

39 436<sup>c</sup>

Ueber die

# Höhe des Caspischen Meeres

und der

Hauptspitzen der Caucasischen Gebirge.

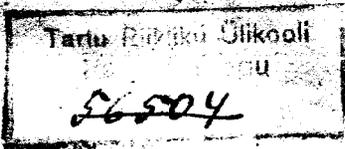
---

## Dissertation,

welche zur Erlangung des philosophischen Doctorgrades bei der Hochverordneten philosophischen Facultät der Kaiserlichen Universität zu Dorpat eingereicht ist und öffentlich vertheidigt werden wird

von

Magister Alexis Sawitsch.



---

Dorpat, 1839.

Gedruckt bei Lindfors Erben.

Der Druck ist gestattet, unter der Bedingung, daß die gesetzliche Zahl von Exemplaren an die Censur-Comität abgeliefert werden.

Dorpat, den 5. Mai 1839.

Dr. Friedrich Neue,  
geschäftsführender Decan der philosophischen Facultät.

2  
Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu

459202

**Sr. Excellenz**

dem Herrn

**F. G. W. von Struve,**

Wirklichem Staats-Rath, Ritter des heil. Wladimir-Ordens 3ter Classe, der heil. Anna 2ter Classe mit der Kaiser-Krone, des Königlich Preussischen rothen Adler-Ordens 3ter Classe und des Dannebrog-Ordens, Director der academischen Haupt-Sternwarte zu Pulkova, Mitgliede der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Professor emeritus der Dorpatischen Universität und ehemaligem Director der dortigen Sternwarte, Mitgliede und Correspondenten der Königl. und der Astronomischen Gesellschaft in London, der Königl. Akademien in Copenhagen, Göttingen, Harlem, Edinburg, der Akademien in Stockholm, Berlin, Palermo, Boston, des Instituts von Frankreich und mehrerer anderer gelehrten Anstalten,

seinem hochverehrten Lehrer,

widmet diese Schrift

aus größter Hochachtung und innigster Dankbarkeit

der

**Verfasser.**

rationem indicavit, qua in applicando calculo suo novo utendum esset, nec vero ejus principiis, ut ita dicam, philosophicis stabiliendis ullam operam navavit. Eam ob causam alii mathematici munus susceperunt hujus methodi principia perscrutandi et clariora reddendi, ante omnes vero Eulerus ipse, qui novum illum calculum, cui nomen calculi variationum inter omnes mathematicos nunc usitatum imposuit <sup>1)</sup>, cum in opere suo de calculo integrali <sup>2)</sup> tum in pluribus commentationibus pertractavit, quarum unam <sup>3)</sup> praecipue hic laudare debeo, in qua calculum variationum ad principia calculi differentialis revocare conatus est. Hanc rei tractandae rationem duce Eulero plures mathematici secuti sunt et Lagrangius ipse postea calculi sui principia hunc in modum explicavit <sup>4)</sup>, et equidem in dissertatione mea hanc viam ingressurus sum, quia verum, uti mihi videtur, accessum ad abscondita hujus calculi principia aperuit. Nova illa Lagrangii methodus sive calculus variationum non modo omnes illas formulas suppeditat, quas ad solvenda problemata isoperimetrica Eulerus jam evolvit, sed etiam generaliori forma eas exhibet, ita ut limites curvae iaveniendae, quae maximi minimive proprietate gaudeat, etiam variables assumi queant. Praeterea verum etiam in multis aliis investigationibus iisque gravissimis plurimum valet, ut in eruendis aequationibus conditionalibus, quibus cognoscitur, num functio plurium variabilium integrabilis sit nec ne, praecipue vero in problematibus mechanicis, ad quae solvenda Lagrangius in opere suo immortalis *Mechanica ana-*

1) *Novi Commentarii Petropoli.* Tom. X. añ. 1766 pag. 51.

2) *Institutionum calculi integralis volumen III.* auct. L. Eulero. Petropoli 1770.

3) *Novi Commentarii Petropoli.* Tom. XVI. añ. 1772 pag. 85.

4) *Leçons sur le calcul des fonctions par Lagrange.* Paris 1806. Leçon 22me.

Seit Pallas seine für die Wissenschaften so nützlichen Reisen herausgab, hat das Caspische Meer die Aufmerksamkeit der Naturforscher angeregt, und je bekannter die Küsten dieses großen Salz-Sees in zoologischer und geognostischer Rücksicht wurden, desto interessanter schien es vielen Gelehrten, den Niveau-Unterschied zwischen den Oberflächen des Caspischen und Schwarzen Meeres kennen zu lernen. Mehrere der ausgezeichneten Männer, wie die Herren F. Parrot, Engelhardt, Wisnjewsky, Lenz, Göbel, haben durch sorgfältige barometrische Nivellirungen diese Aufgabe zu lösen versucht. Es erwies sich allerdings zwar, daß die Oberfläche des Caspischen Meeres der größten Wahrscheinlichkeit nach tiefer als die des Schwarzen läge, aber die Natur der Sache erlaubte nicht, auf diesem Wege ein sicheres Resultat zu gewinnen, ja es fanden sich sogar in den verschiedenen Angaben ziemlich bedeutende Widersprüche, wodurch die St. Petersburgische Academie der Wissenschaften, um die Frage allendlich zu entscheiden, sich bewogen fühlte, Anno 1836 den Plan zur trigonometrischen Bestimmung des Höhenunterschiedes beider Meere zu entwerfen und Seiner Kaiserlichen Majestät zur Bestätigung zu unterlegen, welche auch Allergnädigst gewährt wurde. Ich hatte das Glück zum Mitgliede der Expedition, welcher die Ausführung des Nivellements anvertraut werden sollte, ernannt zu werden, und beabsichtige hier einige der Resultate unserer Arbeit, mit wenigen Bemerkungen über den Grad ihrer Zuverlässigkeit, mitzutheilen. Vor allen Dingen muß ich hier erwähnen, daß wir nach einer Instruction unseres berühmten Astronomen, Herrn Academikers Struve, Excellenz, gearbeitet haben, deren Vortrefflichkeit zu würdigen wir bei der Operation selbst so oft Gelegenheit hatten. Außerdem leitete er fortwährend den Gang unserer Geschäfte, in so weit dies durch briefliche Verbindung möglich war; und gern gestehen wir es, daß das Gelingen der Unternehmung ihm vorzüglich zuzuschreiben ist.

## I. Ueber die Anordnung und Methode der Beobachtungen.

Ehe ich zum eigentlichen Gegenstand meiner jetzigen Arbeit komme, scheint es mir nicht unzwedmäßig, eine kurze Uebersicht der Methoden zu geben, nach welchen wir unsere

Operation ausgeführt und die erforderlichen Rechnungen gemacht haben; zugleich aber auch der Umstände zu gedenken, unter welchen diese Arbeit zu Stande gebracht ist.

Es ist bekannt, daß die Sicherheit eines trigonometrischen Nivellements im umgekehrten Verhältniß des Quadrates der Entfernung von den Puncten, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll, zunimmt. Besonders war es nothwendig, etwas beträchtliche Distanzen in einem flachen Steppen-Lande zu vermeiden, wo die Gesichtslinie fast immer sehr nahe der Oberfläche der Erde vorbeigeht, wodurch die größte Veränderlichkeit in der Refraction zu erwarten war. Wir können sagen, daß unsere Hauptresultate auf Messungen der Zenithdistanzen zwischen Puncten beruhen, welche im Durchschnitt weniger als 11500 Engl. Fuß von einander entfernt sind. Nur selten waren wir genöthigt, das Dreifache davon zu nehmen. In Entfernungen von 21000 bis 24000 E. F. wurden 14 Fuß hohe Signalstangen ( $P_n$ ,  $P_{n+1}$ ) errichtet, welche am obern Ende Platten von Eisenblech, mit weißen runden Bismarcken auf schwarzem Grunde, von beiden Seiten, hatten, und mit einer Theilung in Engl. Zoll, vom Centrum der Marke aus gerechnet, versehen waren. Nun suchte man immer zur Basis ( $A_n$ ,  $B_n$ ), welche zur Bestimmung der Entfernungen der Signale dienen sollte, eine solche Linie zu finden, welche ungefähr 1400 Engl. Fuß lang, die Linie  $P_n$ ,  $P_{n+1}$  senkrecht zu ihrer Richtung in zwei gleiche Theile schnitt. Um die Endpunkte der Basis ( $A_n$ ,  $B_n$ ) zu bezeichnen, gebrauchten wir zwei starke, hölzerne Böcke, deren runde, mit angeschraubten Anfängen versehene und in der Mitte durchbohrte Platten vermittelst eines Segniveau horizontal aufgestellt wurden. In die durchgebohrten Oeffnungen liefen die zuerst viereckigen, dann cylindrisch sich endigenden Träger der Bismarcken ein, so daß die Mitte der Marke genau über ein Centrum der Oeffnung zu stehen kam, beinahe 35 F. über dem Tischblatte. Die Methode der Basismessung war die, welche in Struve's Gradmessung in den Russischen Ostsee-provinzen Bd. II. p. 7. und noch umständlicher in dem Bulletin scientifique de l'Academie de St. Petersbourg, T. 11. No. 16., 17. beschrieben ist. Aus wiederholten Messungen haben wir die Gewißheit gewonnen, daß die nach dieser Methode bestimmten Linien von 1400 F. bis auf 0,5 Zoll genau sind.

Nachdem die Signale  $P_{n-1}$ ,  $P_n$ ,  $P_{n+1}$ , und die Basis-Enden  $A_n$ ,  $B_n$ , und  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$ , aufgestellt waren, wurde die Basis gemessen und dann von  $P_n$  aus mit dem großen Universal-Instrumente (siehe S. 11.) die Horizontal-Winkel zwischen  $B_{n+1}$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $B_{n+1}$ ,  $A_{n+1}$ ,  $P_{n+1}$  bis auf 1" oder 2" genau beobachtet; außerdem noch mit einem kleinern Universal-Instrument die Winkel aus  $A_n$ ,  $B_n$  und einen Tag später aus  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  bis 6" genau genommen, wodurch sowohl die linearischen Entfernungen, als auch die Richtung der Operationslinie bestimmt sind.

Die Beobachtung der Zenithdistanzen, der wichtigste Theil der Arbeit, ist immer während der Zeit gemacht worden, wenn die möglichst größte Ruhe der Bilder eingetreten war, doch wurde sie früher angefangen und später fortgesetzt, um, der Controlle wegen, zahlreichere Bestimmungen zu erhalten. Wenige Stationen ausgenommen, sind die Beobachtungen selbst

in folgender Ordnung ausgeführt. Neben den Enden  $B_n$  und  $B_{n+1}$  von zwei auf einander folgenden Basen wurden eben so hohe Signale  $\beta_n, \beta_{n+1}$  aufgestellt, wie in  $P_n, P_{n+1}$ , und während einer der Beobachter in  $P_n$  die Zenithdistanzen von  $\beta_{n+1}$  und  $\beta_n$  mit dem großen Universal-Instrumente nahm, maassen die andern Beobachter in  $\beta_{n+1}$  und  $\beta_n$  gleichzeitig die gegenseitigen Zenithdistanzen von  $P_n$  mit dem Theodoliten. Außerdem wurden in  $P_n$  zugleich die Zenithdistanzen von  $P_{n+1}$  und  $P_{n-1}$ , in  $\beta_{n+1}$  die Zenithdistanzen auch von  $P_{n+1}$  und in  $\beta_n$  auch die von  $P_{n-1}$  so gemessen, daß im Mittel die Zenithdistanzen zweier vorwärts und rückwärts liegenden Signale genau für dieselben Momente correspondiren, für welche auch die gegenseitigen Bestimmungen gelten. — Weil man aber aus  $P_n$  mehr Objecte zu beobachten hatte, so waren die Zeitintervallen zwischen den Einstellungen für die Beobachter in  $B_n$  und  $B_{n+1}$  hinlänglich groß angelegt, um auch in  $P_n$  ohne die Gleichzeitigkeit der reciproken Bestimmungen zu stören, bequem die Objecte  $P_n$  und  $P_{n+1}$  beobachten zu können. Auf diese Art wurden zwei verschiedene Methoden combinirt, um den Einfluß der Refraction zu beseitigen, nämlich: 1) durch die gegenseitigen Zenithdistanzen, die gleichzeitig von zwei Beobachtern gefunden sind, und 2) dadurch, daß von einem mittleren Standpuncte aus ein Beobachter für denselben Zeitpunkt die Zenithdistanzen zweier nach beiden Seiten gleich weit entfernter Signale maß. Wir haben eine Reihe von Bestimmungen nach der ersten Methode und fünf Reihen nach der zweiten Methode.

Endlich muß ich noch bemerken, daß gleichzeitig auch ein barometrisches Stations-Nivellement zwischen dem Afowschen und Caspischen Meere vollständig durchgeführt ist, indem in allen Puncten  $P_1, P_2, B_2, P_3, B_3, \dots, P_{124}$  barometrische und thermometrische Beobachtungen angestellt sind; trotz aller angewandten Sorgfalt aber ist das Resultat dieser Nivelirung sehr abweichend von dem Resultate des trigonometrischen Nivellements ausgefallen, und stimmt mit einigen früheren Angaben des Höhenunterschiedes von dem Caspischen und Afowschen See, besonders mit dersjenigen überein, welche Herr F. Parrot 1815 bekannt gemacht hat.

Unsere Operations-Linie fängt von dem Ufer des Afowschen Meeres an, geht durch einen Theil des Zekaterinoslawischen Gouvernements, des Landes der Donischen Kosaken, und durch das ganze Caucassische Gebiet bis zum Ufer des Caspischen Sees. Das Terrain, zuerst ziemlich eben, nur mit kleinen Hügeln (Kurganen) besetzt, wird 10 oder 12 Meilen vor Stavropol schwach wellig und erhebt sich immer mehr, bis es einige Meilen südöstlich von dieser Stadt seine größte Höhe erreicht, wo auch die Wasser-Scheide zwischen dem Caspischen und Afowschen Meere in Bezug auf die Caucassischen Flüsse zu sein scheint. Das Terrain sinkt dann gleichsam wieder in langen Wellen, und schon östlich von Georgiewsk trifft man eine ununterbrochene, fast vollkommene Ebene an, wo im Sommer und bei heiterem Himmel die Ballung der Luft kaum für 20 Minuten während eines ganzen Tages aufhört; 9 oder 10 Meilen ungefähr von dem Ufer des Caspischen Sees kommt man auf das Niveau des Oceans; das Terrain, immer äußerst flach, sinkt allmählig bis zu jenem Ufer, und in ziemlicher Entfernung von demselben bemerkt man Moräste, eine Menge kleiner mit hohem Schilf bewachsener

Seen und überhaupt viele deutliche Spuren, daß vor Zeiten noch Meeres-Wasser dieses Land bedeckt hat.

Jetzt muß ich mit wenigen Worten einiges über den täglichen Wechsel der Strahlenbrechung im flachen Steppenlande anführen. Bei heiterem Himmel tritt die Ruhe der Bilder gewöhnlich in den Morgen- und Abendstunden ein, ist aber des Morgens von so kurzer Dauer, daß man vor und nach Sonnenaufgang sehr eilen muß, die Beobachtungen anzustellen, denn bald darauf beginnt die Ferne gewaltig unruhig zu werden; das bekannte Phänomen der Kimmung (Mirage) tritt immer deutlicher hervor, und endlich kann man nur mit großer Anstrengung die weit liegenden Signale unterscheiden. Der Erdboden wird stärker von der Sonne erhitzt, die Luftschichten sind in beständiger Bewegung, die untern, in unmittelbarer Berührung mit der Erde, werden durch die Wärme verdünnt und steigen empor, während die obern, dichtern herabsinken. Das Zittern von fast allein im Horizonte liegenden Punkten wird sogar dem bloßen Auge sichtbar und die Bilder sind höchst unregelmäßig und verworren. Mehrere Male habe ich den Unterschied der Wärme des Erdbodens und der Luft in einer Entfernung von 4 Fuß von demselben beobachtet, indem sich das Thermometer auf dem begrasteten Boden im Schatten befand, und oft die Unterschiede bis  $1,0^{\circ}$ ,  $1,5^{\circ}$  und  $2,0^{\circ}$  R., bisweilen auch nur bis  $0,5^{\circ}$  R. gefunden, obgleich das Schwanken der Objecte beträchtlich war. Die Ruhe der Bilder scheint dann einzutreten, wenn der Verlust der strahlenden Wärme der Erde und die durch das Verdunsten veranlaßte Abkühlung durch unmittelbare Wirkung der Sonne ersetzt sind, so daß zwischen dem Gewinn und Verlust der Hitze ein Gleichgewicht Statt findet, welches im Sommer meistens nach  $4\frac{1}{2}$  oder  $5\frac{1}{2}$  Stunden nach Mittag geschah. Um die Zeit des Sonnenunterganges wird dieser Verlust der Wärme immer weniger ersetzt, es tritt die zweite Unruhe ein, welche der früheren ganz entgegengesetzt ist. Bei der ersten finden bedeutende negative und bei der andern große positive Refractionen Statt, so daß die Curven, welche die Lichtstrahlen beschreiben, entgegengesetzte Krümmungen haben.

