TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 177 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

# MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

# ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

## V

ТАРТУ 1965

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 177 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

# MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

# ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

# V

TARTU 1965

## Проф. ХЕРМАНН ЯАКСОН

28 августа 1964 г. скоропостижно скончался известный эстонский математик, доктор физико-математических наук профессор Херманн Янович Яаксон, чья жизнь в течение 42 лет была неразрывно связана с Тартуским университетом.

Херманн Яаксон родился 25 января 1891 г. в бывшей волости Уус-Выйду близ города Вильянди. Окончил в 1909 г. Рижскую Александрийскую гимназию с золотой медалью и поступил осенью того же года на физико-математический факультет Тартуского университета, окончив его в 1913 году со степенью кандидата физико-математических наук. В годы 1915—1919 Херманн Яаксон работал учителем математики в Тартуской Коммерческой гимназии. В 1919 году его призвали во вновь открытый после Первой мировой войны Тартуский университет, где он вначале работал доцентом, а с 1926 г. профессором и заведующим кафедрой. В годы 1921—1947 Херманн Яаксон принимал почти постоянно участие в управлении Тартуским университетом, в том числе в годы 1927—1936 в качестве проректора по хозяйственной части. До 1951 года проф. Х. Яаксон был заведующим кафедрой математического анализа, а до ухода на пенсию в 1961 году профессором той же кафедры.

У Херманна Яаксона не было руководителя, кто направлял бы его научные интересы. Из-за своей крайней скромности даже во время научной командировки в Париже в 1923/24 учебном году не было у него никакого контакта с французскими математиками. Поэтому научные интересы Херманна Яаксона были разрознены между далеко стоящими друг от друга проблемами в области математического анализа, теории чисел и топологии. Одной из замечательных работ проф. Х. Яаксона является его докторская диссертация [3], которая была опубликована в 1925 г. в виде отдельного выпуска ученых записок Тартуского университета. Итак, Херманн Яаксон стал первым эстонцем, который был удостоен степени доктора по математике. В своей диссертации Херманн Яаксон развивает дальше метод редукции, данный Фурье для решения линейной системы уравнений с бесконечным числом неизвестных. Согласно этому методу из данной бесконечной системы уравнений выделяется т. н. редуцированная система, состоящая из первых $n$ уравнений с первыми $n$ неизвестными. Если решить редуцированную систему и перейти в полученном решении к пределу в процессе $n \to \infty$, то при некоторых условиях получается решение бесконечной системы. Так как сфера применения метода Фурье очень ограничена, то Херманн Яаксон предложил составить из данной бесконечной системы вместо редуцированной системы Фурье целую последовательность бесконечных систем, из которых каждая решима методом Фурье, и попытаться сконструировать из решений этих бесконечных систем решение данной системы. Свою идею он реализовал для восьми типов систем бесконечных уравнений (не решаемых методом Фурье), из которых первые шесть связаны с рядами Дирихле, а два последних — с проблемой интерполяции. Кстати, своим методом Херманн Яаксон получил обобщения известной теоремы Вейерштрасса о существовании целой функции с заданными нулями. Толчком к написанию докторской диссертации послужили появление в 1913 г. великолепной монографии венгерского математика Ф. Рисса «Leçons sur les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues» и, вероятно, исследования работавшего в Тартуском университете финского профессора К. Вяйзяля в области комплексных рядов Дирихле.

Более поздние научные интересы проф. Х. Яаксона были особенно связаны с топологической проблемой о четырех красках, приковавшей внимание многочисленных математиков в течение более ста лет. Здесь главной заслугой проф. Х. Яаксона является постановка т. н. проблемы о двух красках, решение ее и связывание с проблемой о четырех красках. Проблему о двух красках проф. Х. Яаксон поставил следующим образом: достаточно ли двух различных красок для окраски топологической карты на сфере, если требовать, чтобы не все области, имеющие общую узловую точку, были окрашены в один цвет. Проф. Х. Яаксон показал [7], что проблема о двух красках разрешима, если карта нормальна, т. е. если в каждой узловой точке карты встречаются лишь три контура. Одновременно он выяснил, как, исходя из решения проблемы о четырех красках, найти решение проблемы о двух красках и, наоборот, как, исходя из определенного специального решения проблемы о двух красках, построить решение проблемы о четырех красках. Однако, вопрос о существовании такого специального решения проблемы о двух красках остался открытым.

