Hahn-Banachi teoreemile mittelõikuvate kumerate hulkade eraldamisest (vt. näiteks [P, lk. 70-71]; selle teoreemi eeldused on täidetud, sest $sK$ on kumer hulk ning $B(sx^{**}+rx, 1+\epsilon)$ on lahtine kumer hulk) leidub funktsionaal $x^{***} = x^* + x^{\perp} \in X^{***}$, $\|x^{***}\| = 1$, $x^* \in X^*$, $x^{\perp} \in X^{\perp}$ nii, et

$$\inf\{\mathrm{Re}x^{***}(u) : u \in B(sx^{**}+rx, 1+\epsilon)\} \geq s\mathrm{Re}x^{***}(z) \qquad \forall z \in K.$$

Nüüd kasutame järgmist väidet.

**Väide 3.2.** *Olgu $Z$ Banachi ruum, $z \in Z$, $z^* \in Z^*$ ja $R > 0$. Siis*

$$\inf_{y \in B(z,R)} \mathrm{Re}z^*(y) = \mathrm{Re}z^*(z) - R\|z^*\|$$

*ja*

$$\sup_{y \in B(z,R)} \mathrm{Re}z^*(y) = \mathrm{Re}z^*(z) + R\|z^*\|.$$

*Väite tõestus.* Paneme tähele, et kehtib võrdus

$$B(z,R) = S, \tag{3.1}$$

kus $S = \{z\} + B(0,R)$. Tõepoolest, olgu $y \in B(z,R)$. Tähistame $w = y - z$; siis $y = z + w$, kusjuures $\|w\| < R$, s.t. $y \in S$. Seega $B(z,R) \subset S$. Teiselt poolt, kui $y \in S$, s.t. leidub $w \in X$ nii, et $\|w\| < R$ ja $y = z + w$, siis

$$\|y - z\| = \|z + w - z\| = \|w\| < R;$$

seega $y \in B(z,R)$ ning $S \subset B(z,R)$. Võrdus (3.1) kehtib.

Võrdusest (3.1) järeldub vahetult, et

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in B(z,R)} \mathrm{Re}z^*(y) &= \inf_{\|w\|<R} \mathrm{Re}z^*(z+w) \\
&= \mathrm{Re}z^*(z) + \inf_{\|w\|<R} \mathrm{Re}z^*(w) \\
&= \mathrm{Re}z^*(z) - \sup_{\|w\|<R} \{-\mathrm{Re}z^*(w)\} \\
&= \mathrm{Re}z^*(z) - R\|z^*\|.
\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}
\sup_{y \in B(z,R)} \mathrm{Re}z^*(y) &= \sup_{\|w\|<R} \mathrm{Re}z^*(z+w) \\
&= \mathrm{Re}z^*(z) + \sup_{\|w\|<R} \mathrm{Re}z^*(w) \\
&= \mathrm{Re}z^*(z) + R\|z^*\|.
\end{aligned}$$

Väide 3.2 on tõestatud. $\square$

Vastavalt äsjatõestatud väitele

$$\mathrm{Re}x^{***}(sx^{**}+rx)-(1+\epsilon)\geq s\mathrm{Re}x^{***}(z)\qquad \forall z\in K.$$

Seetõttu saame

$$\begin{aligned}1+\epsilon&\leq -s\mathrm{Re}x^{*}(z)+s\mathrm{Re}x^{***}(x^{**})+r\mathrm{Re}x^{***}(x)\\&=-s\mathrm{Re}x^{*}(z)+s\mathrm{Re}x^{*}(x^{**})+s\mathrm{Re}x^{\perp}(x^{**})+r\mathrm{Re}x^{*}(x)\\&=-s\mathrm{Re}x^{*}(z-x^{**})+s\mathrm{Re}x^{\perp}(x^{**})+r\mathrm{Re}x^{*}(x)\\&\leq s|x^{*}(z-x^{**})|+s\|x^{\perp}\|\|x^{**}\|+r\|x^{*}\|\|x\|\\&\leq s|x^{*}(z-x^{**})|+s\|x^{\perp}\|+r\|x^{*}\|\\&\leq s|x^{*}(z-x^{**})|+\|x^{***}\|\\&=s|x^{*}(z-x^{**})|+1\qquad \forall z\in K.\end{aligned}$$

Kuna $x^{**}\in\overline{K}^{w^*}$, siis leidub element $z_0\in K$ nii, et $|x^*(z_0-x^{**})|<\epsilon/s$. Seega

$$1+\epsilon\leq s|x^*(z_0-x^{**})|+1<s\frac{\epsilon}{s}+1=1+\epsilon,$$

mis on aga vastolu. Järelikult tingimus (b) kehtib.