Bei bedecktem Himmel ist überhaupt die Ruhe der Bilder viel anhaltender, besonders ist ihre Dauer lang, wenn die Sonne den Tag über hinter Wolken bleibt und erst kurz vor ihrem Untergange zum Vorschein kömmt. Die Localitäten spielen übrigens die Hauptrolle bei diesem Gange der Veränderungen in den Refractionen, welche nicht selten nach verschiedenen Richtungen auch verschiedenen Werth haben. Nicht nur wirkt die allgemeine Beschaffenheit des Bodens auf die Strahlenbrechung, sondern auch die größere oder geringere Entfernung der Lichtstrahlen vom Erdboden, besonders in der Nähe des Beobachters, ist von sehr wesentlichem Einfluß. Wenn zum Beispiel bei der Messung gleichzeitiger Zenithdistanzen einer der Beobachter auf einem hohen und spitzigen Hügel steht, der andere aber auf dem ebenen Boden, so wird der erste immer eine kleinere Veränderlichkeit in den Refractionen bemerken als der zweite.

Nicht selten bemerkt man mit dem Anfange, besonders aber gleich nach dem Aufhören eines plötzlichen Regengusses, wenn derselbe in heißer Jahreszeit geschieht, eine auf-

fallende Unruhe der Bilder; kommt aber die Sonne wieder zum Vorschein, so ist sie nicht von langer Dauer, und bald bekommt man die schönsten Bilder. Uebrigens hat man bei anhaltendem Regen, wie es oft im Herbst der Fall ist, auch während des Regens selbst, ziemlich ruhige Bilder, wenn nur die Signale sichtbar genug sind. Ueberhaupt kann man sagen, daß von allen Jahreszeiten der Herbst entschieden die vortheilhafteste für geodätische Arbeiten ist, ebenso wie die Nachmittagsstunden (etwa während ein Paar Stunden vor Sonnen-Untergang) die besten des Tages sind.

Wir wollen Refractions-Coefficienten diejenige Größe nennen, mit welcher man den Winkel der Verticalen zwischen dem Beobachtungsorte und dem zu bestimmenden Punkte multiplicirt, um den Winkel zu bekommen, welcher die Verbindungslinie von dem zu bestimmenden Punkte zum Centrum des Instruments mit dem Tangente der Lichtbahn am Beobachtungsorte bildet. Diesen Winkel selbst werden wir der Einfachheit wegen mit dem Namen Refraction bezeichnen. Um in Zahlen eine Uebersicht des Ganges der Strahlenbrechung bei verschiedenen Umständen zu geben, theilen wir folgende, auf eine bedeutende Anzahl Beobachtungen sich gründenden, Refractions-Coefficienten in den Frühlings-, Sommer- und Herbstmonaten mit. Die erste Unruhe wollen wir diejenige nennen, welche der Ruhe der Bilder vorangeht, und die zweite die, welche der Ruhe nachfolgt; so finden wir die Refractions-Coefficienten

bei der 1sten heftigsten Unruhe, = 0, 12	bei der 1sten mäßigen Unruhe - 0, 03	bei fast schon eingetretener Ruhe + 0, 013
bei der Ruhe selbst = + 0,088,		
bei der nachfolgenden kleinen Unruhe + 0, 135	bei der 2ten mäßigen Unruhe + 0, 20	bei der 2ten heftigsten Unruhe + 0, 47.

## II. Angewandte Rechnungs-Methoden.

Unsere Basismessung bestand darin, daß über der ganzen zu messenden Linie eine Schnur von hinreichender Stärke über Stäbe, die etwa 70 oder 80 Fuß von einander abstanden, so ausgespannt wurde, daß die Uebergänge der Schnur über die Stäbe in einer geraden Linie lagen und dann die eigentliche Messung längst der Schnur geschah. Diese gemessene Basis =  $\pi$ , bedarf nun zweier Correctionen: 1stens wegen ihrer Neigung =  $i$  zum Horizont, einer Correction =  $- 2 \pi \sin^2 \frac{1}{2} i$ ; 2tens wegen der Senkung der Schnur, wobei man mit hinlänglicher Genauigkeit voraussetzen kann, daß, bei scharfer Spannung der Schnur, die Kettenlinie mit dem Bogen desjenigen Kreises fast übereinstimmen werde, welcher durch die beiden Anknüpfungspuncte und den niedrigsten Punct der Linie geht. Nennt man  $2a$  die Distanz zweier Stäbe,  $b$  die Senkung der Schnur in der Mitte dieser Distanz, und

berechnet  $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$ ;  $\sin \nu = \frac{a}{x}$ ,  $y = -2x (\text{Arc. } \nu - \sin \nu) = -\frac{x}{3} \sin^3 \nu \dots$  so wird  $\Sigma y$  die zweite Reduction der Basis seyn, wenn man die Summenzeichen  $\Sigma$  auf alle Intervalle zwischen je zwei Stäben ausdehnt.

Unsere Dreiecke sind so klein, daß die sphärischen Excesse keine merkliche Größe haben; also mußte man bei der Ausgleichung der Winkel setzen, daß die Summe aller gemessenen Winkel im Dreiecke  $180^\circ$  und im Vierecke  $360^\circ$  betragen muß, wobei natürlich das Gewicht der genauer gemessenen Winkel gehörig größer anzunehmen ist als das Gewicht der übrigen Winkel. Nachdem diese Ausgleichung gemacht worden ist, kann man die geodätischen Distanzen nach den gewöhnlichen trigonometrischen Formeln berechnen.

Es seien B und P die Punkte in bekannter geodätischer Entfernung = D, zwischen welchen man den Niveau-Unterschied =  $\gamma$  sucht; z die auf das Centrum der Signale reducirte Zenithdistanz von P aus B, z' die Zenithdistanz von B aus P; r und r' die correspondirenden Refractionen; C der Winkel der Verticalen in B und P; D' die Chorde welche dem Bogen D in lineariſchen Größen entspricht, und R der Krümmungshalbmesser der Erdoberfläche in der Verticalebene, welche durch B und P geht; so werden wir erstens haben:

$$z + z' + r + r' = 180^\circ + C \quad C = \frac{D}{R \sin 1''}; \quad D' = D - \frac{D^3}{24 R^2}$$

$$R = \frac{A B^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} [B^2 + (A^2 - B^2) \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha]}$$

wo A und B die halbe große und kleine Achse der Erde; e die Excentricität des Erdmeridians;  $\varphi$  die Polhöhe von B oder P,  $\alpha$  das Azimuth der Linie BP. Bei uns beziehen sich die Distanzen auf den Horizont des Beobachters, also bedarf D' keiner weitem Correction. Erlaubt man sich ferner voranzusetzen, daß  $r = r'$  ist, oder daß die Lichttheilchen auf ihrem Wege von P nach B eine solche Curve beschreiben, daß die Tangenten in P und B die gerade Linie PB unter gleichen Winkeln durchschneiden, welche Annahme bei reciproken und gleichzeitigen Messungen wenigstens für die Zeit der Ruhe der Bilder sehr wahrscheinlich ist, so bekommt man

$$r = \frac{180 + C - (z + z')}{2}, \quad \gamma = \frac{D' \sin (a - r + \frac{1}{2} C)}{\cos (a - r + C)} \quad \text{wo } a = 90 - z.$$

Eine ähnliche Formel hätte man gehabt, wenn man mit z' rechnete; man könnte auch  $\gamma$  unabhängig von r nach dem Ausdrucke

$$\gamma = \frac{D' \sin \frac{1}{2} (z' - z)}{\cos \frac{1}{2} (z' - z + C)}$$

bestimmen, aber die Rechnung würde dadurch nicht bequemer geworden seyn. Bei uns sind D und  $\gamma$  immer kleine Größen, und  $\gamma$  ist sehr nahe zu  $= D \tan (a - r + \frac{1}{2} C)$ .

Bei der Berechnung des Höhenunterschiedes aus den Zenithdistanzen, welche von der Mitte aus zwischen zwei Signalen gefunden sind, müssen nothwendigerweise zuerst aus allen gleichzeitigen und gegenseitigen Beobachtungen die wahrscheinlichen Refractions-Coefficienten gesucht

werden, die den verschiedenen Zuständen der Ruhe der Bilder und der Zeit der Beobachtungen angemessen sind; mit solchen Coefficienten wird man die ganze Reihe von Messungen berechnen und sie besonders dann mit Nutzen anwenden, wenn die Annahme der nach allen Seiten gleichen Refraction=Coefficienten offenbar unstatthaft ist, indem man sieht, daß, während die Bilder von einem der Signale nur wenig schwanken, die von den andern sehr stark unruhig sind; obgleich solche Fälle selten vorkommen, so sind es doch gerade diejenigen, welche die größten Fehler verursachen, zumal wenn noch die Stationen schlecht getheilt sind.

### III. Ueber die Zuverlässigkeit der Endresultate der Nivellirung.

Da unsere geodätischen Entfernungen für den Zweck der Nivellirung genau genug bekannt sind, so können die Ursachen der Fehler in den Höhenunterschieden nur aus den Unrichtigkeiten 1) der scheinbaren Zenithdistanzen und 2) der angebrachten Refractionen hergeleitet werden. Die Fehler der ersten Art hängen von der Natur der Instrumente und von der Individualität des Beobachters ab. Die Instrumente, mit welchen wir gearbeitet haben, sind zwei Theodoliten von Ertel, mit Fernröhren von 15 Zoll Brennweite, 15 Linien Oeffnung und 28facher Vergrößerung; die Verticalkreise 8 Z. im Durchmesser, geben mittelst der 4 Verniere unmittelbar 10"; das dritte Instrument war ein großes sogenanntes Universal-Instrument, auch von Ertel, mit einem Verticalkreise von 10 Zoll Durchmesser, welcher durch die Verniere unmittelbar 4" giebt. Das Fernrohr hat 18 Z. Brennweite, 21 Linien Oeffnung und gegen 60malige Vergrößerung. Sehr empfindliche Libellen mit Naphta (Schwefeläther) gefüllt, wurden an den Kreisen selbst angebracht.

Die anerkannte und bewunderungswürdige Genauigkeit der Theilung der Kreise von Ertel macht jeden Gedanken an die Unsicherheit unserer Angaben, welche von den Theilungsfehlern herrühren könnte, unstatthaft, um so mehr, da wir fast überall mehrere Reihen von Zenithdistanzen, von verschiedenen Punkten der Peripherie ausgehend, gemessen haben, indem die Construction der Instrumente beliebige Veränderungen des Orts des Zeniths erlaubte. Außerdem beruht jede von unseren Zenithdistanzen auf 4 Einstellungen, 2 bei dem Kreise links und 2 bei dem Kreise rechts, wobei in jeder Lage die eine durch positive und die andere durch negative Bewegung der Micrometerschraube bewerkstelligt wurde, um bei den Theodoliten, wo die Hemmung an der Peripherie des Kreises angebracht ist, die mögliche Biegung der Speichen zu eliminiren. Was die Biegung des Fernrohrs anbelangt, so scheint dieselbe nach der Construction und der Befestigungsart bei unsern Instrumenten unbedeutend zu sein; obgleich wir sie nicht durch directe Messungen zwischen zwei entgegengesetzten Fernröhren ermittelt haben, aber schon aus den durch nördliche und südliche Sterne bestimmten Polhöhen kann man schließen, daß die Biegung des Fernrohrs, wenn sie auch vorhanden wäre, äußerst gering sei.

Die wahrscheinliche Größe der zufälligen Fehler, die etwa durch das Einstellen und Ablesen entstanden sein könnten, läßt sich am besten aus astronomischen Beobachtungen ableiten, namentlich

lich aus einer großen Anzahl von Bestimmungen der Polhöhe durch solche Sterne, die hoch genug über dem Horizonte culminiren, um mit keiner von der Refraction herrührenden Unsicherheit belastet zu sein, und aus der Vergleichung jeder einzelnen Polhöhe mit dem Mittel. Es ergab sich der mittlere Fehler einer Zenithdistanz aus einem Satz von 4 Einstellungen an dem holligen Theodoliten =  $2''{,}2$  aus 19 Reihen der Polhöhen in Neu-Tscherkast;  $1''{,}7$  aus 10 Reihen in Kagalnik;  $2''{,}4$  aus 4 Reihen in Novonikolajewka;  $3''{,}4$  aus 12 Reihen in Stawropol;  $3''{,}9$  aus 3 Reihen in Alexandria und  $2''{,}0$  aus 4 Reihen in Jekaterinograd; so daß aus 52 Reihen der Polhöhe ein mittlerer zufälliger Fehler einer einzigen Bestimmung von  $\pm 2''{,}5$  folgt; seine wahrscheinliche Größe ist also =  $2''{,}5 \times 0,847 = 2''{,}1$ , für die Beobachtungen mit dem großen Universal-Instrumente ist er noch geringer, nämlich =  $1''{,}1$ .

Die Einwirkung der ungleichartigen Beschaffenheit des Bodens und anderer Umstände stören die Symmetrie der Curve, welche von den Lichttheilchen auf dem Wege vom Signal bis zum Auge des Beobachters beschrieben wird; um einigermaßen die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen die Lokalrefractionen bei den gleichzeitigen und reciproken Beobachtungen, auf den beiden Stationen, von einander differiren können, muß man zuerst den wahrscheinlichen Werth der Refractions-Coefficienten bei verschiedenen obwaltenden Umständen, vorzüglich aber bei ruhigen oder fast ruhigen Bildern, bei welchen die Hauptbestimmungen gemacht sind, finden. Dann wird sich durch die mittlere, wahrscheinliche Größe der Abweichungen des jedesmaligen Refractions-Coefficienten von dem wahrscheinlichen Werthe desselben, die Wirkung der Lokalumstände mit mehr oder weniger Richtigkeit aussprechen.

Je größer der Winkel  $C$  der Verticallinien, oder die Entfernung zwischen den Punkten ist, an welchen man die gegenseitigen Zenithdistanzen mißt, und je ruhiger die Bilder sind, desto genauer bekommt man, unter der Voraussetzung der Gleichheit der Strahlenbrechung an den beiden Endpunkten, den Refractions-Coefficienten, weil sowohl die zufälligen Beobachtungsfehler, als auch der störende Einfluß der nächsten Lokalität durch die Division mit dem größeren  $C$  geschwächt werden und obgleich die Bahn des Lichtstrahls desto mehr Veränderungen unterworfen wird, je größer der zurückgelegte Weg ist, so muß man doch zugeben, daß die dadurch verursachte Unregelmäßigkeit immer kleiner ist, als die, welche von früher erwähnten Umständen herrührt, und so wird man veranlaßt, das Gewicht der jedesmaligen Bestimmung des Refractions-Coefficienten =  $q$ , proportional dem  $C$  zu machen; jede Bestimmung giebt dann die Gleichung  $C x = q \cdot C$ , wo  $x$  der gesuchte wahrsch. Werth des Refractions-Coefficienten ist. Dieser aus allen Beobachtungen geschlossene Werth wird =  $\frac{\sum q \cdot C}{\sum C}$  sein, indem die Summen-Zeichen auf alle  $q$  und  $C$  ausgedehnt werden. Dieses Verfahren besteht im Grunde darin, daß man den Refractions-Coefficienten aus einer Strahlenbrechung sucht, welche der Summe der einzeln beobachteten Strahlenbrechungen gleich wäre und einem Winkel der Verticalen correspondirte, der so groß ist wie alle einzelnen  $C$  zusammen genommen.

Aus Herrn Sabler's und meinen gleichzeitigen reciproken Beobachtungen entsteht folgende Tabelle, wo C den Winkel der Verticalen,  $\rho$  den Refractions-Coefficienten und r die Refraction selbst bedeuten.