Из-за скромности проф. Х. Яаксона многие его исследования остались неопубликованными. Проработать его богатый архив и издать его неизвестные труды — это неотложный долг его учеников.

В течение своей многолетней педагогической деятельности проф. Х. Яаксон был учителем большинства эстонских математиков, читая более 15 различных общих и специальных курсов. Твердосистемно построенные лекции, простое, ясное их изложение и крайне добросовестное отношение к работе снискали ему искреннее уважение многочисленных его учеников. Все, которые знали проф. Х. Яаксона, уважали его за откровенный и прямой характер, объективное и гуманное отношение к людям, за его внимание и интерес к ним.

*Г. Кангро*

## Список печатных трудов проф. Х. Яаксона


1. Наука, ее развитие и задачи. Ilukirjandus ja teadus, 1915, **12**, 46—48; **13**, 51—52; **14**, 55—58; **15**, 59—60 (на эст. языке).
2. Понятие о бесконечности в математике. Loodus, 1923, **3**, 149—164. (на эст. языке).
3. Sur certains types de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Sur l'interpolation. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1925, **A 8**, 181 стр.
4. О применимости метода Фурье. TRÜ teaduslik sessioon 14.—16. VII 1945. Ettekannete kokkuvõtted. Tartu, 1945, 11—15. (на эст. языке).
5. Sur la légitimité d'une méthode de Fourier. Уч. зап. Тартуск. ун-та, Матем. науки, 1946, **2**, 14 стр.
6. О решениях топологической проблемы о двух красках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 43—62.
7. О симметрических решениях одного диофантова уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 63—84.
8. О решениях топологической задачи о четырех красках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 263—274.

# ИНДУЦИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ В ПОГРУЖЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ И АФФИННЫХ РАССЛОЕНИЯХ.

**Ю. Лумисте**

Кафедра алгебры и геометрии

## Введение

Многообразием $m$-плоскостей в $P_N$ называется образ $\mu^N{}_m(B_n)$ некоторого $n$-мерного дифференцируемого многообразия $B_n$ при его диффеоморфизме

$$\mu^N{}_m : B_n \text{ в } \Omega(m,N)$$

в грассманово многообразие $\Omega(m,N)$ $m$-мерных плоскостей $N$-мерного вещественного проективного пространства $P_N$. Точки в $P_N$, принадлежащие плоскостям $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ (если точки пересечения различных плоскостей рассматривать с их кратностью), образуют расслоенное пространство $V_{m+n}$, базой которого является многообразие $B_n$, типовым слоем — пространство $P_m$, и структурной группой — группа $GP(m,R)$ проективных преобразований пространства $P_m$. Это расслоенное пространство $V_{m+n}$ будем называть *проективным расслоением* $V_{m+n}$, погруженным в $P_N$.

*Оснащением* многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ называется процесс присоединения к точкам базы $B_n$ некоторых дополнительных геометрических образов в пространстве $P_N$, которые позволяют в известном смысле естественным образом определить связность в проективном расслоении $V_{m+n}$. Получаемая при этом связность называется *индуцированной* заданным оснащением.

Известны оснащения, индуцирующие некоторые связности в проективных расслоениях $V_{2n}$, образованных точками касательных плоскостей $\mu^N{}_n(x)$ $n$-мерных поверхностей $B_n$ в $P_N$. Э. Картан [12] ввел оснащение, которое состоит в присоединении к каждой точке $x$ поверхности $B_n$ некоторой $(N-n-1)$-плоскости $\nu^N{}_{N-n-1}(x)$, не пересекающей $n$-плоскость $\mu^N{}_n(x)$, касательную к $B_n$ в точке $x$, и которое индуцирует в $V_{2n}$ некоторую проективную связность. Задачу погружения проективной связности для этого оснащения рассматривал Чжэнь Шэн-шэнь [10].