(b)$\Longrightarrow$(c). Kehtigu tingimus (b). Näitame, et kehtib tingimus (c). Tahame näidata, et mistahes $\epsilon>0$, $x\in B_X$, $(x_n)\subset B_X$ ja jada $(x_n)$ $w^*$-piirpunkti $x^{**}$ korral leidub element $u\in\mathrm{conv}\{x_1,x_2,\dots\}$ nii, et

$$\|rx+s(x^{**}-u)\|\leq 1+\epsilon.$$

Valime tingimuses (b) $K=\mathrm{conv}\{x_1,x_2,\dots\}$. Siis $K\subset B_X$. Vastavalt tingimusele (b) leidub mistahes $\epsilon>0$, $x\in B_X$ ja $x^{**}\in\overline{\mathrm{conv}\{x_1,x_2,\dots\}}^{w^*}$ korral $u\in\mathrm{conv}\{x_1,x_2,\dots\}$ nii, et

$$\|rx+s(x^{**}-u)\|\leq 1+\epsilon.$$

Paneme tähele, et tingimuse (c) kehtivuseks piisab näidata, et kui $x^{**}$ on jada $(x_n)$ $w^*$-piirpunkt, siis $x^{**}\in\overline{\mathrm{conv}\{x_1,x_2,\dots\}}^{w^*}$. Asjaolu, et $x^{**}$ on jada $(x_n)$ $w^*$-piirpunkt tähendab, et leidub osapere $(y_\alpha)\subset(x_n)$ nii, et $y_n\xrightarrow{w^*}x^{**}$. Järelikult $x^{**}\in\overline{\{x_1,x_2,\dots\}}^{w^*}\subset\overline{\mathrm{conv}\{x_1,x_2,\dots\}}^{w^*}$.

(c)$\Longrightarrow$(d). Olgu $x\in S_X$, $(x_n)\subset S_X$, $\epsilon>0$. Olgu $x^{**}\in B_{X^{**}}$ jada $(x_n)$ mingi $w^*$-piirpunkt. (Jadal $(x_n)$ leidub $w^*$-piirpunkt. Tõepoolest, Banach-Alaoglu teoreemi kohaselt (vt. näiteks [P, lk. 80]) on $B_{X^{**}}$ $w^*$-kompaktne hulk. Kuna jada

$(x_n)$ asub $w^*$-kompaktses hulgas $B_{X^{**}}$, siis leidub temas osapere, mis $w^*$-koondub. Selle osapere piirelement $x^{**}$ ongi ühtlasi jada $(x_n)$ $w^*$-piirpunktiks.) Tingimuse (c) kohaselt leidub $n_0 \in \mathbb{N}$ selliselt, et mingi elemendi $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$ korral

$$\|rx + s(x^{**} - u)\| \le 1 + \frac{\epsilon}{2}.$$

Tähistame $K = \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ ja oletame vastuväiteliselt, et

$$\|rx + s(t - u)\| > 1 + \epsilon \qquad \forall t \in K.$$

Järelikult on kumer hulk $s\operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ ja lahtine kumer hulk $B(su - rx, 1+\epsilon)$ lõikumatud ruumis $X$. Seetõttu lubab Hahn-Banachi teoreem mittelõikuvate kumerate hulkade eraldamisest leida funktsionaali $x^* \in S_{X^*}$ selliselt, et iga elemendi $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ korral

$$\sup\{\operatorname{Re}x^*(z) : z \in B(su - rx, 1 + \epsilon)\} \le s\operatorname{Re}x^*(t).$$