1ste heftige Unruhe.			1ste Unruhe.			1ste schwache Unruhe.			Ruhe der Silber.			2te schwache Unruhe.			2te Unruhe.			2te heftige Unruhe.		
C	$\rho$	r	C	$\rho$	r	C	$\rho$	r	C	$\rho$	r	C	$\rho$	r	C	$\rho$	r	C	$\rho$	r
127"	-0,03	-3,7	67"	-0,16	-11,0	83"	+0,02	+1",9	126,2	+0,083	+ 10,5	134"	+0,17	+22,6	127"	+0,13	+16,4	134"	+0,32	+43,2
100	-0,31	30,6	115	-0,12	-14,3	258	+0,00	+ 0,6	126,2	0,118	15,0	67	0,14	9,5	67	0,42	28,8	100	0,53	53,3
115	-0,35	40,9	187	+0,03	+ 6,5	120	+0,00	+ 0,2	83,7	0,040	3,3	110	0,19	19,4	140	0,18	26,1	115	0,70	80,9
90	-0,29	26,2	112	-0,06	- 6,5	90	-0,01	- 1,1	83,7	0,107	9,0	258	0,15	37,8	56	0,34	18,7	90	0,45	41,8
147	-0,01	1,0	111	+0,02	+ 2,0	107	-0,01	- 1,6	126,7	0,055	6,9	115	0,23	26,2	90	0,29	26,1	90	0,32	28,5
107	-0,03	3,7	56	-0,02	- 1,2	137	+0,03	+ 3,6	134,0	0,096	12,9	120	0,20	24,4	204	0,11	29,9	115	0,75	86,5
111	-0,06	6,1	172	-0,01	- 2,4	137	+0,06	+ 7,5	67,4	0,048	3,3	187	0,10	19,8	89	0,30	27,2	129	+0,30	+39,0
172	-0,13	22,5	140	-0,02	- 2,2	87	+0,06	+ 4,9	258,4	0,110	28,6	147	0,10	15,0	94	0,31	29,6			
174	-0,10	16,4	172	-0,01	- 2,2	112	-0,02	- 2,2	120,0	0,026	3,1	104	0,16	16,0	93	0,17	16,3			
81	-0,03	2,5	174	-0,07	-12,5	172	+0,05	+ 6,8	120,0	0,131	15,7	107	0,16	17,3	98	0,18	17,2			
108	-0,16	17,5	189	+0,04	+ 6,8	140	+0,00	+ 0,3	186,6	0,066	12,3	104	0,12	13,0	226	0,15	34,6			
127	-0,12	14,8	97	-0,03	- 3,1	137	+0,03	+ 4,2	146,8	0,120	17,7	87	0,30	26,0	108	0,14	14,8			
131	-0,16	21,3	192	+0,01	- 2,4	100	-0,02	- 2,2	146,8	0,119	17,5	111	0,16	17,5	131	0,20	26,2			
89	-0,03	2,7	192	+0,04	+ 6,9	100	+0,03	+ 3,2	103,6	0,036	3,7	172	0,15	25,7	148	+0,15	+22,1			
144	-0,19	27,6	81	-0,01	- 1,0	100	+0,07	+ 7,3	103,6	0,082	8,5	189	0,15	29,4						
107	-0,17	18,4	85	-0,16	-13,7	97	+0,04	+ 4,2	106,6	0,047	5,1	134	0,21	17,4						
107	-0,15	16,1	85	-0,11	- 8,9	97	+0,03	+ 2,4	140,2	0,121	17,0	90	0,15	13,0						
93	-0,11	10,1	138	+0,06	+ 8,6	85	-0,01	- 1,4	104,3	0,103	11,0	81	0,24	19,5						
118	-0,22	26,2	127	+0,03	+ 3,8	108	-0,00	- 1,0	104,3	0,106	11,1	81	0,24	21,2						
132	-0,08	10,0	127	-0,03	- 3,3	127	+0,04	+ 5,0	137,1	+ 0,067	+ 9,2	137	+0,09	+12,3						

1ste heftige Unruhe.	1ste Unruhe.	1ste schwache Unruhe.	Ruhe der Bilder.	2te schwache Unruhe.	2te Unruhe.	2te heftige Unruhe.
C e r	C e r	C e r	C e r	C e r		
134"-0,21 23,4	140"+0,04+ 5,2	127"+0,05+ 6,3	86,8 + 0,079 + 6,8	178"+0,13+ 22,6		
142-0,04 5,5	128+0,01+ 1,7	131-0,02- 2,6	112,0 0,077 8,6	181 0,14 24,5		
119-0,07- 8,0	128+0,02+ 3,2	140+0,05+ 6,5	112,0 0,130 14,5	206 0,10 20,4		
	120+0,04+ 4,4	87-0,03- 3,7	56,0 0,166 9,3	77 0,13 10,3		
	107-0,08- 8,9	87+0,01+ 1,0	172,5 0,083 14,3	218 0,12 26,2		
	181+0,04+ 7,9	73-0,02- 1,6	140,0 0,127 17,7	227 0,13 29,0		
	97-0,06- 6,0	73-0,02- 1,1	172,0 0,080 13,7	89 0,21 19,0		
	91-0,02- 2,0	107+0,07+ 7,9	173,9 0,022 3,8	144 0,16 24,4		
	190+0,04+ 7,2	180+0,05+ 8,7	173,9 0,104 18,1	116 0,13 15,3		
	218-0,01- 2,7	97-0,06- 6,0	123,0 0,113 13,8	117 0,16 15,5		
	227-0,04- 9,8	91+0,01+ 1,3	123,0 0,096 11,8	107 0,20 22,7		
	144-0,12- 17,5	91+0,04+ 3,5	123,0 0,120 14,7	107 0,17 17,9		
	107-0,02- 1,7	77+0,05+ 3,7	189,4 0,053 11,8	103 0,19 19,9		
	94-0,11- 14,8	190+0,05+ 9,2	189,4 0,091 17,3	103 0,18 18,5		
	139-0,05- 6,8	227-0,03- 6,9	136,9 0,109 15,0	93 0,10 9,2		
	57-0,04- 2,5	116-0,04- 4,2	136,9 0,127 17,4	118 0,13 15,2		
	88-0,06- 5,4	110-0,05- 5,6	97,4 0,050 4,8	129 0,22 28,1		
	134-0,03- 4,7	103+0,01+ 0,8	191,6 0,064 12,2	115 0,26 29,9		
	127-0,18- 22,6	94-0,03- 2,8	191,6 0,084 16,2	132 0,26 34,6		
	96-0,04- 3,7	107-0,04- 4,3	108,2 0,113 12,5	150 0,26 38,9		
	112-0,07- 7,8	139+0,01+ 1,8	108,2 0,164 18,0	68 0,11 8,0		
	68-0,03- 2,0	129+0,08+ 9,8	53,0 + 0,120 + 6,5	82+0,07+ 5,6		

1ste heftige Unruhe.	1ste Unruhe.	1ste schwache Unruhe.	Ruhe der Bilder.	2te schwache Unruhe.	2te Unruhe.	2te heftige Unruhe.
	C e r	C e r	C e r	C e r		
	140"-0,10-14,0	88"+0,00+ 0,3	133,3 + 0,085 + 11,7	68"+0,11+ 8,0		
	144-0,03- 4,4	132+0,03+ 4,4	127,5 0,053 6,8	82 0,07 5,6		
	103-0,07- 7,3	150-0,03- 4,5	126,9 0,091 11,6	89 0,06 5,4		
	175-0,02- 3,1	112+0,00+ 0,2	131,2 0,123 16,1	76 0,05 4,0		
	104-0,11-11,2	68+0,01+ 0,5	140,4 0,082 11,4	107 0,06 6,9		
	108-0,06- 6,9	110+0,02+ 2,2	127,5 0,027 3,4	144 0,08 12,3		
	119+0,04+ 5,4	82+0,00+ 0,4	127,5 0,088 11,3	136+0,17+23,6		
	129+0,03+ 3,4	142-0,00- 0,9	177,7 0,083 14,8			
	129+0,00+ 0,7	89-0,03- 1,8	127,8 0,047 6,0			
		140+0,02+ 2,4	127,8 0,095 12,1			
		76-0,03- 2,5	120,1 0,049 5,9			
		107-0,00- 0,5	120,1 0,063 7,6			
		102+0,00+ 0,0	98,7 0,073 7,2			
		103+0,02+ 1,8	98,7 0,077 7,5			
		175+0,03+ 4,5	98,7 0,080 7,9			
		136+0,07+10,0	72,8 0,074 5,3			
		104-0,00- 0,2	106,9 0,055 7,9			
		132-0,02- 2,3	106,9 0,141 15,6			
		82-0,04- 3,1	130,9 0,067 12,1			
		139+0,04+ 5,8	97,5 0,021 2,0			
		148+0,05+ 7,0	206,0 0,090 18,5			
		118-0,01- 0,8	206,0 + 0,100 + 20,6			

1ste heftige Unruhe.	1ste Unruhe.	1ste schwache Unruhe.	Ruhe der Bilder.	2te schwache Unruhe.	2te Unruhe.	2te heftige Unruhe.
			<b>C</b>			
			<b>e</b>			
			<b>r</b>			
			204,0 + 0,048 + 9,8			
			77,0 0,104 7,9			
			190,0 0,062 11,8			
			190,0 0,099 18,9			
			116,0 0,106 12,3			
			116,0 0,008 0,9			
			103,2 0,052 5,4			
			103,2 0,147 15,1			
			94,4 0,023 2,2			
			94,4 0,002 0,2			
			103,3 0,106 10,9			
			138,7 0,139 19,0			
			118,2 0,039 4,6			
			128,9 0,158 20,4			
			57,0 0,054 3,1			
			57,0 0,133 7,6			
			87,9 0,105 9,2			
			150,3 0,053 7,9			
			134,0 0,045 5,9			
			126,5 0,078 9,8			
			95,7 0,118 11,4			
			112,1 + 0,100 + 11,2			

1ste heftige Unruhe.	1ste Unruhe.	1ste schwache Unruhe.	Ruhe der Silber.	2te schwache Unruhe.	2te Unruhe.	2te heftige Unruhe.
	0,083	0,072	<b>c</b>			
			<b>e</b>			
			<b>r</b>			
			87,8 + 0,105 + 9,2			
			87,8 0,088 7,8			
			87,8 0,071 6,3			
			109,8 0,045 5,0			
			109,8 0,100 11,0			
			82,9 0,001 0,8			
			142,2 0,080 11,2			
			89,2 0,020 4,5			
			140,0 0,083 12,5			
			76,0 0,011 0,8			
			107,3 0,028 5,0			
			102,2 0,103 10,5			
			102,2 0,122 12,5			
			144,2 0,044 6,3			
			103,3 0,116 12,0			
			97,9 0,048 4,8			
			97,9 0,109 10,7			
			175,3 0,162 23,3			
			156,1 0,143 20,1			
			104,4 0,069 7,3			
			226,2 0,045 10,1			
			226,2 + 0,102 + 23,0			

TRU Rechner

1ste heftige Unruhe.	1ste Unruhe.	1ste schwache Unruhe.	Ruhe der Bilder.	2te schwache Unruhe.	2te Unruhe.	2te heftige Unruhe.																																				
			<table border="0"> <tr> <td>C</td> <td>q</td> <td>r</td> </tr> <tr> <td>108,4</td> <td>+ 0,085</td> <td>+ 19,2</td> </tr> <tr> <td>151,8</td> <td>0,092</td> <td>12,2</td> </tr> <tr> <td>119,1</td> <td>0,159</td> <td>19,1</td> </tr> <tr> <td>82,4</td> <td>0,059</td> <td>3,2</td> </tr> <tr> <td>82,4</td> <td>0,113</td> <td>9,3</td> </tr> <tr> <td>139,4</td> <td>0,098</td> <td>13,7</td> </tr> <tr> <td>139,4</td> <td>0,145</td> <td>20,2</td> </tr> <tr> <td>147,9</td> <td>0,063</td> <td>9,3</td> </tr> <tr> <td>118,5</td> <td>0,051</td> <td>6,1</td> </tr> <tr> <td>118,5</td> <td>0,102</td> <td>12,2</td> </tr> <tr> <td>284,0</td> <td>+ 0,001</td> <td>+ 26,2</td> </tr> </table>	C	q	r	108,4	+ 0,085	+ 19,2	151,8	0,092	12,2	119,1	0,159	19,1	82,4	0,059	3,2	82,4	0,113	9,3	139,4	0,098	13,7	139,4	0,145	20,2	147,9	0,063	9,3	118,5	0,051	6,1	118,5	0,102	12,2	284,0	+ 0,001	+ 26,2			
C	q	r																																								
108,4	+ 0,085	+ 19,2																																								
151,8	0,092	12,2																																								
119,1	0,159	19,1																																								
82,4	0,059	3,2																																								
82,4	0,113	9,3																																								
139,4	0,098	13,7																																								
139,4	0,145	20,2																																								
147,9	0,063	9,3																																								
118,5	0,051	6,1																																								
118,5	0,102	12,2																																								
284,0	+ 0,001	+ 26,2																																								

Wahrscheinliche Resultate:

- 0,129	- 0,027	+ 0,013	+ 0,0875	+ 0,153	+ 0,204	+ 0,479
---------	---------	---------	----------	---------	---------	---------

Aus anseher Tabelle ergibt sich der wahrscheinliche Refractions-Coefficient für die Zeit der ruhigen Bilder am Nachmittage = + 0,088. Berechnet man damit für jedes C der Reihe der ruhigen Bilder die Refractionen, und vergleicht mit ihnen diejenigen, welche wirklich aus den gegenseitigen und gleichzeitigen Beobachtungen unter der Hypothese der Gleichheit der Strahlenbrechung an beiden Endpunkten folgen, so wird man alle Abweichungen bekommen, welche theils durch die verschiedenen Lokalumstände, theils durch die zufälligen Fehler verursacht sind. Die Summe der Quadrate dieser Abweichungen ist = 2436; ihre Anzahl 119; also das mittlere Quadrat der Abweichung =  $\frac{2436}{118} = 20,6$  und die mittlere Abweichung =  $\sqrt{20,6} = + 4'',5$ ; folglich die wahrscheinliche Abweichung =  $4'',5 \times 0,6747 = 3'',04$ . Man kann aber annehmen daß die Unterschiede zwischen den Lokal-Refractionen bei den gegenseitigen und gleichzeitigen Messungen und denjenigen Refractionen, welche nach der Hypothese der Gleichheit an den beiden Endpunkten aus den Beobachtungen selbst abgeleitet werden, im Durchschnitt Größen von derselben Ordnung sein müssen als jene wahrscheinliche Abweichung, weil beide durch ähnliche Ursachen hervorgebracht sind; man kann sogar behaupten, daß solche Unterschiede kleiner sind, da die angenommenen Refractionen doch von den Lokalitäten an den beiden Enden afficirt sind, und vielleicht von den wahren Refractionen nur um die Hälfte der Differenz zwischen den an den beiden Endpunkten stattfindenden Refractionen abweichen. Dennoch nehme ich diesen Unterschied =  $3'',04$  an, in sofern er sowohl von den zufälligen Beobachtungsfehlern, als auch von den Lokalitäten abhängt. Die mittlere Entfernung der Punkte, zwischen welchen beobachtet wurde, ist = 143640 Engl. Zoll ( $C = 118''$ ) und solcher Linien haben wir 224 gehabt; wäre also jede wahre Zenithdistanz um  $5'',0$  fehlerhaft, so wird das Endresultat um  $\sqrt{224} (143640)$ . Sin.  $3'' = 31,5$  Engl. Zoll unrichtig, weil aber in einigen wenigen Stationen nur bei nicht völliger Ruhe der Bilder beobachtet werden konnte und einige Mal nicht gleichzeitige und gegenseitige Messungen Statt fanden, was übrigens äußerst selten (3mal bei 224 Stationen) vorkam, so muß der Endfehler um etwas größer angenommen werden, etwa = 36 Zoll, wobei das Verhältniß (4 : 3) der Genauigkeit der Beobachtungen bei völliger Ruhe und bei schwacher Unruhe der Bilder, mit Berücksichtigung der Anzahl derjenigen Stationen wo nicht vollkommene Ruhe Statt fand, zum Grunde gelegt wurde. Man wird vielleicht mit Recht einwenden können, daß die Voraussetzung der Gleichheit der Refractionen an beiden Endpunkten bei reciproken Messungen andere Fehler verursachen müsse, wenn die Signale längst der Operationslinie nicht gleich weit von einander vertheilt sind. Um dann die Fehler der Resultate zu ermitteln, muß man alles nicht von den Refractionen selbst, sondern von ihren Coefficienten abhängig machen.