А. П. Норден [7] присоединил к точке $x$: 1) $(N-n)$-плоскость $\pi^N{}_{N-n}(x)$, проходящую через $x$, и не имеющую с $\mu^N{}_n(x)$ других точек пересечения (нормаль первого рода), и 2) $(n-1)$-плоскость $\varkappa^N{}_{n-1}(x)$, лежащую в $\mu^N{}_n(x)$ и не проходящую через $x$ (нормаль второго рода), и показал, что при этом в $V_{2n}$ определяется некоторая аффинная связность без кручения. Если все плоскости $\varkappa^N{}_{n-1}(x)$ принадлежат одной гиперплоскости $P_{N-1}$ пространства $P_N$, то $P_N$ можно превратить в аффинное пространство с бесконечно удаленной гиперплоскостью $P_{N-1}$, и каждую плоскость $\nu^N{}_{N-n-1}(x)$ можно задавать ее направлением — пересечением с $P_{N-1}$. Некоторые трудные задачи, связанные с этим чисто аффинным оснащением, решили Г. Ф. Лаптев [2] (задача погружения), В. Клингенберг [16], А. Е. Либер [5], П. И. Швейкин [11] и др. (задача инвариантного оснащения). О. Гальвани [15] ввел аналогичное оснащение общего $n$-многообразия $n$-плоскостей $\mu^N{}_n(B_n)$ и показал, что оно индуцирует в $V_{2n}$ аффинную связность, кручение которой на заданной секущей поверхности в общем случае (когда поверхность не является огибающей) отлично от нуля. Задача погружения аффинной связности с кручением в смысле этого оснащения исследована О. Гальвани [15], А. К. Рыбниковым [8] и Р. Краснодебским [17].

В настоящей работе задача оснащения $n$-многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ проективного пространства $P_N$ рассматривается в ее наиболее общей постановке: размерности $m$ и $n$ плоскостей $\mu^N{}_m(x)$ и базы $B_n$ могут быть различными, причем не предполагается наличия какой-нибудь секущей (тем более огибающей) поверхности. Найдены некоторые общие классы оснащений таких многообразий $\mu^N{}_m(B_n)$, которые включают все известные оснащения и позволяют рассматривать их с более общих точек зрения. Следует отметить, что связности, индуцируемые рассматриваемыми оснащениями, также являются связностями наиболее общего типа для проективных или аффинных расслоений. Близки к ним связности в тривиальных проективных или аффинных расслоениях (в обобщенных многообразиях Кэнига), которые исследовали А. Швец [19, 20] и Б. Ценкл [13], предполагая наличие в каждом слое некоторого фиксированного подпространства («центра» слоя). У нас слоями являются проективные или аффинные пространства без каких-либо выделенных в них подпространств.

Первый параграф статьи имеет вводный характер. Излагаются понятия и результаты, нужные в дальнейшем: структурные уравнения Г. Ф. Лаптева для расслоенного пространства проективных реперов, связность в проективном расслоении и ее задание горизонтальным распределением.

Во втором параграфе рассматриваются простейшие оснащения многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ в $P_N$, индуцирующие в расслоенном пространстве $V_{m+n}$ проективную связность, — так называемые *сильные проективные оснащения*, являющиеся непосредственными обобщениями оснащений Картана: к каждой $m$-плоскости $\mu^N{}_m(x)$ присоединяется непересекающая ее $(N-m-1)$-плоскость $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. Возникает диффеоморфизм многообразия $B_n$ в симметрическое пространство $m$-пар $(P_m, P_{N-m-1})$ (в смысле Б. А. Розенфельда [9]). Интересна связь расслояемости пары [1] с кривизной индуцируемой связности: $\mu^N{}_m(B_n)$ расслояемо многообразием $\nu^N{}_{N-m-1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда индуцируемая в $V_{m+n}$ связность имеет нулевую кривизну.

В третьем параграфе задача проективного оснащения многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ рассматривается в наиболее общей постановке. К каждой точке $z$ проективного расслоения $V_{m+n} \subset P_N$, принадлежащей $m$-плоскости $\mu^N{}_m(x)$, присоединяется $(N-m)$-плоскость $\pi^N{}_{N-m}(z)$, пересекающая $\mu^N{}_m(x)$ только в точке $z$. С любой другой $m$-плоскостью $\mu^N{}_m(x')$, соответствующей произвольной точке $x' \in B_n$, достаточно близкой к $x$, эта $(N-m)$-плоскость $\pi^N{}_{N-m}(z)$ также пересекается только в одной точке $z'$. Определяется взаимно-однозначное отображение плоскости $\mu^N{}_m(x')$ на $\mu^N{}_m(x)$. Выводится условие, необходимое и достаточное, чтобы при стремлении $x'$ к $x$ в $B_n$ это отображение стремилось к проективному отображению, или, более точно, чтобы $(N-m)$-плоскости $\pi^N{}_{N-m}(z)$ пересекались с касательными к $V_{m+n}$ плоскостями в точках $z$ по $n$-плоскостям горизонтального распределения некоторой проективной связности в $V_{m+n}$. Анализ этих условий позволяет выделить довольно широкий класс так называемых *слабых проективных оснащений* многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$, содержащий все сильные проективные оснащения.