Vastavalt osas (a)$\Longrightarrow$(b) tõestatud väitele 3.2

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}x^*(su - rx) + (1 + \epsilon) &= \sup\{\operatorname{Re}x^*(z) : z \in B(su - rx, 1 + \epsilon)\} \\ &\le s\operatorname{Re}x^*(t) \qquad \forall t \in K.\end{aligned}$$

Seega

$$1 + \epsilon \le \operatorname{Re}x^*(st + rx - su) \qquad \forall t \in K.$$

Kuna $x^{**} \in \overline{K}^{w^*}$, siis leidub pere $(t_\alpha) \subset K$ nii, et $x^*(t_\alpha) \longrightarrow x^*(x^{**})$, mistõttu ka $\operatorname{Re}x^*(st_\alpha) \longrightarrow \operatorname{Re}x^*(sx^{**})$. Järelikult,

$$\begin{aligned}1 + \epsilon &\le \operatorname{Re}x^*(sx^{**} + rx - su) \\ &\le \|rx + s(x^{**} - u)\| \\ &\le 1 + \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

mis on vastuolu; seega (d) kehtib.

(d)$\Longrightarrow$(e). Oletame vastuväiteliselt, et mingite $x \in S_X$ ja $x^{**} \in S_{X^{**}}$ korral ei leidu sellist peret nagu tingimuses (e). Paneme tähele, et punkti $x^{**}$ mistahes $w^*$- ümbruse $V$ korral on hulk $S_X \bigcap V$ mittetühi. Tõepoolest, vastavalt Goldstine'i teoreemile leidub pere $x_\alpha \subset B_X$ nii, et $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$. On selge, et $\overline{\lim}\|x_\alpha\| \le 1$. Normi $w^*$-alt- poolpidevuse tõttu (vt. näiteks [D, lk. 29, teoreem 2]) on $\underline{\lim}\|x_\alpha\| \ge 1$. Järelikult $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = 1$. Nüüd

$$\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|} \xrightarrow{w^*} x^{**}.$$

(see on nii, sest $\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|} - x^{**} = \frac{1}{\|x_\alpha\|}(x_\alpha - x^{**} + x^{**} - \|x_\alpha\| x^{**}) \xrightarrow{w^*} 0$). Järelikult

$$x^{**} \in \overline{S_X}^{w^*}.$$

Seega sisaldab punkti $x^{**}$ mistahes $w^*$-übrus $V$ mingit hulga $S_X$ elementi. Seetõttu ei saa lõige $S_X \bigcap V$ olla tühi.

Veel paneme tähele, et leiduvad punkti $x^{**}$ kumer $w^*$-ümbrus $V$ ja $\epsilon > 0$ nii, et

$$\|rx + s(x^{**} - v)\| > 1 + \epsilon \qquad \forall v \in V \bigcap B_X. \tag{3.2}$$

Tõepoolest, olgu $\mathfrak{A} = \{\alpha = (V, \epsilon) : V$ on punkti $x^{**}$ $w^*$-ümbrus ja $\epsilon > 0\}$ loomulikul viisil järjestatud (s.t. $(V_1, \epsilon_1) \geq (V_2, \epsilon_2)$ parajasti siis, kui $V_1 \subset V_2$ ja $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$). Kui tingimus (3.2) ei kehtiks, siis iga $\alpha = (V, \epsilon)$ korral leiduks element $v_\alpha \in V \cap B_X$ nii, et

$$\|rx + s(x^{**} - v_\alpha)\| \leq 1 + \epsilon.$$

On kerge näha, et $\frac{v_\alpha}{\|v_\alpha\|} \xrightarrow{w^*} x^{**}$. (Tõepoolest, $\overline{\lim}_\alpha \|v_\alpha\| \leq 1$. Kuna $v_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$, siis normi $w^*$-alt-poolpidevuse tõttu on $\underline{\lim}_\alpha \|v_\alpha\| \geq 1$. Järelikult $\lim_\alpha \|v_\alpha\| = 1$. Nüüd on selge, et

$$\frac{v_\alpha}{\|v_\alpha\|} - x^{**} = \frac{1}{\|v_\alpha\|}(v_\alpha - x^{**} + x^{**} - \|v_\alpha\| x^{**}) \xrightarrow{w^*} 0.)$$