Es seien in dem Punkte B die Zenithdistanz z des Puncts P beobachtet; z' die Zenithdistanz von B, welche man aus P gleichzeitig gemessen hat; Az und Az' die zufälligen Fehler in z und z'; r die Refraction in Secunden, so wie sie nach der Annahme der Gleich-

heit der Strahlenbrechungen an B und P unmittelbar aus der Rechnung, bei der Unbekanntheit von  $\Delta z$  und  $\Delta z'$  folgt;  $r + \Delta r$ ,  $r' + \Delta r'$  die wahren Refractionen in B und P; dann wird

$$z + \Delta z + r + \Delta r + z' + \Delta z' + r' + \Delta r' = 180^\circ + C.$$

$r$  aber ist  $= \frac{180 + C - (z + z')}{2}$ ; und wenn man den Höhenunterschied  $\gamma$

dann nach der Formel:

$$\gamma = \frac{D' \sin. \frac{1}{2} (z' - z)}{\cos. \frac{1}{2} (z' - z + C)}$$

berechnet, so entsteht offenbar in  $\gamma$  ein Fehler, welcher sehr nahezu

$$= D' \sin. 1'' \cdot \left( \frac{\Delta z' - \Delta z + \Delta r' - \Delta r}{2} \right)$$

ist, oder wenn man nur im Durchschnitte die numerische Größe von  $\Delta z$ ,  $\Delta z'$ ,  $\Delta r$ ,  $\Delta r'$  kennt, nicht aber die Vorzeichen,

$$= \frac{D' \sin. 1''}{2} \sqrt{\Delta z^2 + \Delta z'^2 + \Delta r^2 + \Delta r'^2}$$

$$= \frac{M \cdot C \cdot \sin. 1''}{2} \sqrt{\Delta z^2 + \Delta z'^2 + (\Delta Q^2 + \Delta Q'^2) C^2} \dots (a)$$

wo  $\Delta Q \cdot C = \Delta r$ ,  $\Delta Q' \cdot C = \Delta r'$  und  $M = 1219$  Engl. Zoll, welche einer Secunde des größten Kreises der Erdfugel entsprechen. Es ist leicht einzusehen, daß auch in den berechneten Refractions-Coefficienten zugleich ein Fehler

$$= \frac{1}{2C} \sqrt{\Delta z^2 + \Delta z'^2 + (\Delta Q^2 + \Delta Q'^2) C^2}$$

entsteht. Setzen wir im Durchschnitte  $\Delta Q = \Delta Q'$  der Größe nach, so wird der letztgenannte Fehler

$$= \sqrt{\frac{\Delta z^2 + \Delta z'^2}{4C^2} + \frac{\Delta Q^2}{2}}$$

Die wahrscheinlichen Größen von  $\Delta z$  und  $\Delta z'$  sind  $2'',1$  und  $1'',1$ ; die mittleren  $3'',3$  und  $1'',6$ . Man kann die Fehler der Refractions-Coefficienten nach den Abweichungen der jedesmaligen Coefficienten von der wahrscheinlichen Größe derselben schätzen. Aber, ebenso wie die Coefficienten, werden auch ihre Abweichungen desto mehr von den zufälligen Fehlern afficirt, je näher einander die Beobachtungsorter sind. Dieselben Gewichte, welche für die Coefficienten gelten, gehören auch den Fehlern derselben an; wir haben für die Einheit des Gewichts  $C = 100''$  angenommen; aus unserer Tabelle bekommen wir die Quadrate der Abweichungen der dort gegebenen Refractions-Coefficienten von ihrer wahrscheinlichen Größe, multipliciren wir jedes Quadrat mit seinem respectiven Gewichte, so erhalten wir für die Summe dieser Produkte  $\frac{19385}{(4000)^2}$ , und für die Summe der Gewichte  $145,67$ ; also das mitt-

lere Quadrat wird

$$\frac{195835}{144,67 (1000)^2} = \frac{1540}{(1000)^2} = \frac{\Delta z^2 + \Delta z'^2}{4 C^2} + \frac{\Delta \rho^2}{2}$$

Nun ergibt sich aber aus unserer Tabelle im Durchschnitt das mittlere Quadrat

$$\frac{\Delta z^2 + \Delta z'^2}{4 C^2} = \frac{(3,5)^2 + (1,6)^2}{4 C^2} = \frac{285}{(1000)^2};$$

folglich  $\frac{\Delta \rho^2}{2} = \frac{1055}{(1000)^2}$  und  $\frac{\Delta \rho}{\sqrt{2}} = \pm 0,0325$

wahrscheinliche  $\frac{\Delta \rho}{\sqrt{2}} = \pm 0,0325 \times 0,6745 = \pm 0,0219$ ; wahrscheinl.  $\Delta \rho = \pm 0,031$

Unsere Hauptresultate beruhen meistens auf den Beobachtungen zur Zeit der Ruhe der Bilder; aber ich muß im Allgemeinen sagen, daß unter 5 Stationen eine war, wo nur bei fast ruhigen, wenigstens sehr schwach unruhigen Bildern beobachtet wurde; die Fehler im ersten Falle verhalten sich zu den Fehlern im zweiten im Mittel wie 3 : 4. Daher kann man

im Ganzen  $\frac{\Delta \rho}{\sqrt{2}} = \pm 0,0232$  als wahrscheinlichen Werth voraussetzen.

Im Bezug auf die gegenseitigen Entfernungen der Messungspuncte, müssen wir im Durchschnitt folgendes annehmen:

		correspond. $\frac{\Delta \rho}{\sqrt{2}}$
20. (= N) Stationen entspricht ein Winkel der Verticalen =	47" = C	1",1
24 — — — — —	77"	1",8
72 — — — — —	97"	2",2
70 — — — — —	125	2",9
39 — — — — —	158	3",6
13 — — — — —	193	4",4
6 — — — — —	239	5",5

Nehmen wir den wahrscheinlichen Fehler  $\Delta z = 2",1$ ,  $\Delta z' = 1",1$ , so bekommen wir somit für den wahrscheinlichen Endfehler der Nivelirung

$$\sqrt{\Sigma M^2 C^2 \text{Sin.}^2 1'' \left( \frac{\Delta z^2 + \Delta z'^2}{4} + \frac{\Delta \rho^2 C^2}{2} \right) N} = \pm 43 \text{ Engl. Zoll} = \pm 3,5 \text{ Fuß}$$

also können wir einigermaßen mit Recht behaupten, daß unsere Bestimmung des Höhenunterschiedes zwischen dem Asowschen und Caspischen Meere, welche aus gegenseitigen und gleichzeitigen Beobachtungen folgt, nicht leicht über 3,5 Engl. Fuß fehlerhaft sein kann.

Betrachten wir jetzt die andere zur Beseitigung der Refraction angewandte Methode, bei welcher aus einer mittlern Station nach zwei vorwärts und rückwärts liegenden Signalen gemessen wurde, so werden wir den wahrscheinlichen Fehler in dem Endresultate aller Beobachtungen nach folgender Formel finden:

$$\text{wahrscheinl. Fehler} = \sqrt{\Sigma M^2 C^2 \text{Sin.}^2 1'' (Az^2 + Aq^2 \times C^2) N}$$

wo sich das Summen-Zeichen  $\Sigma$  wieder auf alle oben gegebenen  $N$  und  $C$  bezieht. Weil nun aus früher erwähnten Gründen  $Az = 2'',1$  und  $Aq = 0,033$  angenommen werden muß, so bekommt man für den wahrscheinlichen Fehler des Endresultats dieser Methode

$$\sqrt{3873} = + 62,4 \text{ F.} = 5,2 \text{ F.}$$

Man kann übrigens die Richtigkeit dieser Fehler noch auf eine etwas andere Weise prüfen; vergleichen wir nämlich durch die Bank die Höhenbestimmungen, welche man bei jeder Station sowohl zur Zeit der Unruhe, als der Ruhe der Bilder erhalten hat, unter einander, so ersehen wir, daß trotz der verschiedenartigsten Umstände, alle Bestimmungen, die während der Ruhe der Bilder gemacht sind, sehr befriedigend übereinstimmen, dagegen die, welche bei merklichem Schwanken der Objecte gefunden sind, oft untereinander sehr bedeutend differiren, und ich glaube mich nicht sehr zu irren, wenn ich annehme, daß die gegenseitigen Abweichungen der Angaben, welche während der Ruhe und Unruhe gewonnen sind, in der Regel nicht kleiner sein können, als die Abweichungen der im Zustande der Ruhe der Bilder ermittelten Bestimmungen von ihrem wahren Werthe. Indem ich in der Rechnung alle Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt hatte, ergab sich, daß in dem Resultate, welches sich auf die reciproken und gleichzeitigen Beobachtungen gründet, ein Fehler von 4 Fuß, und in dem Resultate, nach unserer zweiten Methode die Refractionen zu berücksichtigen, ein Fehler = 6 Fuß der Wahrscheinlichkeit nach angenommen werden kann.

Jetzt können wir unsere Resultate über den Höhenunterschied des Caspischen und Asowschen Meeres mit dem Grade der ihnen zukommenden Sicherheit angeben. Es findet sich nämlich, daß das Asowsche Meer höher als das Caspische ist, und zwar, wenn man die ruhigen Säge allein betrachtet:

um 78,1 Fuß nach der Methode der gegenseitigen und gleichzeitigen Messungen der Zenithdistanzen, mit dem wahrscheinlichen Fehler von 3,5 F.

um 82,5 Fuß nach der Methode der Beobachtungen aus der Mitte, mit dem wahrscheinlichen Fehler von 5,2 F.

Man sieht also, daß die Differenz der einzelnen Bestimmungen ziemlich in den Grenzen der wahrscheinlichen Fehler liegt. Wären die Bestimmungen von einander unabhängig, dann müßten ihre Gewichte den Quadraten ihrer Fehler umgekehrt proportional sein; das ist aber bei uns nicht der Fall; eine Hälfte der Beobachtungen, welche dem 2ten Resultate zum Grunde liegt, ist auch bei der Berechnung des ersten Resultats benutzt. Wenn man aber bedenkt, daß die zufälligen Fehler nur einen kleinen Antheil an der Unrichtigkeit der Resultate haben und der Einfluß der Unsicherheit in der Refraction viel bedeutender ist; daß auch ferner außer der obengenannten Reihe von Beobachtungen noch andere Reihen aus den mittleren Stationen zwischen zwei vorwärts und rückwärts liegenden Mes-

sungspuncten, von den Herren S a b l e r und F u ß ausgeführt, da sind, die ebenso ungefähr 83 Fuß für den Höhenunterschied der Oberflächen beider Meere geben, so glaube ich die oben angezeigten Fehler der Endresultate nur als Fehler beider Combinations-Methoden zur Beseitigung des Einflusses der Refraction annehmen zu dürfen, und man wird wohl bei der Zusammenziehung der Resultate ihre Gewichte als umgekehrt proportional den Quadraten der Fehler betrachten können, ohne sich viel geirrt zu haben. Uebrigens ist es, theoretisch betrachtet, leicht einzusehen, daß die beiden Methoden bei gleichen Umständen gleich gut ihrem Zwecke entsprechen, indem die eine nicht mehr leistet, als die andere geleistet hätte, wenn die Distanzen zwischen den Signalen um die Hälfte kleiner gewesen wären.

Unsere Hauptsignale haben im Durchschnitt eine etwas höhere Lage als die Basis-signale, und um einigermaßen den Gang der Refractionen an beiden Endpuncten bei den gleichzeitigen reciproken Messungen zu übersehen, habe ich die aus diesen Beobachtungen geschlossenen Höhenunterschiede mit den scheinbaren an beiden Enden verglichen, und es war leicht zu bemerken, daß die Zunahme der Refraction an den flach liegenden Basisignalen in der Regel bedeutender war, als an den Hauptsignalen. Betrachten wir in dem Laufe unserer Operationslinie die Signale der Reihe nach, so finden wir in 110 Fällen, daß die wahren Höhenunterschiede der Hauptsignale und der rückwärts gelegenen Basispuncte von der 1sten bis zur 2ten Unruhe in 55 Fällen um ihre mittlere Größe schwankend sind, wo die Abweichungen den zufälligen Fehlern zugeschrieben werden können; in 41 Fällen nach einem bestimmten Sinne zunehmen, indem die Höhenunterschiede bei der 1sten Unruhe kleiner ausfallen, als bei der 2ten, und endlich in 14 Fällen das Gegentheil Statt findet. Die Beobachtungen an den vorwärts gelegenen Basen müssen das Nämlische zeigen. Aber weil gerade die Hauptsignale symmetrisch in der Mitte zwischen zwei Basen lagen, so geht daraus hervor, daß in den Niveauunterschieden der Basis-signale die Wirkungen der so eben erwähnten Umstände im Durchschnitt wenn nicht ganz aufgehoben, wenigstens sehr geschwächt werden müssen; überhaupt wird jeder konstante Fehler, er mag eine Ursache haben, welche er wolle, wenn er nur in den Beobachtungen bei den symmetrisch in der Mitte zwischen zwei Basen gelegenen Hauptsignalen Statt findet, eben so unschädlich werden, nur werden die Refractions-Coefficienten etwas an Genauigkeit verlieren.

Unsere zweite Methode, die Refractionen zu eliminiren besteht darin, daß man von einem mittleren Standpuncte aus für denselben Zeitpunkt die Zenithdistanzen zweier gleich weit nach beiden Seiten liegenden Signale mißt. Erwägen wir nun die Fehler-Quellen dieser Methode, so werden wir allerdings bekennen, daß die hauptsächlichste derselben davon herrührt, daß in manchen Fällen die Gleichheit der Refractions-Coefficienten nach allen Seiten nicht Statt findet; aber dieser Umstand ist mehr oder weniger auch der andern Methode eigen, indem bei den gleichzeitigen und reciproken Messungen die Annahme der Gleichheit der Strahlenbrechung an beiden Endpuncten ebenso problematisch ist. Wir haben übrigens schon erwähnt, wie jener Uebelstand durch die Benützung der wahrscheinlichen den verschiedenen Zuständen der Ruhe der Bilder entsprechenden Refractions-Coefficienten vermindert werden kann.

Die zweite der Methode eigenthümliche Fehler-Quelle ist die, daß die Lokalitäten häufig nicht erlaubten, die mittleren Standpuncte genau genug in die Mitte zwischen zwei andere Signale zu setzen; wie groß dieser Fehler sein kann, wäre leicht zu bestimmen, und ich bin gewiß, daß er allein bei uns nicht viel ausmachen wird. Die Methode, von welcher wir jetzt reden, beruht noch auf der Voraussetzung, daß die Veränderungen in der Refraction der Zeit proportional gehen, und wir wollen sehen, was für Fehler aus dieser Voraussetzung entstehen können, indem wir dabei annehmen wollen, daß sowohl die Entfernung zwischen zwei Hauptsignalen  $P_n, P_{n+1}$  genau am Basisignal  $\beta_n$  in zwei gleiche Hälften getheilt wird, als auch daß die Refraction für jede bestimmte Zeit nach beiden Seiten gleich ist. Es seien folgende Ablesungen gemacht:

in der Lage I.	}	a	bei der Einstellung nach $P_n$			zu der Zeit T		
des Verticalkreises		$\alpha$	—	—	—	$P_{n+1}$	—	$T+t$
in der Lage II.	}	$\beta$	—			$P_{n+1}$	—	$T+2t$
		b	—	—	—	$P_n$	—	$T+3t$

es sei noch  $q$  der Refractions-Coefficient, welcher dem Zeit-Momente  $T = \frac{T+(T+3t)}{2}$

oder  $\frac{(T+t) + (T+2t)}{2}$  correspondirt;  $\Delta', \Delta'', \Delta''', \dots$  die für die Epoche T und Zeitintervalle t geltenden ersten, zweiten, dritten u. Differenzen des Refractions-Coefficienten  $q$  dann werden wir folgende von Refractionen befreite Ablesungen haben:

in der Lage I.

$$\text{für } P_n \quad a + qC + \left( -1,5t \Delta' + \frac{1,5t(1,5t+1)}{2} \Delta'' - \frac{1,5t(1,5t+1)(1,5t+2)}{6} \Delta''' + \dots \right) C$$

$$\text{für } P_{n+1} \quad a + qC + \left( -0,5t \Delta' + \frac{0,5t(0,5t+1)}{2} \Delta'' - \frac{0,5t(0,5t+1)(0,5t+2)}{6} \Delta''' + \dots \right) C$$

in der Lage II.

$$P_{n+1} \quad \beta - qC - \left( 0,5t \Delta' + \frac{0,5t(0,5t-1)}{2} \Delta'' + \frac{0,5t(0,5t-1)(0,5t-2)}{6} \Delta''' + \dots \right) C$$

$$P_n \quad b - qC - \left( 1,5t \Delta' + \frac{1,5t(1,5t-1)}{2} \Delta'' + \frac{1,5t(1,5t-1)(1,5t-2)}{6} \Delta''' + \dots \right) C$$

Daraus folgen die wahren Zenithdistanzen  $\left. \begin{array}{l} \text{von } P_n \\ \text{von } P_{n+1} \end{array} \right\}$

$$z = \frac{a-b}{2} + Cq + \frac{(1,5t)^2 \Delta''}{2} - \frac{(1,5t)^2}{2} \Delta''' + \dots$$

$$z = \frac{a-\beta}{2} + Cq + \frac{(0,5t)^2 \Delta''}{2} - \frac{(0,5t)^2}{2} \Delta''' + \dots$$

Die Differenz dieser Zenithdistanzen wird also

$$= \frac{a-\beta}{2} - \frac{a-b}{2} - t^2 (\Delta'' - \Delta''') \dots \text{ sein.}$$

Wären die 2ten Differenzen constant, oder  $\Delta''' = 0$  von der Zeit der ersten bis zur zweiten Unruhe, so müßten die Resultate aus allen Sätzen untereinander übereinstimmen.

und nur um eine constante Größe, welche von dem Gliede  $t^2$   $A''$  abhängt, fehlerhaft sein; wenigstens könnten die Schwankungen nicht viel die Gränzen der zufälligen Fehler überschreiten. Dies ist aber bei uns nicht der Fall, im Gegentheil haben wir bemerkt, daß die an einem Tage bestimmten Höhenunterschiede sich ziemlich bedeutend, und zwar in einem Sinne ändern; so bekömmt man z. B. aus Beobachtungen in B<sub>16</sub> die Höhenunterschiede P<sub>17</sub>—P<sub>16</sub> = — 173,0 Z. (bei der 1ten Unruhe); = — 166,0 Z. (fast bei der völligen Ruhe); = — 158,0 Z. (bei der II. Unruhe). Also muß das Glied, welches vom Quadrate der Zeit abhängt, sehr veränderlich sein, und da wir meistens nur drei Sätze der Zenithdistanzen haben, so fehlen uns die hinreichenden Data, um über diese Veränderlichkeit etwas sicheres zu sagen; ich glaube aber, daß während der Ruhe der Bilder jenes Glied nahezu = 0 ist, und daher keine erheblichen Fehler verursachen kann; welches mir entschieden zu folgen scheint aus der Uebereinstimmung unserer Reihe mit denjenigen, welche nach gleicher Methode, aber in umgekehrter Ordnung von Herrn Sabler gefunden sind, indem er gleichzeitig von den vorwärts gelegenen Signalen beobachtete, während wir von den rückwärts gelegenen unsere Beobachtungen anfangen. \*)