Четвертый параграф посвящен аффинным оснащениям многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$. В каждую $m$-плоскость $\mu^N{}_m(x)$ вводится «бесконечно удаленная» $(m-1)$-плоскость $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$. Многообразие $\varkappa^N{}_{m-1}(B_n)$ позволяет привести структурную группу $GP(m, R)$ расслоенного пространства $V_{m+n}$ к структурной группе $GA(m, R)$ нового расслоенного пространства $V^*{}_{m+n}$, полученного из $V_{m+n}$ удалением всех точек, принадлежащих плоскостям многообразия $\varkappa^N{}_{m-1}(B_n)$. Выводится условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $(N-m)$-плоскости $\pi^N{}_{N-m}(z)$ определяли в вышеуказанном смысле $n$-плоскости горизонтального распределения некоторой аффинной связности в $V^*{}_{m+n}$. Устанавливается, что при $N \leqslant \frac{1}{2} m(n+1)$ сильное проективное оснащение индуцирует в $V^*{}_{m+n}$ аффинную связность тогда и только тогда, когда оно является *сильным собственно-аффинным оснащением*, т. е. когда все плоскости $\nu_{N-m-1}(x)$ и $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ принадлежат одной (бесконечно удаленной) гиперплоскости в пространстве $P_N$.

В пятом, заключительном параграфе возвращаемся к той постановке задачи, которая имеется в известных оснащениях.

Предполагается, что в каждой плоскости $\mu^N{}_m(x)$ выбрана точка, описывающая в расслоенном пространстве $V_{m+n}$ некоторую секущую поверхность. Если при переходе от оснащений Картана и Гальвани к обобщающим их сильным проективным или собственно-аффинным оснащениям секущая (или огибающая) поверхность теряет свое значение, то оснащение Нордена допускает одно обобщение — так называемое *центро-аффинное* оснащение многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ —, в котором секущая поверхность используется уже существенным образом: все дополнительные плоскости присоединяются только к точкам этой поверхности.

Исследования в работе проводятся методом подвижного репера с применением теории расслоенных пространств и связностей в них, преимущественно в той форме, которую ей дал Г. Ф. Лаптев [3, 4]. Предполагается, что встречающиеся в работе многообразия достаточно гладкие и имеют топологическую структуру, допускающую все нужные отображения и дополнительные построения. Особенности самих этих структур остаются невыясненными.

Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$
\begin{aligned}
&I, K, L, \ldots &&= 0, 1, \ldots, N;\\
&Q, R, \ldots &&= 1, \ldots, N;\\
&u, v, w, \ldots &&= 0, 1, \ldots, m;\\
&a, b, c, \ldots &&= 1, \ldots, m;\\
&i, j, k, \ldots &&= m+1, \ldots, m+n;\\
&\alpha, \beta, \gamma, \ldots &&= m+1, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

## § 1. Связности в проективных расслоениях

1. Будем говорить, что $(m+n)$-мерное дифференцируемое многообразие $V_{m+n}$ представляет собой *проективное расслоение*, если $V_{m+n}$ является расслоенным пространством с $n$-мерной базой $B_n$, типовой слой которого совпадает с $m$-мерным вещественным проективным пространством $P_m$, а структурная группа — с группой $GP(m, R)$ проективных преобразований пространства $P_m$.

Проективное пространство $P_m$ можно, как известно, получить факторизацией множества ненулевых векторов $(m+1)$-мерного векторного пространства $L_{m+1}$ по следующему отношению эквивалентности: ненулевые векторы $X, Y \in L_{m+1}$ считаются эквивалентными, $X \sim Y$, если существует $\lambda \in R$, так что $Y = \lambda X$. Аналогично проективные расслоения можно получить из дифференцируемых векторных расслоений [18], если в них применить эту же факторизацию.