Tähistame $\epsilon_\alpha = \epsilon$, kui $\alpha = (V, \epsilon) \in \mathfrak{A}$. Siis $\epsilon_\alpha \longrightarrow 0$, mistõttu

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_\alpha} \|rx + s(x^{**} - \frac{v_\alpha}{\|v_\alpha\|}\|) &= \overline{\lim_\alpha} \|rx + s(x^{**} - v_\alpha) + s(v_\alpha - \frac{v_\alpha}{\|v_\alpha\|})\| \\
&\leq \overline{\lim_\alpha} \|rx + s(x^{**} - v_\alpha)\| + s\overline{\lim_\alpha} \|v_\alpha - \frac{v_\alpha}{\|v_\alpha\|}\| \\
&\leq \overline{\lim_\alpha} (1 + \epsilon_\alpha) + s\overline{\lim_\alpha} |\|v_\alpha\| - 1| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Seega leidub selline pere $(x_\alpha) = (\frac{v_\alpha}{\|v_\alpha\|})$ nagu tingimuses (e), mis on aga vastuolus meie oletusega. Tingimus (3.2) on tõestatud.

Valime suvaliselt elemendi $x_1 \in S_X \bigcap V$ ja tähistame

$$K_1 = (1 + \epsilon) B_{X^{**}} + s x_1 - rx.$$

($K_1$ on $w^*$-kinnine hulk, sest $B_{X^{**}}$ on $w^*$-kompaktse hulgana $w^*$-kinnine hulk). Vastavalt tingimusele (3.2) $K_1$ ei sisalda elementi $sx^{**}$, seega saame valida punkti $x^{**}$ kumera $w^*$-ümbruse $V_1$ selliselt, et $V_1 \subset V$ ning $sV_1 \bigcap K_1 = \emptyset$, s.t.

$$\|rx + s(v - u)\| > 1 + \epsilon \qquad \forall v \in V_1.$$

Valime elemendi $x_2 \in S_X \bigcap V_1$ (selline valik on võimalik, sest $S_X \bigcap V_1 \neq \emptyset$) ja tähistame

$$K_2 = (1+\epsilon)B_{X^{**}} + s\operatorname{conv}\{x_1, x_2\} - rx.$$

Valime punkti $x^{**}$ kumera $w^*$-ümbruse $V_2 \subset V_1$ selliselt, et $V_2 \subset V_1$ ning $sV_2 \bigcap K_2 = \emptyset$, s.t.

$$\|rx + s(v-u)\| > 1+\epsilon \qquad \forall v \in V_2, \quad \forall u \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2\}.$$

Jätkates seda protsessi saame punkti $x^{**}$ kumerate $w^*$-ümbruste jada $(V_n)$ nii, et $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ ja jada $(x_n) \subset S_X$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_{n+1} \in V_n$ ja

$$\|rx + s(v-u)\| > 1+\epsilon \qquad \forall v \in V_n, \quad \forall u \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

See on vastuolus tingimusega (d), kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulga $V_n$ kumeruse tõttu $\operatorname{conv}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \subset V_n$, sest $x_{n+k} \in V_{n+k-1} \subset V_n$, kui $k = 1, 2, \dots$ . Vastuolu tekkis oletusega, et mingite elementide $x \in S_X$ ja $x^{**} \in S_{X^{**}}$ korral sellist peret nagu tingimuses (e) ei leidu. Järelikult tingimus (e) kehtib.