Nachdem wir die Fehlerquellen der Methode der Beobachtungen aus der Mitte durchgegangen sind, darf ich nicht den großen Vortheil dieser Methode vor der der correspondirenden Beobachtungen unerwähnt lassen. Wenn wir in den Instrumenten jedes Beobachters constante Fehler voraussetzen, so werden sie doch bei der erstgenannten Methode auf den Höhenunterschied zwischen zwei vorwärts und rückwärts liegenden Signalen, keinen Einfluß haben, insofern dieser aus den Messungen der Zenithdistanzen von entgegengesetzten Signalen folgt; bei der zweiten Methode aber verhält sich dies ganz anders. Bei uns, wo in drei verschiedenen Puncten zugleich die correspondirenden Zenithdistanzen gemessen wurden, ist es besonders wichtig, die Ursachen der constanten Fehler bei dem hölligen Theodoliten, mit welchem man immer an beiden äußersten Standpuncten beobachtet hat, scharf zu untersuchen. So z. B. kann schon eine kleine Biegung des Fernrohrs, etwa von dem Werthe eines Bruches der Secunde, mehrere Fuß Unsicherheit im allendlichen Resultate der Nivellirung aus den gleichzeitigen und gegenseitigen Beobachtungen verursachen, und ohne eine solche Untersuchung könnte die Anhäufung der Fehler nur dann vermieden werden, wenn man übereingekommen wäre, jeden der zwei Theodoliten bald bei den vorwärts und bald bei den rückwärts gelegenen Stationen, regelmäßig abwechselnd, zu brauchen, aber obgleich ein ähnliches Verfahren vielleicht das aller sicherste ist, so wird man doch nicht läugnen, daß dies in der Praxis oft große Schwierigkeit

---

\*) Damit will ich nicht sagen, daß keine Fehler entstehen konnten und die Zeiten den Veränderungen der Refraction bei ruhigen Bildern genau proportional wären; mir scheint nur, daß dieser Fehler sehr klein und die davon abhängige Correction der Resultate unsicher sind. Man kann darüber die interessante Abhandlung von Herrn G. v. Fuß im Bulletin scientifique de l'Academie des Sciences de St. Petersburg T. IV. No. 16. nachlesen.

ten hat. Die vollkommene Unabhängigkeit der früher erwähnten Methode sowohl von den constanten Fehlern des Instruments, als auch von anderen Beobachtern, macht sie im höchsten Grade empfehlenswerth.

## Ueber die geographische Lage und die Höhe einiger interessanter Punkte in Caucasiën.

Die riesenhaften Caucassischen Gebirge, welche sich in einer Ausdehnung von ungefähr 100 Meilen erstrecken, sind mehrere Mal mit lebhafter Theilnahme von Naturforschern besucht worden. Schon 1812 hat Herr F. Parrot die Höhe des Kasbeck, und später Herr Akademiker Kupfer die Höhe des Elborus durch barometrische Messungen auszumitteln gesucht; besonders interessant aber waren für uns, wegen der Verwandtschaft mit unseren Arbeiten, die Bestimmungen der Höhe des Elborus, welche Herr Akademiker Wisniewski mit den wenigen Hülfsmitteln, die ihm zu Gebote standen, auf eine schöne Weise und mit großer Genauigkeit erhalten hat. \*) Diese vortrefflichen Arbeiten hätten nichts zu wünschen übrig gelassen, wenn die Erhebung der Beobachtungsorter selbst über dem Meere zuverlässig bestimmt, und die angewandten Refractions-Coefficienten etwas sicherer gewesen wären. Wir haben mehrere Mal längst unserer Operations-Linie die Gelegenheit gehabt, die hauptsächlichsten Spigen der Caucassischen Gebirge zu beobachten und obgleich wir uns nur bis auf 15 Meilen denselben nähern konnten, so hoffe ich doch aus der Totalmasse der Messungen, sowohl die geographische Lage derselben, als auch ihre Höhe mit hinlänglicher Genauigkeit erhalten zu können.

### a) Geographische Lage einiger Punkte in Caucasiën.

Ein Berg erscheint, wenn er aus verschiedenen Punkten gesehen wird, gewiß immer in mehr oder weniger veränderter Gestalt und man wird daher selten genau denselben Punkt wieder treffen können, welchen man früher beobachtet hat. Es entstehen auf diese Weise kleine Unsicherheiten in den Richtungen, welche auf die berechneten Distanzen einen desto größeren Einfluß haben werden, je spitzer und unregelmäßiger die Dreiecke sind, die man gebraucht hat. Ist z. B. ein Berg M aus A und B gemessen und nehmen wir an, daß die Basis AB = m um  $\pm \Delta m$ , die Winkel A und B jeder um  $\pm \Delta A''$  fehlerhaft sind, so wird dadurch in der zu bestimmenden Seite BM = a ein wahrscheinlicher Fehler

$$\Delta a = \pm a \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \text{Sin.}^2 1'' (\text{Cotg}^2 A \cdot \Delta A''^2 + \text{Cotg}^2 (A+B) 2 \Delta A''^2)}$$

entstehen, und hätte man nun einen Berg aus vielen Punkten beobachtet, so bekäme man also durch unmittelbare Auflösung der Dreiecke Bestimmungen von ungleicher Genauigkeit; um

\*) Mésure de la hauteur du mont Elbrus au-dessus du niveau de la mer, par V. Wisniewski; v. les Memoires de l'Academie des Sciences de St. Petersbourg 1816.

dies zu vermeiden und die wahrscheinlichen Resultate zu erhalten, kann man folgendes sehr einfache Verfahren anwenden. Es seien z. B. aus vier bekannten Puncten A, A', A'', A''' die Richtungen zu einem Berge M hin beobachtet; aus dem vortheilhaftesten Dreiecke z. B. A A''' M, bestimmt man zuerst die Distanz A M = r und berechnet in den Dreiecken AA'M, A' A'' M, A'' A''' M nur nahezu die Linien A'M, A''M, A'''M und die sphärischen Excesse, um die Winkel auf die Ebene zu reduciren; dann wird man alles als wirklich in der Ebene liegend, betrachten können. Nehmen wir nun den Anfang der Coordinaten in A, die Linie AA' als Achse der Ordinaten y und eine senkrechte dazu als die Achse der Abscissen x an, so sind die Coordinaten 0, 0; n', m'; n'', m''; n''' m''' und die Richtungen  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $\alpha'''$ , der Linien A'A'', A''A''', gegen die Achse der Ordinaten A A' bekannte Größen; mit den vorläufig angenommenen AM = r und Winkel A'AM =  $\varphi$ , berechnet man nun die genäher- ten Coordinaten  $y = r \cos. \varphi$ ,  $x = r \sin. \varphi$ , und indem alle Winkel auf gleiche Weise von der Linken zur Rechten (von Ost durch Süd) gezählt werden, sucht man mit diesen Datis die Richtungen  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$  der Linien A'M, A''M, A'''M gegen die A'A'', A''A''' und die Ver- längerung von A''A''' nach den Formeln:

$$\text{tang. } (\varphi' + \alpha') = \frac{x}{y-n}; \quad \text{tang. } (\alpha'' + \varphi'') = \frac{x-m'}{y-n'}; \quad \text{tang. } (\alpha''' + \varphi''') = \frac{x-m''}{y-n''}$$

Nennen wir dx, dy die zu bestimmenden Verbesserungen von x und y, so wird die Vergleichung dieser Werthe von  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ , mit dem wirklich beobachteten  $\Psi$ ,  $\Psi'$ ,  $\Psi''$ ,  $\Psi'''$  folgende Ausdrücke zur Ausmittlung von dx und dy geben

$$\Psi - \varphi = \text{Arc. tang. } \frac{x + dx}{y + dy} - \text{Arc. tang. } \frac{x}{y}; \quad \Psi' - \varphi' = \text{Arc. tang. } \frac{x + dx}{y + dy - n} - \text{Arc. tang. } \frac{x}{y - n}$$

u. s. w. Oder:

$$\begin{aligned} (\Psi - \varphi) r \sin. 1'' &= \text{Cos. } \varphi dx - \text{Sin. } \varphi dy; & (\Psi' - \varphi') r' \sin. 1'' &= \text{Cos. } (\varphi' + \alpha') dx - \text{Sin. } (\varphi' + \alpha') dy \\ (\Psi'' - \varphi'') r'' \sin. 1'' &= \text{Cos. } (\varphi'' + \alpha'') dx - \text{Sin. } (\varphi'' + \alpha'') dy; \\ (\Psi''' - \varphi''') r''' \sin. 1'' &= \text{Cos. } (\varphi''' + \alpha''') dx - \text{Sin. } (\varphi''' + \alpha''') dy \end{aligned}$$

wo r, r', r'' r''' respective den Linien AM, A'M A''M A'''M gleich sind.

Behandelt man alle diese Gleichungen nach der bekannten Vorschrift der Methode der kleinsten Quadrate, so bekommt man dadurch die wahrscheinlichen Werthe von dx, dy und die Richtungen werden vollkommen ausgeglichen. Ich habe so gefunden, daß die Richtungen zu den Bergen bis auf 8'' oder 9'' richtig sind.

An einigen Puncten unserer Operations-Linie habe ich mehrere astronomische Beobachtungen angestellt, um daraus die geographische Lage anderer in bekannter Entfernung und Richtung liegender Puncte zu bestimmen; es schien mir am zweckmäßigsten, sowohl die vom berühmten Bessel angegebenen Dimensionen der Erde, als auch seine schöne Methode für die geodätischen Berechnungen, zu benutzen. \*) Ich habe demnach angenommen

\*) Astronomische Nachrichten I. Band; auch Bessel's Gradmessung in Ostpreußen.

die halbe große Achse der Erde = 3271922,1 Toisen = A

Quadrat der Excentricität der Erdmeridiane = 0,00660036 =  $e^2 = \frac{A^2 - B^2}{B^2}$

wo B die halbe kleine Achse ist.

Es sei  $\varphi'$  die beobachtete Polhöhe des Punctes N;  $\alpha'$  der Azimuth des Punctes M aus N gesehen und von Nord nach Ost gerechnet; s die auf des Meeres-Niveau projectirte geodätische Entfernung des N vom M in derselben Einheit ausgedrückt wie A; dann werden die Polhöhe  $\varphi$  des Punctes M, das Azimuth  $\alpha$  von N aus M gesehen und die Längendifferenz  $\omega$  durch folgende Formeln mit aller Schärfe gefunden. Man berechnet zuerst die Hilfsgrößen  $u'$ , m und n

$\text{tang. } u' = \sqrt{1 - e^2} \text{ tang. } \varphi'$ ;  $\text{Cos. } u' \sin. \alpha' = \sin. m$ ;  $\text{Cos. } u' \text{ Cos. } \alpha' = \text{Cos. } m \text{ Cos. } M$ ;  
 $\sin. u' = \text{Cos. } m \sin. M$ .

Mit dem Argumente =  $\log. \frac{e \cos. m}{\sqrt{1 - e^2}}$  sucht man aus den Besselschen Tafeln zur Berechnung der geodätischen Vermessungen (Astr. Nachrichten I. Band) die Log.  $[\alpha]$  und Log.  $[\beta]$  und man hat

$$\sigma = [\alpha] \frac{s}{B} + [\beta] \text{Cos. } (2M + \sigma) \text{Sin. } \sigma + \dots$$

im zweiten Gliede kann man statt  $\sigma$  seinen genäherten Werth  $[\alpha] \frac{s}{B}$  nehmen.

Zur Bestimmung von  $\varphi$ ,  $\alpha$  und  $\omega$  bekommt man endlich die Gleichungen:

$\text{Sin. } u = \text{Cos. } m \sin. (M + \sigma)$ ;  $\text{Cos. } u \text{ Cos. } \alpha = -\text{Cos. } m \text{ Cos. } (M + \sigma)$ ,  $\text{Cos. } u \text{ Sin. } \alpha = -\text{Sin. } m$

$$\text{tang. } \varphi = \frac{\text{tang. } u}{\sqrt{1 - e^2}}; \omega = \frac{e^2 \text{ Sin. } m}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} e^2}} \left\{ [\alpha] \sigma + [\beta] \cos. (2M + \sigma) \text{Sin. } \sigma + \dots \right\}$$

wo die Logarithmen von  $[\alpha']$  und  $[\beta']$  aus den obengenannten Besselschen Tafeln mit dem Argumente  $\log. e \frac{\sqrt{\frac{3}{4} \text{Cos. } m}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} e^2}}$  zu nehmen sind und  $\omega$  aus der Formel

$$\sin. \omega = \frac{\text{Sin. } \sigma \text{ Sin. } \alpha'}{\text{Cos. } u}$$

bestimmt werden muß.

Es wäre weitläufig, hier die Beobachtungen und Rechnungen in Extenso anzuführen, wir werden aber alle Resultate mittheilen.

Ich habe folgende Bestimmungen gemacht:

Polhöhe der Cathedralkirche in Stawropol:

Aus $\alpha$ Ursae minoris	Aus $\alpha$ Orionis aus	Sirius
45° 3' 4",8		
9,0		
6,7		
4,0		
6,5		
7,4	45° 3' 14,5	
15,0	13,0	
9,5	8,5	..... 45° 3' 14",0
im Mittel = 45° 3' 9",4		

Polhöhe des Signals B<sub>70</sub> ... der Kirche in der Kosaken-Staniza Alexandria

aus $\alpha$ Urs. minoris	
44° 15' 58",0	44° 15' 26",9
36,3	
45,0	
Mittel 44° 15' 39",1	

Polhöhe des Signals B<sub>83</sub> ...

der Kirche in der Staniza Jekaterinograd.

aus $\alpha$ Urs. minoris	aus $\alpha$ Aquilae	
43° 45' 45",1	43° 45' 46",4	43° 45' 47",2
50,5	46,6	
im Mittel = 43° 45' 47",1		

Diese Bestimmungen können durch die Reduction der geodätischen Vermessungen controllirt werden, weil in B<sub>83</sub>, unweit von Stawropol, auch in B<sub>70</sub> und in B<sub>83</sub> die Azimuthe beobachtet sind. Die Rechnungen, welche auf jene Vermessung sich beziehen, wurden zwei Mal mit einer doppelten Controlle gemacht, so daß man annehmen muß, daß keine erheblichen Fehler sich eingeschlichen haben. Es wurde gefunden:

Die Größe der Linie B <sub>70</sub> und Stawropolschen Kirche = 5462050 Engl. Z.	} auf des Meeres Niveau project.
B <sub>70</sub> B <sub>83</sub> = 3609280	
Azimuth von der Stawrop. Kirche aus B <sub>70</sub> gesehen = 309° 49' 17"	} von Nord nach Ost.
von B <sub>83</sub> aus B <sub>70</sub> — — = 126 53 27	
Azimuth von B <sub>70</sub> aus der Stawrop. Kirche gesehen = 128° 59' 20"	} von Nord nach Ost.
— — — aus B <sub>83</sub> — — — = 307° 30' 57"	

Reducirt man die Beobachtungen in B<sub>70</sub> auf die Stawropolsche Kirche und auf das Signal B<sub>83</sub>, so finden sich

die berechnete Polhöhe von der

Stawropolschen Kirche = $45^{\circ} 5' 7''{,}9$ ;	von B <sub>83</sub> . . . . = $45^{\circ} 45' 44''{,}0$
die wirklich beobachtete . . <u><math>45^{\circ} 5' 9''{,}4</math></u>	<u><math>45^{\circ} 45' 47''{,}1</math></u>
Abweichung . . . . . + $1''{,}5$	+ $3''{,}1$

Berechnetes Azimuth von B<sub>70</sub>

aus der Stawropolschen Kirche gesehen = $128^{\circ} 52' 15''$ ;	aus B <sub>83</sub> gesehen = $307^{\circ} 31' 25''$
wirklich beobachtetes . . . . . <u><math>128^{\circ} 52' 26''</math></u>	<u><math>307 50 57</math></u>
Abweichung /	+ $13''$ - $26''$ .

Da unseren Azimuthen nur Sonnenbeobachtungen zum Grunde liegen, so könnte man solche Abweichungen wohl erwarten; die Uebereinstimmung der Polhöhen aber scheint hinreichend zu seyn.