Проективным репером в $P_m$ называется класс эквивалентных упорядоченных систем $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ из $m+1$ линейно независимых векторов по следующему отношению эквивалентности: $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\} \sim \{A'_0, A'_1, \ldots, A'_m\}$, если существует $\lambda$, так что $A'_u = \lambda A_u$. Все проективные реперы во всех слоях проективного расслоения в $V_{m+n}$ образуют главное расслоенное пространство $E$ с базой $B_n$ и структурной группой $GP(m, R)$, которое будем называть *расслоенным пространством проективных реперов*. Пространство $V_{m+n}$ получается из него факторизацией по подгруппе $H$ стационарности точки пространства $P_m$ в группе $GP(m, R)$. (Относительно факторизации главного расслоенного пространства по подгруппе структурной группы см. [6]). Проективная группа $GP(m, R)$ изоморфна фактор-группе полной линейной группы $GL(m+1, R)$ по ее центру, состоящему из скалярных матриц $\|\lambda\delta^v{}_u\|$. Отсюда следует, что алгебра Ли группы $GP(m, R)$ изоморфна алгебре вычетов полной матричной алгебры по своему центральному идеалу, также состоящему из скалярных матриц. Элементами этой алгебры вычетов являются смежные классы, каждый из которых состоит из матриц вида

$$\|p^v{}_u + \lambda\delta^v{}_u\|,$$

где $\|p^v{}_u\|$ — некоторая фиксированная вещественная $(m+1) \times \times (m+1)$-матрица, $\lambda$ — произвольное вещественное число, а $\delta^v{}_u$ — символ Кронекера. Часто оказывается целесообразным в этих смежных классах выбрать некоторых канонических представителей. В дальнейшем мы будем пользоваться каноническим представителем, который соответствует значению $\lambda = -p^0{}_0$:

$$\|p^v{}_u - p^0{}_0\delta^v{}_u\|.$$

Этот представитель характеризуется тем, что в его левом верхнем углу стоит элемент, равный 0.

**2.** Нетрудно найти структурные уравнения Маурера—Картана для проективной группы $GP(m, R)$. Формы Маурера—Картана для полной линейной группы $GL(m+1, R)$, как известно, удовлетворяют следующим структурным уравнениям

$$d\omega^v{}_u = \omega^w{}_u \wedge \omega^v{}_w,$$

вытекающим из определения коммутатора в полной матричной алгебре. Отсюда для форм

$$\sigma^v{}_u = \omega^v{}_u - \omega^0{}_0\delta^v{}_u, \tag{1.1}$$

являющихся элементами канонического представителя смежнего класса матриц — элемента алгебры Ли группы $GP(m, R)$ —, содержащего матрицу $\|\omega^v{}_u\|$, следуют структурные уравнения

$$d\sigma^v{}_u = \sigma^w{}_u \wedge \sigma^v{}_w - \delta^v{}_u(\sigma^a{}_0 \wedge \sigma^0{}_a), \tag{1.2}$$

или, более подробно,

$$d\sigma^a = \sigma^b \wedge \sigma^a{}_b, \tag{1.3}$$

$$d\sigma^a{}_b = \sigma^c{}_b \wedge \sigma^a{}_c + (\delta^a{}_b\sigma_c + \delta^a{}_c\sigma_b) \wedge \sigma^c, \tag{1.4}$$

$$d\sigma_b = \sigma^a{}_b \wedge \sigma_a. \tag{1.5}$$

(Здесь в обозначениях форм $\sigma^a{}_0$ и $\sigma^0{}_a$ для простоты опущены индексы 0). Формы $\sigma^a$, $\sigma^a{}_b$, $\sigma_a$ естественно рассматривать как формы Маурера—Картана для группы $GP(m, R)$, а полученные уравнения (1.3—5) — как структурные уравнения Маурера—Картана для $GP(m, R)$.

Из уравнений (1.3) следует, что система пфаффовых уравнений $\sigma^a = 0$ является вполне интегрируемой. Она выделяет в $GP(m, R)$ подгруппу $H$ стационарности точки пространства $P_m$. Формы $\sigma^a$ составляют систему кобазисов на многообразии смежных классов $GP(m, R)/H$, представляющем собой многообразие точек в $P_m$.

Аналогично возникает двойственное понятие. Система $\sigma_a = 0$ выделяет подгруппу стационарности гиперплоскости, которая называется аффинной группой и обозначается через $GA\ (m, R)$. Ее структурные уравнения получаются из структурных уравнений (1.3—5) подстановкой $\sigma_a = 0$:

$$d\sigma^a = \sigma^b \wedge \sigma^a{}_b, \tag{1.3'}$$

$$d\sigma^a{}_b = \sigma^c{}_b \wedge \sigma^a{}_c. \tag{1.4'}$$

3. Структурные уравнения Г. Ф. Лаптева [4] для расслоенного пространства проективных реперов $E$ (с проекцией $p : E$ на $B_n$) получаются, если на $E$ в прообразе $p^{-1}(U)$ настолько малой области $U \subset B_n$, что существует диффеоморфизм