(e)$\Longrightarrow$(a). Fikseerime vabalt elemendi $x^{***} \in X^{***}$; siis $x^{***} = x^* + x^{\perp}$, kus $x^* \in X^*$ ja $x^{\perp} \in X^{\perp}$. Fikseerime vabalt $\epsilon > 0$. Valime $x \in S_X$ nii, et $\|x^*\| \leq x^*(x)+\epsilon$ ja $x^{**} \in S_{X^{**}}$ nii, et $\|x^{\perp}\| \leq x^{\perp}(x^{**}) + \epsilon$. Tingimuse (e) kohaselt leidub pere $(x_\alpha) \subset S_X$ nii, et

$$\lim_\alpha x^*(x^{**} - x_\alpha) = 0$$

ja

$$\overline{\lim_\alpha} \|rx + s(x^{**} - x_\alpha)\| \leq 1.$$

Järelikult,

$$\begin{aligned}
r\|x^*\| + s\|x^{\perp}\| &\leq rx^*(x) + sx^{\perp}(x^{**}) + (r+s)\epsilon \\
&\leq \lim_\alpha (rx^*(x) + sx^*(x^{**} - x_\alpha) + sx^{\perp}(x^{**})) + 2\epsilon \\
&\leq \lim_\alpha (rx^*(x) + sx^*(x^{**} - x_\alpha) + rx^{\perp}(x) + sx^{\perp}(x^{**}) - sx^{\perp}(x_\alpha)) + 2\epsilon \\
&\leq \lim_\alpha |rx^*(x) + sx^*(x^{**} - x_\alpha) + rx^{\perp}(x) + sx^{\perp}(x^{**}) - sx^{\perp}(x_\alpha)| + 2\epsilon \\
&= \lim_\alpha |(x^* + x^{\perp})(rx + s(x^{**} - x_\alpha))| + 2\epsilon \\
&\leq \|x^* + x^{\perp}\| \overline{\lim_\alpha} \|rx + s(x^{**} - x_\alpha)\| + 2\epsilon \\
&\leq \|x^{***}\| + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Seega

$$r\|x^*\| + s\|x^{\perp}\| \leq \|x^{***}\| + 2\epsilon.$$

Minnes selles võrratuses mõlemal pool piirile protsessis $\epsilon \longrightarrow 0$, saame

$$r\|x^*\| + s\|x^{\perp}\| \leq \|x^{***}\| \qquad \forall x^{***} = x^* + x^{\perp} \in X^* \oplus X^{\perp} = X^{***},$$

s.t. kehtib tingimus (a). $\square$

# §4. Järeldused põhiteoreemist

Nagu märkisime (vt. §2), Banachi ruum $X$ on $M$-ideaal parajasti siis, kui ta rahuldab $M(1,1)$-võrratust.

Artiklist [LORW] on teada, et $M$-ideaali omadus on separaablilt määratud: $X$ on $M$-ideaal parajasti siis, kui ruumi $X$ iga separaabel alamruum on $M$-ideaal. Seda teoreemi üldistab alljärgnev tulemus.

**Järeldus 4.1.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja $r$, $s \in (0,1]$. Ruum $X$ rahuldab $M(r,s)$-võrratust parajasti siis, kui ruumi $X$ iga separaabel kinnine alamruum rahuldab $M(r,s)$-võrratust.*

*Tõestus.* *Tarvilikkus* järeldub vahetult artikli [CN] lausest 1.1, mis väidab, et $M(r,s)$-võrratus pärandub kinnistesse alamruumidesse.

*Piisavus.* Rahuldagu ruumi $X$ iga separaabel kinnine alamruum $M(r,s)$-võrratust. Näitamaks, et ruum $X$ rahuldab $M(r,s)$-võrratust on teoreemi 3.1 tingimuse (d) kohaselt piisav näidata, et mistahes $\epsilon > 0$, $x \in S_X$ ja $(x_n) \subset S_X$ korral leiduvad $n_0 \in \mathbb{N}$, element $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ ja element $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ nii, et

$$\|rx + s(t-u)\| \leq 1 + \epsilon.$$

Fikseerime vabalt $\epsilon > 0$, $x \in S_X$ ja $(x_n) \subset S_X$. Tähistame $Y = \overline{\operatorname{span}\{x, x_1, x_2, \ldots\}}$; siis $Y$ on ruumi $X$ separaabel kinnine alamruum. Järelikult $Y$ rahuldab $M(r,s)$-võrratust. Teoreemi 3.1 tingimuse (d) põhjal leiduvad $n_0 \in \mathbb{N}$, element $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ ja element $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ nii, et

$$\|rx + s(t-u)\| \leq 1 + \epsilon. \quad \square$$

Erijuhul $r = s = 1$, saame teoreemist 3.1 järgmise järelduse, mis on üks artikli [LORW] põhitulemusi.