Zur Bestimmung der Lage des Elborus habe ich die Richtungen zur westlichen und östlichen Kuppe in Stawropol, in B<sub>70</sub> und A<sub>87</sub> beobachtet, aber die Richtungen in Stawropol sind etwas unsicherer als die auf den anderen Stationen, weil sie zu einer Zeit gemessen wurden als unsere Operationslinie noch nicht bis Stawropol vorgerückt war, und sie sich also auf die Bestimmung des Azimuths beider Kuppen des Elborus gründen, worauf die Fehler der astronomischen Beobachtungen Einfluß haben. Die Richtungen zum Kasbeck habe ich aus B<sub>80</sub>, B<sub>83</sub>, A<sub>87</sub>, B<sub>85</sub> genommen; die zum Beschtau aus P<sub>70</sub>, B<sub>70</sub> und P<sub>75</sub>, und endlich die zu einem Berge, dessen Namen ich nicht erfahren konnte, und welchen ich durch Anonymus bezeichne, aus B<sub>80</sub> und B<sub>83</sub>; in Bezug auf diesen letzten Berg aber sind die Messungen des Herrn Säbler aus P<sub>75</sub> und P<sub>88</sub> mit berücksichtigt worden.

In Stawropol während des Winters 1837 habe ich durch Polaris folgende Bestimmungen gemacht:

Azimuth der westl. Kuppe des Elborus = $169^{\circ} 0' 57''$	}	aus dem Kreuz am Hauptkirchenthurm in Stawropol gesehen und von Nord nach Ost gerechnet.
östl. Kuppe — = $168 59 49$		

In B<sub>70</sub> sind wieder die Azimuthe ausgemittelt und durch Sonnen-Beobachtungen gefunden, daß das

Azimuth der westl. Kuppe = $216^{\circ} 7' 57''{,}5$
östl. — = $215 28 44{,}5$ .

Unabhängig aber von astronomischen Beobachtungen folgt aus der Berechnung der geodätischen Vermessungen

der Winkel SB<sub>70</sub> Ew =  $95^{\circ} 41' 18''{,}5$     SB<sub>70</sub> Eo =  $94^{\circ} 20' 31''{,}5$ ,

wo S die Stawropolsche Kirche, Ew die westliche, Eo die östliche Kuppe des Elborus bezeichnen. Nehmen wir also im Mittel das Azimuth von B<sub>70</sub> aus der Stawropolschen Kirche gesehen =  $128^{\circ} 59' 19''$ , so bilden sich zur Bestimmung der Lage des Elborus folgende sphärische Dreiecke:

$\triangle S B_70 Ew$ Winkel Ew B <sub>70</sub> S = 95° 41' 18",5 Ew SB <sub>70</sub> = 40 8 38,0	} sphärischer Exceß 43",5	$\triangle S B_70 Eo$ Winkel Eo B <sub>70</sub> S = 94° 20' 31",5 Eo SB <sub>70</sub> = 39 47 30,0	} sphärischer Exceß 43",5
---	---------------------------------	--	---------------------------------

gemeinschaftliche Seite S B<sub>70</sub> = 5462030 Engl. Zoll.

$\triangle B_70 A_{87} Ew$ Winkel Ew B <sub>70</sub> A <sub>87</sub> = 96° 27' 26" Ew A <sub>87</sub> B <sub>70</sub> = 43 30 32	} sphärischer Exceß 36",1	$\triangle B_70 A_{87} Eo$ Winkel Eo B <sub>70</sub> A <sub>87</sub> = 95° 48' 23" Eo A <sub>87</sub> B <sub>70</sub> = 45 19 11	} sphärischer Exceß 36",1
--	---------------------------------	--	---------------------------------

gemeinschaftliche Seite B<sub>70</sub> A<sub>87</sub> = 4561410 Engl. Zoll.

Ich gebe den Richtungen, welche aus den in Stawropol angestellten Messungen abgeleitet sind, nur halbes Gewicht, um aber dann alle Beobachtungen ausgleichen zu können, muß ich noch den Verbindungswinkel zwischen den Linien B<sub>70</sub> S und B<sub>70</sub> A<sub>87</sub> angeben; dieser Winkel ist

$$SB_{70} A_{87} = 190^\circ 8' 58''.$$

Alle Winkel sind hier gezählt von Ost durch Süd, von der Linken zur Rechten und beziehen sich auf die höchsten Punkte des Gipfels. Die westliche Kuppe des Elborus hat am westlichen Rande einen sehr gut erkennbaren Punkt, welcher auch der höchste ist, die östliche Kuppe aber ist flach und breit, so daß die Richtungen nach dieser letztern etwas unsicher sind.

Mit diesen Datis bekömmt man die Entfernungen der beiden Kuppen des Elborus von der Stawropolschen Kirche und von unseren Signalen; es ergibt sich auch zugleich

die Polhöhe der westl. Kuppe des Elborus, seine Länge; Aus Stawropolschen Beobach- tungen . . . . . = 43° 21' 23",2 aus den Beobach- tungen in B <sub>70</sub> . . . = 43 21 20,0 im Mittel . . . 43° 21' 21",6	} östl. von Stawropol	die Polhöhe der östl. Kuppe, seine Länge 43° 21' 1",0 43 20 59,0 43 21 0" östl. von Stawropol
--	--------------------------	--

Zur Bestimmung der Lage von Anonymus haben wir:

$$P_{75} B_{80} B_{83} = 215^\circ 2' 14",4; \quad B_{80} B_{83} P_{85} = 177^\circ 5' 31",0$$

und bezeichnen wir den Gipfel von Anonymus durch A<sub>n</sub>, so erhalten wir in den Dreiecken

$$\triangle P_{75} B_{80} A_n$$

$$\triangle B_{80} B_{83} A_n.$$

Winkel B <sub>80</sub> P <sub>75</sub> A <sub>n</sub> = 75° 43' 52" P <sub>75</sub> B <sub>80</sub> A <sub>n</sub> = 84 14 32	} sphärischer Exceß 9",5	Winkel B <sub>83</sub> B <sub>80</sub> A <sub>n</sub> = 128° 47' 43" B <sub>80</sub> B <sub>83</sub> A <sub>n</sub> = 44 24 35	} sphärischer Exceß 3",6
--	--------------------------------	---	--------------------------------

Seite P<sub>75</sub> B<sub>80</sub> = 1438850 Engl. Zoll.

Seite B<sub>80</sub> B<sub>83</sub> = 688710 Engl. Zoll.

$\triangle P_{88} B_{83} A_n$ 

$$\begin{array}{l} \text{Winkel } P_{88} B_{83} A_n = 132^\circ 40' 56'' \\ B_{83} P_{88} A_n = 37 \quad 47 \quad 52 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{sphärischer} \\ \text{Excess} \\ 6'',8 \end{array} \right\}$$

Seite  $P_{88} B_{83} = 1223280$  Engl. Zoll.

Mit diesen Datis bekommt man die Entfernungen des Berges von unseren Signalen und weiß das Azimuth dieses Berges aus  $B_{83}$  gesehen =  $227^\circ 12' 46''$  ist, von Nord nach Ost, so erhält man folgende geographische Lage von Anonymus:

Polhöhe =  $45^\circ 3' 13'',8$ ; Länge =  $1^\circ 13' 32''$  östlich von Stawropol.

Für Kasbeck haben wir erstens die Verbindungswinkel

$$B_{80} B_{83} A_{87} = 176^\circ 8' 12''; B_{83} A_{87} B_{95} = 180^\circ 3' 36''$$

wo die Winkel eben so gerechnet sind wie früher; außerdem sind noch in den Dreiecken

 $\triangle B_{80} B_{83} K$  $\triangle B_{83} B_{87} K$ 

$$\begin{array}{l} \text{Winkel } B_{83} B_{80} K = 69^\circ 57' 58'' \\ B_{80} B_{83} K = 102 \quad 9 \quad 46 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{sphär.} \\ \text{Excess} \\ 3'',9 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Winkel } B_{83} A_{87} K = 92^\circ 48' 22'' \\ A_{87} B_{83} K = 73 \quad 58 \quad 26 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{sphär.} \\ \text{Excess} \\ 8'',8 \end{array} \right\}$$

Seite  $B_{80} B_{83} = 688710$  Engl. 3.Seite  $B_{83} A_{87} = 1080490$  Engl. 3. $\triangle A_{87} B_{95} K$ 

$$\begin{array}{l} \text{Winkel } B_{95} A_{87} K = 87^\circ 15' 13'' \\ A_{87} B_{95} K = 68 \quad 51 \quad 29 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{sphär.} \\ \text{Excess} \\ 14'',7 \end{array} \right\}$$

Seite  $A_{87} B_{95} = 1973800$  Engl. 3.

Mit diesen Datis bekommt man die Entfernung des Kasbeck von unseren Signalen, und mit dem Azimuth vom Kasbeck aus  $B_{83}$  gesehen =  $169^\circ 27' 34''$  von Nord nach Ost bekommt man die Polhöhe vom Kasbeck =  $42^\circ 42' 3'',0$ ; Länge =  $2^\circ 31' 52''$  östlich von Stawropol.

Die Lage und die Entfernungen des kleinen Berges Beschtau, welcher in der Nähe von Piatigorak und unweit der heilsamen Mineralquellen liegt, ergibt sich sowohl aus mehreren Messungen längst unserer Operations-Linie, als auch durch eine Hülfstriangulation, welche zum Behuf einer genauen Höhenbestimmung dieses Berges vorgenommen wurde. Das Azimuth vom Beschtau aus  $B_{70}$  ist =  $235^\circ 11' 53''$  von Nord nach Ost, und es fand sich die Polhöhe vom Beschtau =  $44^\circ 6' 5'',4$ ; Länge =  $1^\circ 2' 8''$  östl. von Stawropol.

**b) Höhenbestimmung einiger Gipfel der Caucassischen Gebirge.**

Die größte, nicht ganz zu beseitigende Schwierigkeit, besteht hier in der Bestimmung der terrestrischen Strahlenbrechung. Obgleich wir immer in der Nähe der Beobachtungsorte die Signale hatten, deren Erhebung und Entfernung genau bekannt waren, so können doch

die dadurch ausgemittelten Refractions-Coefficienten bei der Berechnung der Bergmessungen leider gar nicht angewandt werden, weil die Lichtstrahlen auf ihrem Wege bis zum Signale über dem Erdboden so nahe hinstreifen, daß die Refractions-Coefficienten ganz anders ausfallen müssen, als die, welche für die weit und hoch über den Wolken liegenden Bergspitzen gelten. Um einigermaßen den genäherten Werth dieser Coefficienten zu erhalten, haben wir den nicht weit von unserer Operations-Linie befindlichen kleinen Berg Beschtau benutzt, welcher sich ungefähr 4595 Engl. Fuß über dem Meeres-Niveau erhebt. Bei einer Nebenoperation haben wir auf drei Stellen, welche vom Beschtau in den Entfernungen von 3,5, 2,7 und 1,7 Meilen lagen, gleichzeitig die Zenithdistanzen seines sehr regelmäßigen Bergkegels gemessen, woraus sich dessen Höhe mit größter Schärfe ergibt, da die Refractionen sich ganz eliminiren lassen. Später entfernten wir uns von diesem Berge; aber so lange er sichtbar blieb, haben wir zu gleicher Zeit, sowohl ihn, als auch andere Berge in Bezug auf Zenithdistanzen gemessen, wodurch wir dann nach der bekannten Höhe desselben jedesmal die Refractions-Coefficienten unmittelbar erhalten konnten. Doch betrachte ich die auf diese Weise gewonnenen Höhenbestimmungen nur als die ersten Annäherungen, weil der Beschtau immer verhältnißmäßig zu wenig entfernt und besonders zu niedrig war, um nach diesem Berge die Refractions-Coefficienten bestimmen zu können, welche den 4 oder 5mal höheren Bergspitzen angehören. Aber wenn man solche Annäherungen hat, so wird es möglich, das Ziel viel sicherer zu erreichen. Nicht weit von der Stadt Mosdok waren wir dem Kasbed am nächsten, während der Elborus anderthalbmal so weit entfernt war; wenn ich also die Refractions-Coefficienten nach dem Elborus bestimme, so wird der Fehler in der Höhe dieses Berges einen 2¼mal so geringen Einfluß auf die mit solchem Coefficienten berechnete Höhe des Kasbed haben. Hierauf verglich ich den Kasbed mit einem andern hohen Berge welchen ich hier Anonymus nenne, wenn Kasbed am weitesten und Anonymus am nächsten waren; dieses fand bei dem Basis-signal Bso Statt, von welchem der erste Berg 1¼mal weiter entfernt ist als der zweite, also werden die Fehler in der Höhe vom Kasbed einen 1,56 kleineren Einfluß auf die Höhe des Anonymus haben. Wenn man noch weiter nach Nordwesten geht, ist Kasbed immer schwächer sichtbar, so daß die Messung der Zenithdistanzen sehr unsicher wird, deswegen konnte man den Elborus bei dem Hauptsignal P75, außer mit dem Beschtau, nur mit dem Anonymus vergleichen. Weil aber von hier aus der Elborus nur 1,14mal so weit abliegt als der Anonymus, so bekommt man durch eine solche Vergleichung die Höhe vom Elborus mit einem Fehler, welcher nur 1,29mal größer wird, als der Fehler in der Höhe vom Anonymus, und folglich immer noch mit einem 1,2 kleineren Fehler, als der, welcher in der nahe von Mosdok bestimmten Erhöhung vom Kasbed sein kann. Die auf diese Weise berechnete Höhe vom Elborus ist mehr als um 50 Fuß anders ausgefallen, als die, welche unmittelbar aus dem durch den Beschtau erhaltenen Refractions-Coefficienten folgt. Mit dieser so gewonnenen, gewiß viel genaueren Größe der Erhöhung des Elborus, habe ich wieder die ganze Reihe von Beobachtungen durchgerechnet, und ich glaube, daß die Endresultate bis auf 20 oder 25 Fuß rich-

tig sein werden, wenn man nämlich die Refractions-Coefficienten für die in verschiedenen Richtungen fast gleich hoch und sehr weit liegenden Bergspitzen als gleich annehmen darf, welches mir höchst wahrscheinlich scheint.

Ich habe außerdem die Messungen in allen Puncten benutzt, aus welchen ich auch nur einzelne der hohen Berggipfel sehen konnte, um in Verbindung mit den anderen Beobachtungen eine Uebersicht über den Werth und die Veränderungen der Refractions-Coefficienten zu erhalten.

Ehe ich zu den Beobachtungen selbst komme, muß ich noch bemerken, daß auch dieser Rechnung die Formeln

$$\gamma = \frac{D' \sin. (a + \frac{C}{2} - r)}{\cos. (a + C - r)} \quad D' = D + D \cdot \frac{h}{R} - \frac{D^2}{24R^2}$$

zum Grunde liegen, wo  $\gamma$ ,  $a$ ,  $C$ ,  $r$ ,  $R$  das nämliche bedeuten, wie früher;  $D$  aber die geodätische auf des Meeres-Niveau projecirte Entfernung des zu bestimmenden Punctes, und  $h$  die Erhöhung des Beobachtungsorts über dem Meere sind.  $D'$  ist also die auf die Höhe des Horizonts des Beobachters bezogene Chorde, welche dem Bogen  $D$  und dem Radius  $R$  entspricht.

## Beobachtungen zur Bestimmung der Höhe des Beschtau, am 13. Julius 1857.

Diese Bestimmung folgt aus einer Nebenoperation, welche in Verbindung mit unseren Signalen steht. Die Zenithdistanzen vom Beschtau wurden zu gleicher Zeit aus drei Puncten, die durch  $P_{70}$ ,  $Q$  und  $D$  bezeichnet sind, gemessen.

### Beobachtungen in $P_{70}$ .

Die Höhe von  $P_{70}$  über dem Moskischen Meere = 15511,1 Engl. Zoll.; die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 88,6 Engl. Zoll unter dem  $P_{70}$ .

Gegenstand.	Zenithdistanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Niveau projec. Entfernungen.	Correspond. Winkel C der Verticals.
Beschtau . . .	88° 13' 47",9	3 <sup>u</sup> 47,5; Bilder	1204530 Engl. Fuß	0° 16' 29",2
Signal Q . . .	89 41 30,6	ruhig	597050	0 5 26,8
Signal Q . . .	29,6	4 37,5; Bilder		
Beschtau . . .	88 13 45,6	ruhig.		

Azimuth vom Beschtau = 51° 0'; von Q = 6° 40', von S. nach W.

Beobachtungen in Q.

Die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 89,9 Engl. Z. unter der Marke Q.

Gegenstand.	Zenithdistanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Niveau projectirte Entfernungen.	Correspond. Winkel C der Verticalen.
P <sub>70</sub> . . . . .	90° 21' 45",6	4 <sup>u</sup> 47',5; Bilder	QB = 960730 E. Z.	15' 8",5
Besichtau . . . . .	87 51 48",4	ruhig.		
D . . . . .	89 59 16",5		QD = 484410 —	6 37,8

Azimuth aus Q nach dem Besichtau = 67° 40; nach D = 54° 0 von S. nach W.

Beobachtungen in D.

Die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 100,4 Engl. Zoll unter der Marke D.