$$\varphi_U\colon\ p^{-1}(U) \ \textit{на}\ U \times GP(m, R),$$

ввести систему кобазисов $(\sigma^v{}_u, \theta^i)$, так чтобы касательное пространство к слою $p^{-1}(x)$ в точке $z$ имело уравнения $\theta^i{}_z = 0$. Так как распределение этих касательных пространств на $E$ (вертикальное распределение), очевидно, инволютивно, то система $\theta^i = 0$ оказывается вполне интегрируемой. Следовательно, коварианты $d\theta^i = 0$ этой системы являются алгебраическими следствиями уравнений самой системы, и поэтому

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i{}_j. \tag{1.6}$$

Формы $\theta^i$ могут быть выражены через дифференциалы $n$ параметров, играющих роль локальных координат на базе. При фиксации точки $x \in B_n$ формы $\theta^i$ обращаются в нуль:

$$\theta^i = 0.$$

С другой стороны, каждый слой $p^{-1}(x)$ диффеоморфен группе $GP(m, R)$, и поэтому в качестве 1-форм $\sigma^v{}_u$ системы кобазисов на $E$ могут быть выбраны образы форм Маурера—Картана группы $GP(m, R)$ при дуальном дифференциале $\delta\varphi_U$ локального диффеоморфизма $\varphi_U$. При $\theta^i = 0$ эти формы удовлетворяют тогда структурным уравнениям группы $GP(m, R)$, вследствие чего

$$d\sigma^v{}_u = \sigma^w{}_u \wedge \sigma^v{}_w - \delta^v{}_u(\sigma^a{}_0 \wedge \sigma^0{}_a) + \theta^i \wedge \sigma^v{}_{ui}. \tag{1.7}$$

Более подробно:

$$d\sigma^a = \sigma^b \wedge \sigma^a{}_b + \theta^i \wedge \sigma^a{}_i, \tag{1.8}$$

$$d\sigma^a{}_b = \sigma^c{}_b \wedge \sigma^a{}_c + (\delta^a{}_b\sigma_c + \delta^a{}_c\sigma_b) \wedge \sigma^c + \theta^i \wedge \sigma^a{}_{bi}, \tag{1.9}$$

$$d\sigma_b = \sigma^a{}_b \wedge \sigma_a + \theta^i \wedge \sigma_{bi}. \tag{1.10}$$

Уравнения (1.6), (1.8—10) представляют собой структурные уравнения Г. Ф. Лаптева для расслоенного пространства проективных реперов $E$. Входящие в них формы могут быть подвергнуты всем преобразованиям, не изменяющим структуру этих уравнений, в частности, преобразованиям $\sigma^v{}_u = \sigma^v{}_u - \Gamma^v{}_{ui}\theta^i$, где $\Gamma^v{}_{ui}$ — произвольные функции. Поэтому необязательно связывать формы $\sigma^v{}_u$ с некоторым заданным локальным диффеоморфизмом $\varphi_U$. Метод приобретает совершенно инвариантный характер.

4. Из уравнений (1.6) и (1.8) следует, что система $\theta^i = 0$, $\sigma^a = 0$ вполне интегрируема. Следовательно, формы $\sigma^a$ могут быть выражены через дифференциалы $m+n$ параметров, определяющих положение точки в некоторой области нового расслоенного пространства $V_{m+n}$, которое возникает при факторизации расслоенного пространства проективных реперов $E$ по подгруппе $H$ стационарности точки (см. п. 2). Типовым слоем многообразия $V_{m+n}$ является фактор-многообразие $GP(m, R)/H$, представляющее собой точечное проективное пространство $P_m$. Поэтому на многообразии $V_{m+n}$ определяется структура проективного расслоения. Формы $\theta^i$ и $\sigma^a$ образуют систему кобазисов на некоторой области этого проективного расслоения $V_{m+n}$.

5. Пусть дано некоторое расслоенное многообразие $V$ с базой $B$, проекцией $p$, типовым слоем $F$ и структурной группой $G$. Связность в $V$ можно определить как отображение множества всех путей в базе $B$ в множество всех диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющее определенным аксиомам [6]. Каждому пути $\lambda(x_0, x_1) \subset B$ соответствует диффеоморфизм слоя $p^{-1}(x_1)$ на слой $p^{-1}(x_0)$, называемый горизонтальным (или «параллельным») перенесением вдоль пути $\lambda$. Из каждой точки $z_0 \in V$ для каждого пути $\lambda \subset B$, начинающегося из $x_0 = p(z_0)$, исходит так называемый горизонтальный путь в $V$ над $\lambda$, состоящий из точек, отображающихся в точку $z_0$ при горизонтальных перенесениях вдоль всевозможных частей $\lambda_t(x_0, x_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, пути $\lambda$.