**Järeldus 4.2.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Siis järgmised tingimused on samaväärsed.*

(a) *$X$ on $M$-ideaal.*

(b) *Mistahes arvu $\epsilon > 0$, elemendi $x \in B_X$, kera $B_X$ kumera alamhulga $K$ ja $x^{**} \in \overline{K}^{w^*}$ korral leidub element $z \in K$ nii, et*

$$\|x + x^{**} - z\| \leq 1 + \epsilon.$$

(c) *Mistahes $\epsilon > 0$, $x \in B_X$, $(x_n) \subset B_X$ ja jada $(x_n)$ $w^*$-piirpunkti $x^{**}$ korral leidub element $u \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots\}$ nii, et*

$$\|x + x^{**} - u\| \leq 1 + \epsilon.$$

(d) *Mistahes* $\epsilon > 0$, $x \in S_X$ *ja* $(x_n) \subset S_X$ *korral leiduvad* $n_0 \in \mathbb{N}$, *element* $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ *ja element* $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ *nii, et*

$$\|x + t - u\| \leq 1 + \epsilon.$$

(e) *Mistahes* $x \in S_X$ *ja* $x^{**} \in S_{X^{**}}$ *korral leidub pere* $(x_\alpha) \subset S_X$ *nii, et* $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}$ *ja*

$$\varlimsup_{\alpha} \|x + x^{**} - x_\alpha\| \leq 1.$$

# $M(r, s)$-inequality

**Rainis Haller**

## Summary

In the present bachelor thesis, we consider Banach spaces satisfying the $M(r,s)$-inequality which is a recent generalization of $M$-ideals.

Let $r, s \in (0,1]$. A Banach space $X$ is said to satisfy the $M(r,s)$-inequality if

$$\|x^{***}\| \geq r\|\pi x^{***}\| + s\|x^{***} - \pi x^{***}\| \qquad \forall x^{***} \in X^{***},$$

where $\pi$ is the canonical projection of $X^{***}$ onto $X^*$

This notion was introduced and studied by J. C. Cabello and E. Nieto [CN] in 1995. The main result of the bachelor thesis is Theorem 3.1 which generalizes criteria of $M$-ideals from [LORW]. Theorem 3.1 provides four necessary and sufficient conditions for a Banach space to satisfy the $M(r,s)$-inequality. In particular, it is proved that a Banach space $X$ satisfies the $M(r,s)$-inequality if and only if the unit sphere $S_X$ of $X$ has the following property: whenever $\epsilon > 0$, $x \in X$, and $(x_n) \subset S_X$, then there are $n_0 \in \mathbb{N}$, $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$, and $t \in \operatorname{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ satisfying

$$\|rx + s(t-u)\| \leq 1 + \epsilon.$$

This immediately implies that the $M(r,s)$-inequality is separably determined.

# Kirjandus


[AE] E. M. Alfsen, E. G. Effros, *Structure in real Banach spaces*, Ann. Math. **68** (1972), 98–173.

[CN] J. C. Cabello, E. Nieto, *On properties of M-ideals*, Preprint (1995).

[D] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 21, Springer, Berlin, 1973.

[HWW] P. Harmand, D. Werner, W. Werner, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 1547, Springer, Berlin, 1993.

[JW] J. Johnson, J. Wolfe, *On the norm of the canonical projection of $E^{***}$ onto $E^{\perp}$*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 50–52.

[LORW] Å. Lima, E. Oja, T. S. S. R. K. Rao, D. Werner, *Geometry of operator spaces*, Michigan Math. J. **41** (1994), 473–490.

[O] E. Oja, *Strong uniqueness of the extension of linear functionals according to the Hahn-Banach theorem*, Math. Notes **43** (1988), 134–139.

[OO] E. Oja, P.Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[ДШ] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.

[КА] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1984.

[КФ] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1976.

[Р] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1975.

[Э] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, Москва, 1969.

# Sisukord