Gegenstand.	Zenithdistanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Niveau projectirte Entfernungen.	Correspond. Winkel C der Verticalen.
Q . . . . .	90° 4' 51",4	4 <sup>u</sup> 57',5; Bilder		
Besichtau . . . . .	85 52 21,1	ruhig.	DB = 506704 Engl. Z.	6' 55",6

Azimuth aus D nach dem Besichtau = 80° 50, von S. nach W.

Eine leichte Rechnung der gleichzeitigen Beobachtungen giebt dann:

die Erhöhung von Q über P<sub>70</sub> = + 2324,2 Engl. Z. den Refract.-Coefficient. = + 0,062  
 D — Q = 398,5 — = + 0,086

Mit der Höhe von P<sub>70</sub> über dem Meere = 15491,1 Engl. Zoll bekommt man zugleich die Höhe des Besichtau über dem Asowschen Meere Refr.-Coefficient.  
 nach der Combination der Beobachtungen in P<sub>70</sub> u. D ... = 55121 Engl. Z. | = + 0,0726  
 Q u. D ... = 55115 — | = + 0,0801  
 im Mittel = 55118

Beobachtungen zur Höhenbestimmung von den bedeutendsten Spitzen der Caucasischen Gebirge.

1) Beobachtungen in P<sub>70</sub> am 14. Julius 1837.

Die Höhe von P<sub>70</sub> über dem Asowschen Meere ist = 14050,5 Engl. Z.

Die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 85 Engl. Z. unter der Marke P<sub>70</sub>

Gegenstand.	Zenithdistanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf Meeres = Niveau projectirte Distanzen.	Corresp. Winkel C der Verticalen.	Barometer in Engl. Z.		Thermometer nach Reaumur.	
					inn.	äuß.	inn.	äuß.
Besichtau . . . . .	8810' 36",1	17u 40' Die Bilder der Berge wenig unruhig, die der nahen und niedrigen Signale sehr ruhig.	1218500 Engl. Zoll.	0° 16' 40",6	28,80	+15,0	+15,0	
Eborus {	westl. Kuppe	88 1 57,8	4880925 —	1° 6' 52",8				
	östl. Kuppe	88 2 13,6	4873380 —	1° 6' 47",0				

Gegenstand.	Zenithdistanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Niveau projec. Entfernungen.	Corresp. Winkel C der Verticalen.	Barometer.	Thermometer nach Reaumur. inn.   auß.
Beschtau . . . . .	88° 11' 7",6	21 <sup>u</sup> 40' Die Berge (besonders der Beschtau) etwas mehr unruhig, die nahen Objecte schon längst ganz unruhig. Sonnenschein.			28,79	+20,1   +19,0
Elborus {	westl. Kuppe. 88 2 16,4					
	östl. Kuppe. 88 2 32,9					

Azimuth nach dem Beschtau = 55° 12', nach dem Elborus = 56° 31' von S. nach W.

Messungen um 17 <sup>u</sup> 40' . . . . .	219960 Engl. 3.	219260	+ 0,098
21 40 . . . . .	222360 " "	221640	+ 0,068
im Mittel . . . . .	221160	220450	

Man sieht daraus, wie unsicher die Bestimmung der Refraction sein muß um solche Unterschiede in den Erhöhungen des Elborus zu finden.

Beobachtungen in P<sub>75</sub> am 15. August 1837.

Die Höhe von P<sub>75</sub> über dem Asowschen Meere ist = 12900,0 Engl. 3.

Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 94,0 Zoll unter der Marke P<sub>75</sub>.

Gegenstand.	Zenithdistanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Niveau projec. Entfernungen.	Corresp. Winkel C der Verticalen.	Barometer in Engl. 3.	Thermometer nach Reaumur. inn.   auß.
Beschtau . . . . .	89° 2' 38",0	18 <sup>u</sup> 43' Bilder etwas unruhig. Sonnenschein.	2110100 Engl. Zoll.	0° 28' 51",4	29,01	+16,0   +14,5
Elborus {	westl. Kuppe 87 53 14,0		4669800 —	1 3 54,6		
	östl. Kuppe 87 52 52,3					
Anonymus . . . . .	87° 48' 26",9	20 <sup>u</sup> 30' Bilder ziemlich unruhig. Sonnenschein.	4179830.	0° 57' 19",2	29,04	+20,0   +18,2
Elborus {	westl. Kuppe 87 53 44,7					
	östl. Kuppe 87 53 27,6					
Beschtau . . . . .	89° 3' 41",6					

Azimuth des Elborus = 56° 30'; des Beschtau = 71° 44' von S. nach W. des Anonymus = 20° 0' von S. nach D.

Schließt man die Refract.-Coefficienten nach dem Beschtau, so bekommt man + 0,094 für 18<sup>u</sup> 43' und + 0,063 für 20<sup>u</sup> 30' und wenn man mit diesem Coefficienten die Höhe vom Elborus berechnet, so bekommt man zwar im Mittel fast dasselbe Resultat wie früher (221220 3. für die westliche und 220380 für die östliche Kuppe), aber hier divergiren die einzelnen Angaben noch mehr von einander, weil in B<sub>70</sub> die Umstände und die Lage des Beobachtungsorts vortheilhafter waren als in P<sub>75</sub>; nämlich B<sub>70</sub> lag auf einer Anhöhe, und zwischen dem Beschtau und B<sub>70</sub> befand sich ein tiefes Thal.

2) Beobachtungen in  $\beta_{79}$  am 21. August 1837.Die Höhe von  $\beta_{79}$  über dem Asowschen Meere ist = 9550,5 Engl. Zoll.Die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 92,5  $\beta$ . niedriger als die Marke  $\beta_{79}$ .

Gegenstand.	Zenith- distanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Ni- veau projec. Ent- fernungen.	Correspond. Winkel C der Verticalen.	Baro- meter in Engl. $\beta$ .	Thermometer nach Reaumur.	
						inn.	äuß.
Beschtau . . . . .	89° 31' 1'',6	6u 30', ruhig.	3270650 Engl. Zoll.	0° 44' 44'',4	29,24	+17,8	+17,8
Kasbeck . . . . .	88 20 48,3		5037134 —	1° 9' 3'',9			

Azimuth vom Beschtau = 65° 48' von N. nach W.; vom Kasbeck = 21° 44' von S. nach D.

Nach dem Beschtau/ist der Refractions-Coefficient = + 0,0754, mithin wäre die Höhe  
des Kasbeck über dem Meere = 197970  $\beta$ .3) Beobachtungen in  $\beta_{80}$  am 21. August 1837.Die Höhe von  $\beta_{80}$  über dem Asowschen Meere ist = 8795,0 Engl.  $\beta$ .Gesichtslinie in horizontaler Lage ist niedriger als  $\beta_{80}$  um 89,0  $\beta$ .

Gegenstand.	Zenith- distanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Ni- veau projec. Ent- fernungen.	Correspond. Winkel C der Verticalen.	Baro- meter in Engl. $\beta$ .	Thermometer nach Reaumur.	
						inn.	äuß.
Beschtau . . . . .	89° 35' 2'',7	19u 30' ziemlich	3515746 Engl. Zoll.	0° 48' 5'',5	29,27	+14,0	+14,0
Kasbeck . . . . .	88 15 52,5	ruhig.	4913740 —	1° 7' 22'',8			
Anonymus . . . . .	87 39 35,4		4071560 —	0 55 46 ,7			
Beschtau . . . . .	89° 35' 16'',8	20u 7' weniger			29,27	+15,0	+15,0
Kasbeck . . . . .	88 16 2,0	ruhig.					

Azimuth nach dem Beschtau = 64° 36' von N. nach W.; nach dem Anonym. = 39°  
von S. nach W.; nach dem Kasbeck = 19° 10' von S. nach D.Der Beschtau giebt die Refract.-Coefficienten + 0,0756 für 19<sup>u</sup> 30', und + 0,0708  
für 20<sup>u</sup> 7', mithin wäre die Höhe des Kasbeck über dem Meere = 198720 Engl.  $\beta$ .4) Beobachtungen in  $\beta_{81}$  am 23. August 1837.Die Höhe von  $\beta_{81}$  über dem Asowschen Meere ist = 7868,0 Engl. Zoll.Die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 88,0  $\beta$ . unter der Marke  $\beta_{81}$ .

Gegenstand.	Zenith- distanz.	Zeit und Zustand der Bilder.	Auf des Meeres Ni- veau projec. Ent- fernungen.	Correspond. Winkel C der Verticalen.	Baro- meter in Engl. $\beta$ .	Thermometer nach Reaumur.	
						inn.	äuß.
Kasbeck . . . . .	88° 14' 51'',6	4u 38' Bilder			29,26	+22,2	+22,5
Id. . . . .	88 14 48,7	5 28 ruhig.			29,25	+20,5	+20,8
Kasbeck . . . . .	88 14 38,6	6u 10' ziemlich	4886210 Engl. Zoll.	1° 7' 0'',0	29,24	+18,0	+18,0
Anonymus . . . . .	87 47 41,8	ruhig.	4262350 — —	0 58 22,5			

Azimuth von Kasbeck = 43° 12' vom S. nach D.; vom Anonym. = 16° 30' von S. nach W.

b) Beobachtungen in  $\beta_{88}$  am 24. August 1857.Die Höhe von  $\beta_{88}$  über dem Afowschen Meere ist = 7007,0 Engl. Zoll.Die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist 92,0 Z. unter der Marke  $\beta_{88}$ .

Gegenstand.	Zenith- distanz.	Zeit und Zustand der Silder.	Auf des Meeres Ni- veau projec. Ent- fernungen.	Correspond. Winkel C der Verticalen.	Baro- meter in Engl. Z.	Thermometer.	
						nach Reaumur. inn.	äuß.
Kasbeck . . . . .	88° 8' 15",8	20u 0' ruhig.	4722320 Engl. Zoll.	1° 4' 55",5	29,37	+19,0	+19,0
Elborus { östl. Kuppe westl. Kuppe mit Wolken bedeckt.	88 32 16,4		6010550 — —	1 22 11,5			

Azimuth vom Kasbeck = 10° 32 von S. nach D.; vom Elborus = 73° 20' von S. nach W.

Beobachtungen in  $\alpha_{87}$  am 29. August 1857.Die Höhe von  $\alpha_{87}$  über dem Afowschen Meere ist = 5547,4 Engl. Z.Die Gesichtslinie in horizontaler Lage ist unter 91,7 Z. der Marke  $\alpha_{87}$ .

Gegenstand.	Zenith- distanz.	Zeit und Zustände der Silder.	Auf des Meeres Ni- veau projec. Ent- fernungen.	Correspond. Winkel C der Verticalen.	Baro- meter in Engl. Z.	Thermometer nach Reaumur.	
						inn.	äuß.
Elborus { westl. Kuppe östl. Kuppe	88° 55' 34",2	6u 9' ziemlich ruhig.	7045100 Engl. Zoll.	1° 36' 19",9	29,4	+16,0	+19,0
	88 55 17,9		7002650 — —	1 35 46,3			
Kasbeck . . . . .	88 0 48,7		4544330 — —	1 2 20,2			

Azimuth vom Elborus = 76° 52' von S. nach W.; vom Kasbeck = 3° 0', von S. nach W.

Rechnen wir jetzt die Refractions-Coefficienten nach dem Elborus, indem wir 221200 Engl. Z. für die Höhe der westlichen Kuppe und 220300 Engl. Z. für die der östlichen Kuppe über dem Niveau des Meeres annehmen, so erhalten wir 198200 Engl. Z. für die Höhe des Kasbeck über dem Meere; bestimmt man dann, aus Vergleichung der Zenithdistanzen vom Kasbeck und Anonymus sowohl in  $\beta_{81}$  als in  $\beta_{80}$ , die Höhe dieser letztern und sucht mit der so gefundenen Höhe vom Anonymus die Coefficienten der Strahlenbrechung, um die Beobachtungen in  $P_{75}$  zu berechnen, so findet man die Höhe des Elborus um 420 Zoll größer als die oben angeführte.

Durch einige sehr leichte Versuche habe ich die Höhe des Elborus ausgemittelt, welche dem ganzen Systeme der Beobachtungen von  $P_{75}$  bis  $\alpha_{87}$  Genüge leistet. Nehmen wir nämlich an, daß die westliche Kuppe des Elborus 221350 Engl. Z. und die östliche 221040 Zoll über der Meeresoberfläche liegt, so bekommt man aus Beobachtungen in  $\alpha_{87}$  den Refractions-Coefficient um 6" 9' nach Mittag = + 0,07385 nach der Westkuppe, + 0,07176

nach der Diskuppe des Elborus. Im Mittel = + 0,0728 und damit die Höhe vom Kasbeck = 198440 Engl. Zoll über dem Meere.

Etwas unvoretheilhafter läßt sich noch die Höhe des Kasbeck aus den Messungen in B<sub>88</sub> ableiten. Aus der Höhe der Diskuppe des Elborus über dem Meere = 221040 Engl. Z. bekommt man nämlich den Refractions-Coefficienten um 20<sup>u</sup> 0' = + 0,0790 und erhält also für den Kasbeck eine Höhe von 198170 Engl. Z. über dem Meere.

Weil nun die Fehler im Linearmaß, in welchem man die Erhebungen ausdrückt, in umgekehrtem Verhältniß mit den Quadraten der Entfernungen der zu bestimmenden Berge, in directem aber mit der Quadrat-Wurzel der Anzahl der Bestimmungen der Refractions-Coefficienten und den Quadraten der Entfernungen von solchen Puncten stehen, nach welchen man diese Coefficienten gesucht hat, so wird der Fehler in der Höhe von Kasbeck, aus den Beobachtungen in a<sub>87</sub> geschlossen, sich zu dem Fehler in der Bestimmung in B<sub>88</sub> wie 1:√2  $\cdot \left[ \frac{A_{87} \text{ Elb. } B_{88} \text{ Kasb.}}{B_{88} \text{ Elb. } A_{87} \text{ Kasb.}} \right]^2$  verhalten; also werden die Gewichte beinahe wie 4:1 d. h. sich umgekehrt wie die Quadrate der Fehler, verhalten; folglich wird im Ganzen die wahrscheinlichste Höhe des Kasbeck = 198386 Engl. Zoll über dem Meere betragen.

Mit dieser Höhe des Kasbeck findet man ganz übereinstimmend die Höhe des Anonymus über dem Meere

$$= 202950 \text{ Engl. Zoll aus Beobachtungen in } B_{80}$$

$$\text{auch } 202950 \text{ — — — — — in } B_{81}$$

Jetzt können wir durch Anonymus die Refractions-Coefficienten in P<sub>75</sub> finden und die Höhe vom Elborus bestimmen. Um 20<sup>u</sup> 30' am 15. Aug. 1837 ist der Refractions-Coefficient = + 0,0706 und die Rechnung mit diesem Coefficienten giebt die Erhebung über dem Meere

von der Westkuppe	von der Diskuppe des Elborus
= 221900 Engl. Z.	= 220900 Engl. Z.

Um zu zeigen, wie gering der Einfluß der zufälligen Fehler der Beobachtungen ist, will ich hier noch anführen, was sich aus den Messungen des Herren Sabler mit ganz andern Instrumenten an demselben Puncte P<sub>75</sub> ergibt. Seine Beobachtungen um 20<sup>u</sup> 30', was auch nahezu der Zeit meiner Beobachtungen ist, stimmen mit der meinigen in Bezug auf die westliche Kuppe fast vollkommen überein; in Bezug auf die östliche Kuppe, geben sie dessen Höhe um 140 Z. anders an; um 18<sup>u</sup> 54' giebt Herr Sabler die Zenithdistanz von der westl. Kuppe des Elb., von der östl. Kuppe d. Elb., von Anonym. = 87° 53' 22",5      87° 52' 58",6      87° 48' 3",5 und die Gesichtslinie in horizontaler Lage 77 Zoll unter der Marke P<sub>75</sub>. Daraus folgt der

Refractions-Coefficient = + 0,0775 und die Höhe der Westtuppe des Elborus = 221810 Engl. 3.; die der Osttuppe = 220980 Engl. 3. also wenig abweichend von meinen Angaben.

c) Kurze Uebersicht der irdischen Strahlenbrechung, welche in den Sommer- und Winter-Monaten für sehr weit entfernte und hohe Punkte gilt.

Da wir die Höhen der Berge jetzt ziemlich genau kennen, sind wir im Stande, sowohl aus den oben angeführten Beobachtungen als auch aus denjenigen, welche in Stavropol im Winter 1836—1837 gemacht sind, jedesmal die irdische Strahlenbrechung abzuleiten. Ist  $\gamma$  die bekannte Erhebung eines Punktes über dem Horizont des Beobachters;  $Zv. = 90^\circ - (a - r)$  seine wahre Zenithdistanz,  $r$  die Refraction, so wird aus den Gleichungen, wo die Buchstaben dasselbe bedeuten wie früher,

$$\gamma = D' \frac{\text{Sin. } (a + \frac{1}{2} C - r)}{\text{Cos. } (a + C - r)}, \quad D' = D + \frac{Dh}{R} - \frac{D^3}{24 R^2}$$

$a - r$ , folglich  $Zv.$  und  $r$  leicht zu finden sein; man kann nämlich in dem Cosinus der sehr kleinen Winkel  $(a + C - r)$ , wo  $a$  das Complement zu  $90^\circ$  der wirklich gemessenen Zenithdistanz ist, statt  $r$  die Größe  $0,08 C$  setzen, ohne einen merklichen Fehler zu befürchten.