Касательные ко всем горизонтальным путям, исходящим из точки $z_0$, образуют, в случае линейной связности, плоскость в касательном к $V$ пространстве, которая пересекает плоскость, касательную к слою, только в точке $z$, и имеет размерность, равную размерности базы. Эта плоскость называется горизонтальной плоскостью в точке $z$ для данной связности. Все горизонтальные плоскости образуют горизонтальное распределение на $V$, которое, обратно, однозначно определяет рассматриваемую связность: горизонтальные пути являются его интегральными путями, горизонтальное перенесение определяется семейством горизонтальных путей. Можно сказать, что горизонтальное распределение определяет горизонтальное перенесение инфинитезимально: при непрерывном горизонтальном перенесении точек слоя вдоль некоторого пути эти точки в каждый момент смещаются в плоскостях горизонтального распределения.

Если $V$ является главным расслоенным пространством, то аналитически горизонтальное распределение на $V$ удобно задавать как аннулятор некоторой 1-формы $\sigma$ типа $adG$ на $V$ со значениями в алгебре Ли группы $G$. При этом оказывается [3, 10], что 2-форма на $V$

$$\Omega = d\sigma + \tfrac{1}{2}[\sigma\sigma]$$

является полубазовой типа $adG$, т. е. $\Omega(X, У) = 0$, если хотя бы одно из векторных полей $X$, $У$ на $V$ является вертикальным.

Г. Ф. Лаптевым доказано [3], что последнее условие также достаточно. Если на главном расслоении пространстве $V$ дана 1-форма $\sigma$ со значениями в алгебре Ли группы $G$, так что 1) каждый элемент этой алгебры является значением формы $\sigma$ на векторе соответствующего фундаментального поля и 2) составленная из $\sigma$ 2-форма $\Omega$ на $V$ является полубазовой, то аннулятор этой 1-формы $\sigma$ является горизонтальным распределением некоторой связности в $V$.

**6.** Прежде чем приступить к исследованию связностей для проективных расслоений, сделаем небольшое отступление, касающееся аппаратуры.

Пусть на дифференцируемом многообразии задана система дифференцируемых функций, нумерованных индексами из нескольких серий $a, b, c, \ldots$ ; $i, j, k, \ldots$ ; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и т. д. Примером такой системы может служить

$$T^{cjk\beta}_{abi\alpha}.$$

Пусть каждой серии индексов сопоставлена квадратная матрица из 1-форм, удовлетворяющих следующим структурным уравнениям:

$$d\omega^b{}_a = \omega^c{}_a \wedge \omega^b{}_c + \Omega^b{}_a, \tag{1.11}$$

$$d\omega^j{}_i = \omega^k{}_i \wedge \omega^j{}_k + \Omega^j{}_i, \tag{1.12}$$

$$d\omega^\beta{}_\alpha = \omega^\gamma{}_\alpha \wedge \omega^\beta{}_\gamma + \Omega^\beta{}_\alpha \quad \text{и т. д.} \tag{1.13}$$

Введем оператор $\nabla$, действие которого на функции заданной системы становится ясным из следующего примера:

$$\nabla S^{bj\beta}_{ai\alpha} = dS^{bj\beta}_{ai\alpha} - S^{bj\beta}_{ci\alpha}\,\omega^c{}_a + S^{cj\beta}_{ai\alpha}\,\omega^b{}_c - S^{bj\beta}_{ak\alpha}\,\omega^k{}_i + {} + S^{bk\beta}_{ai\alpha}\,\omega^j{}_k - S^{bj\beta}_{ai\gamma}\,\omega^\gamma{}_\alpha + S^{bj\gamma}_{ai\alpha}\,\omega^\beta{}_\gamma. \tag{1.14}$$

Как видно, к дифференциалу функции прибавляется многочлен, в котором каждому индексу каждой серии соответствует член, являющийся результатом свертывания системы функции с матрицей 1-форм для этой серии индексов. Каждый член снабжается знаком + или — в зависимости от того, соответствует ли он верхнему или нижнему индексу. Этот оператор $\nabla$ обобщает оператор ковариантного дифференцирования в теории пространств аффинной связности.