Die Strahlenbrechung an solchen Punkten, wie die Spitzen der weit entfernten, mit ewigem Schnee bedeckten Berge sind, ist gewiß vom Barometer- und Thermometerstande abhängig. Den Ansichten meines hochverehrten Lehrers Struve folgend, habe ich aus der jedesmaligen Refraction  $r$  diejenigen Refractionen  $r'$  berechnet, die dem Barometerstande 332,7 Par. Lin. und der Temperatur + 7,4 Reaumur entsprechen würden, indem ich dabei die Formel

$$\text{Log. } r' = \text{Log. } r - A\beta - \lambda\gamma + \frac{70}{8} A\tau$$

zum Grunde legte, wo  $\tau$  den Stand des inneren Thermometers am Barometer bedeutet,  $A$  und  $\lambda$  die von Bessel in der Refractions-Tafel der Fundamenta Astronomiae pag. 50 gegebenen Factoren;  $\beta$  und  $\gamma$  die vom Barometer und Thermometer abhängigen Größen sind und die entweder aus der Refractions-Tafel, welche sich Seite 208, 1r Band der Gradmessung der Ostsee-Provinzen Rußlands von Struve, befindet, oder aus den Hülftafeln (Tafel XI) welche der Herr Obrist-Lieutenant Baron von Wrangel in russischer Sprache herausgegeben hat, zu nehmen sind. Statt der Refractionen selbst, kann man ebenso gut auch die Refractions-Coefficienten auf + 7,4 R. Thermometer und 332,75 Par. Lin. Barometerstand reduciren.

Ich mache den Anfang mit den Stavropolschen Beobachtungen vom Elborus. Aus der bekannten Lage des Beobachtungsortes in Bezug auf einige Punkte der Stavropolschen Cathedralkirche sowohl in Hinsicht der horizontalen, als auch der verticalen Richtung und der bekannten Höhe jener Punkte über dem Meeres-Niveau, habe ich gefunden, daß das Centrum des Instruments sich 20420 Engl. Zoll über dem Meere befand. Im Mittel aus den ange-

föhren Bestimmungen nehme ich fest an, daß die Westkuppe vom Elhorus um 221890 Engl. Zoll und die Ostkuppe um 220980 Engl. Z. höher sind als die Oberfläche des Meeres. Nenne ich  $D'w$ ,  $D'o$  die auf die Höhe des Horizonts des Beobachtungsortes bezogenen, in Engl. Zollen ausgedrückten Chorden, welche vom Beobachter nach der westlichen und östlichen Kuppe gehen; und  $Cw$ ,  $Co$  die correspondirenden Winkel der Verticalen, so haben wir  $\text{Log. } D'w = 6,878202$ ;  $\text{Log. } D'o = 6,880370$ ,  $Cw = 1^\circ 43' 57'' 8$ ,  $Co = 1^\circ 44' 8'' 4$ ; daraus folgen die wahren Zenithdistanzen von der Westkuppe =  $89^\circ 20' 12'' 6$  und von der Ostkuppe =  $89^\circ 21' 20'' 0$ .

Aus der Vergleichung dieser wahren Zenithdistanzen mit den scheinbaren oder wirklich beobachteten, bekommt man die correspondirenden Refractionen und es entsteht folgende Tafel.

Zeit der Beobachtung.	Zenithdistanz der Westkuppe.	Refr.	Zenithdistanz der Ostkuppe.	Refr.	Barometer in Par. Linien.	Thermometer nach Reaumur.		Refraction's Coefficienten.		Abweichungen vom Mittel.
						inn.	äuß.	Beobachtete.	Reduc. a. 47,4 R. Therm. u. 332,75 p. s. Barom.	
<b>1836</b>										
24. Dec. 20 <sup>h</sup> 15'	89 11 46,7	+ 8 21,9	89 12 36,2	+ 8 43,8	319,60	+ 13,8	+ 4,6	+ 0,082	+ 0,084	0,006
25. — 0 1	12 34,0	7 38,6	13 27,7	7 52,3	319,82	15,2	5,5	0,075	0,077	0,013
4 0	12 15,8	7 58,9	12 59,4	8 20,6	319,82	15,7	+ 4,6	0,079	0,081	0,009
<b>1837</b>										
7. Jan. 21 0	89 8 58,1	11 14,3	89 10 4,0	11 16,0	323,20	10,0	- 7,0	0,108	0,101	0,011
21 30	9 15,5	10 57,1	10 14,4	11 5,6	323,20	10,0	- 7,0	0,106	0,099	0,009
8. — 0 30	10 8,1	10 4,5	10 58,4	10 21,6	322,98	12,0	- 3,3	0,099	0,095	0,005
3 50	10 20,8	9 51,8	11 26,2	9 55,8	322,20	12,3	- 2,7	0,095	0,092	0,002
8. — 23 40	10 54,1	9 18,5	11 42,4	9 37,6	322,08	11,6	- 1,7	0,091	0,089	0,001
9. — 20 25	11 24,1	8 48,5	12 13,7	9 4,6	321,28	12,0	- 0,3	0,086	0,085	0,005
21 20	11 23,6	8 49,0	12 15,4	9 6,6	321,28	12,0	+ 0,3	0,086	0,085	0,005
10. — 20 28	11 26,1	8 46,5	12 14,4	9 5,6	320,38	15,0	+ 0,3	0,086	0,085	0,005
11. — 4 10	11 26,1	8 46,5	12 29,4	8 50,6	319,82	15,0	+ 0,2	0,085	0,085	0,005
14. — 1 14	11 12,1	9 0,5	12 7,4	9 12,6	320,38	14,0	- 1,0	0,089	0,088	0,002
30. — 12 45	9 8,6	11 4,5	10 15,4	11 4,6	322,20	15,8	- 11,0	0,107	0,097	0,007
21. Febr. 20 48	10 9,8	10 2,8	10 53,4	10 26,6	320,72	16,0	- 4,5	0,099	0,095	0,005
22. — 20 25	9 19,1	10 53,5	10 13,4	11 6,6	319,60	15,0	- 3,0	0,107	0,104	0,014
26. — 23 45	11 7,1	9 5,5	11 37,4	9 22,6	321,28	15,1	- 2,0	0,089	0,087	0,005
27. — 5 16	10 15,1	9 59,5	11 12,4	10 7,6	321,63	16,1	- 2,5	0,097	0,094	0,004
19 55	8 51,1	11 21,3	9 23,4	11 56,6	322,20	+ 14,0	- 10,0	+ 0,112	+ 0,105	0,013

im Mittel + 0,090 | 0,007

Anmerkung. Man bemerkt leicht, daß die Refractionen entweder schwächer in Bezug auf die Westkuppe, oder stärker in Bezug auf die Ostkuppe sind, als sie nach dem Verhältnisse von Cw, Co sein sollten, welches ein Beweis ist, daß die angenommenen Höhen dieser Kuppen vom Elborus etwas falsch sind; aber der Elborus war in Stawropol besonders im Februar oft so schwach zu sehen, daß man nicht mit Sicherheit sagen kann, ob wirklich eine Verbesserung nothwendig ist. Der Elborus war am besten Morgens und Abends nur bei vollkommener Durchsichtigkeit der Luft und klarem Himmel zu erblicken, ein einziges Mal habe ich ihn bei theilweise bewölktem Himmel gesehen. Im December war fast noch gar kein Schnee gefallen, im Januar aber wurde schon die Umgebung von Stawropol mit Schnee bedeckt. Die stärksten Strahlenbrechungen kamen dann in den Morgenstunden vor, und sind um die Zeit des Sonnenaufgangs am größten, in den Abendstunden sind sie in der Regel kleiner, um die Mittagszeit herum am kleinsten, wenn der Stand der Barometer und Thermometer der gewöhnliche ist. Es ergibt sich auch deutlich aus unseren Beobachtungen die Richtigkeit der Bemerkung, welche Struve über die irdische Strahlenbrechung \*) macht, daß, sobald die Erde mit Schnee bedeckt ist, die Refraction unter sonst gleichen Umständen größer ist.

Was die irdische Strahlenbrechung im Sommer für entfernte und hohe Puncte anbelangt, so können wir aus den oben angeführten Bergmessungen einigen Aufschluß darüber erhalten, jedoch wäre es überflüssig die schon oben gegebenen Zenithdistanzen und Refractionen wieder anzugeben, und es wird hinreichen im Mittel sowohl die jedesmal wirklich Stattfindenden als die auf + 7,4 R. der Thermometer und 332,75 Par. Lin. Barometerstandes reducirten Refractions-Coefficienten mitzutheilen.

---

\*) Breitengradmessung in den Ostsee-Provinzen Rußlands. T. 1. S. 357.

Zeit und Zustand der Bilder.		Refraktionscoefficienten		Abweich. vom Mittel.	Baro- meter in Par. Lin.	Thermometer nach Reaumur.	
		beobachtete.	Nebuc. auf +7,48. Therm. und 332,75 P. L. Barom.			innere.	äußere.
<b>1 8 5 7</b>							
14. Juli	17 <sup>u</sup> 40' fast ruhig.	+0,0789	+0,0842	0,0035	324,32	+15,2	+15,2
	21 <sup>u</sup> 40' wenig unruhig.	0,0756	0,0837	0,0030	324,20	20,1	19,0
15. August	18 <sup>u</sup> 43' fast ruhig.	0,0785	0,0837	0,0030	326,70	16,0	14,5
	20 <sup>u</sup> 30' unruhig.	0,0706	0,0768	0,0039	327,03	20,0	18,2
21. August	6 <sup>u</sup> 50' ruhig.	0,0714	0,0770	0,0037	329,30	17,8	17,8
	19 <sup>u</sup> 50' ruhig.	0,0778	0,0829	0,0022	329,60	14,0	14,0
	20 <sup>u</sup> 7' fast ruhig.	0,0757	0,0802	0,0005	329,63	15,0	15,0
23. August	4 <sup>u</sup> 58' ruhig.	0,0711	0,0785	0,0022	329,47	22,5	22,5
	5 <sup>u</sup> 28'	0,0722	0,0778	0,0029	329,35	20,5	20,8
	6 <sup>u</sup> 11'	0,0747	0,0795	0,0012	329,24	18,5	18,5
24. August	20 <sup>u</sup> 8' fast ruhig.	0,0793	0,0855	0,0048	330,60	19,0	19,0
29. August	6 <sup>u</sup> 10' ruhig.	+0,0730	+0,0790	0,0017	331,95	+16,0	+19,0
im Mittel +0,0807				0,0030			

Die mittlere Abweichung jeder einzelnen Bestimmung ist hier =  $\pm 0,0030$ . Die Refraktions-Coefficienten dieser Reihe stimmen also besser unter einander überein, als die der oben angeführten, trotzdem, daß sie sich auf verschiedene Lokalitäten beziehen, was vorzüglich darin seinen Grund zu haben scheint, daß überhaupt die Witterung im Juli und August sehr beständig war und der Stand des Barometers und des Thermometers fast unverändert derselbe blieb; das scheinbare Steigen des Barometers rührt davon her, daß wir mit unseren Stationen in immer tiefer gelegene Gegenden kamen. Sehr merkwürdig ist die Unveränderlichkeit der Refraktions-Coefficienten, welche für hohe und weit entfernte Objecte gelten. Der Werth dieses Coefficienten variiert vom Januar und Februar, die in die kälteste Jahreszeit fallen, in der die Lichtstrahlen über die Oberfläche des Schnees hinstreifen, bis zum Juli

und August als den heißesten Monaten des Jahres, kaum um  $\frac{1}{8}$  seiner Größe, dagegen verändert sich die Strahlenbrechung für nahe und niedrig gelegene Objecte, bei sonst gleichen Umständen, fast um das zweifache von Winter bis zum Sommer, wie die interessanten Beobachtungen, welche Struve über den täglichen und jährlichen Wechsel der irdischen Strahlenbrechung machte\*), uns dies deutlich gezeigt haben. Ein solches Ergebnis ließ sich übrigens erwarten. Es ist nämlich klar, daß die Einwirkung des Erdbodens durch ihre strahlende Wärme besonders stark auf die untersten Schichten der Luft wirkt, wo die Lichtstrahlen nach niedrigen Objecten gehen; auf diejenigen aber, welche zu sehr hohen Punkten gelangen, ist der Einfluß nur im Anfange des Weges der Lichttheilchen bemerkbar, und wird nachdem immer schwächer. Um zu zeigen wie verschieden die Refraktions-Coefficienten bei den Bergspitzen und bei den nahe liegenden Signalen ausfallen, will ich die Bestimmungen mittheilen, welche an der 11ten Basis für die Signale aus gegenseitigen und gleichzeitigen Beobachtungen und für die Berge der aus der oben angeführten Combination der Bergmessungen folgen.

Zeit.	Gegenstand.	Zustand des Luftkreises.	Beobachtete Refraktions-Coefficienten.	Winkel C der Verticalen.
<b>1857</b>				
27. August 4 <sup>u</sup> 37',5	{ Signal P <sub>92</sub> Kasbed	Sonnenschein; Signal sehr unruhig; Berg fast ruhig.	- 0,171	0° 1' 47",0
			+ 0,070	1° 7' 0",7
5 <sup>u</sup> 27',5	{ Signal P <sub>92</sub> ' Kasbed	Matter Sonnenschein; Signal ziemlich ruhig, Berge ganz ruhig.	- 0,016	
			+ 0,071	
6 <sup>u</sup> 15'	{ Signal P <sub>92</sub> Kasbed	Signal zuerst sehr ruhig wird aber zum Ende unruhig; die Berge bleiben immer fast ruhig.	+ 0,200	
			+ 0,075	

Das Signal lag flach auf einem kleinen Hügel und die Gesichtslinie streifte von Anfang an bis zum Signal längst der Steppe immer sehr nahe der Erdoberfläche vorbei. Wenn auch nicht immer so große Veränderungen in den Refraktions-Coefficienten für die nahen Signale vorkommen, so kann man wenigstens annehmen, daß selbst bei ungünstigen Umständen die Strahlenbrechung für die sehr hohen und weiten Punkte nur mäßige Störungen erleiden.

Die Beobachtungen in  $\beta$  0 am 14. Julius 1857 sind in Bezug auf die Höhenbestimmungen gar nicht benutzt worden, weil damals der Elborus nur mit dem Beschtau verglichen wurde. Jetzt aber, mit dem aus verschiedenen Bergmessungen erhaltenen wahrschein-

\*) Gradmessungen in den Ostseeprovinzen. Th. 1. Anhang.

lichen Werthe von dem Refractions-Coefficienten für einen bestimmten Barometer- und Thermometerstand, können wir die, den Beobachtungen am 14. Julius, mit Berücksichtigung der bemerkten barometrischen und thermometrischen Angaben, entsprechenden Refractionen berechnen und damit erhalten wir

für die Höhe über dem Meere

von der Westkuppe

222040 Englische Zoll

von der Ostkuppe des Elborus

221310 Englische Zoll

nur wenig von den oben erwähnten Angaben abweichend.

### Tabellearische Uebersicht der Höhen über dem Asowschen Meere und der geographischen Lage mehrerer Punkte in Caucasion.

Gegenstand.	Höhe über dem Asowschen Meere in Engl. Fuß.	Nördl. geographische Breite.	Länge (östl. v. Stawropol.)
Elborus { westliche Kuppe	+ 18493	43° 21' 21"	0° 27' 4"
Elborus { östliche Kuppe	+ 18421	43 21 0	0 27 44
Anonymus . . . . .	+ 16913	43 3 13	1 13 32
Kasbeck . . . . .	+ 16332	42 42 3	2 31 52
Beschtau . . . . .	+ 4395	44 6 5	1 2 8
Caspisches Meer . . . . .	— 80	— — —	— — —

Die Länge von Stawropol ist = 39° 39' 31" östlich von Paris nach dem Akademiker Wienjewski.

# Inhalt.

I. Ueber die Anordnung und Methode der Beobachtungen . . . . .	Seite 5
II. Angewandte Rechnungs = Methoden . . . . .	— 9
III. Ueber die Zuverlässigkeit der Endresultate der Nivelirung . . . . .	— 11
Ueber die geographische Lage und die Höhe einiger interessanten Punkte in Caucassen . . . . .	— 26
Beobachtungen zur Bestimmung der Höhe des Beschtau, am 13. Juli 1837	— 34
Beobachtungen zur Höhenbestimmung von den bedeutendsten Spizen der Caucassischen Gebirge . . . . .	— 36

---

## Bemerkte Druckfehler.

- §. 29 Z. 4 v. u. statt  $128^{\circ} 59' 26''$  lese man:  $128^{\circ} 52' 26''$ .
- §. 30 Z. 2 v. u. berichtige man denselben Fehler.
- §. 31 im vierten  $\Delta$  statt  $45^{\circ} 19' 11$  lese man  $43^{\circ} 49' 11''$ .