Легко установить, что оператор $\nabla$ является линейным дифференциальным оператором, перестановочным с операцией свертывания, и что

$$d(\nabla S^{bj\beta}_{ai\alpha}) = -\nabla S^{bj\beta}_{ci\alpha} \wedge \omega^c{}_a + \ldots + \nabla S^{bj\gamma}_{ai\alpha} \wedge \omega^\beta{}_\gamma - \\ - S^{bj\beta}_{ci\alpha} \Omega^c{}_a + \ldots + S^{bj\gamma}_{ai\alpha} \Omega^\beta{}_\gamma . \tag{1.15}$$

7. Для задания связности в расслоенном пространстве проективных реперов $E$ достаточно по Г. Ф. Лаптеву задать на $E$ совокупность 1-форм

$$'\sigma^v{}_u = \sigma^v{}_u + \Gamma^v{}_{ui}\theta^i \tag{1.16}$$

так, чтобы составленные из них 2-формы

$$\Omega^v{}_u = d'\sigma^v{}_u - '\sigma^w{}_u \wedge '\sigma^u{}_w + \delta^v{}_u('\sigma^a{}_0 \wedge '\sigma^0{}_a) \tag{1.17}$$

оказались полубазовыми формами на $E$, т. е. выражались в виде

$$\Omega^v{}_u = \tfrac{1}{2} R^v{}_{uij}\theta^i \wedge \theta^j. \tag{1.18}$$

Здесь приведенные коэффициенты $R^v{}_{uij}$ составляют объект кручения-кривизны связности.

Указанное условие накладывает на величины $\Gamma^v{}_{ui}$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\nabla \Gamma^v{}_{ui} + \delta^v{}_u(\Gamma^0{}_{ai}\sigma^a - \Gamma^a{}_{0i}\sigma_a) - \sigma^v{}_{ui} = \Gamma^v{}_{uij}\theta^j \tag{1.19}$$

или, более подробно,

$$\nabla \Gamma^a{}_i = \sigma^a{}_i + \Gamma^a{}_{bi}\sigma^b + \Gamma^a{}_{ij}\theta^j, \tag{1.20}$$

$$\nabla \Gamma^b{}_{ai} = \sigma^b{}_{ai} + (\delta^b{}_a\Gamma^c{}_i + \delta^c{}_a\Gamma^b{}_i)\sigma_c - \\ - (\delta^b{}_a\Gamma_{ci} + \delta^b{}_c\Gamma_{ai})\sigma^c + \Gamma^b{}_{aij}\theta^j, \tag{1.21}$$

$$\nabla \Gamma_{ai} = \sigma_{ai} + \Gamma^b{}_{ai}\sigma_b + \Gamma_{aij}\theta^j. \tag{1.22}$$

(Здесь в последних уравнениях для простоты опущен индекс 0; в операторе $\nabla$ отдельным сериям индексов соответствуют следующие квадратные матрицы из 1-форм: $\|\sigma^v{}_u\|$, $\|\sigma^b{}_a\|$, $\|\theta^j{}_i\|$.)

Горизонтальное распределение связности является аннулятором системы форм $'\sigma^v{}_u$, т. е. путь в $E$ (или однопараметрическое семейство проективных реперов) является горизонтальным, если

$$'\sigma^v{}_u = 0$$

в его точках на касательных к нему векторах. Следовательно, последние уравнения характеризуют инфинитезимально горизонтальное перенесение репера.

8. Связность в расслоенном пространстве проективных реперов $E$ индуцирует некоторую связность также в проективном расслоении $V_{m+n}$. Горизонтальное распределение этой связности определяется уравнениями $'\sigma^a = 0$ или

$$\sigma^a + \Gamma^a{}_i\theta^i = 0. \tag{1.23}$$

В дальнейшем существенное значение имеет обратный подход к понятию связности в проективном расслоении $V_{m+n}$, когда связность $V_{m+n}$ задается не посредством индуцирующей ее связности в расслоенном пространстве проективных реперов $E$, а непосредственно с помощью горизонтального распределения. При этом важно установить необходимые и достаточные условия для того, чтобы некоторое распределение на $V_{m+n}$ могло быть горизонтальным распределением некоторой связности в $V_{m+n}$.

Пусть к каждой точке $y$ многообразия $V_{m+n}$ присоединена $n$-мерная плоскость в касательном к $V_{m+n}$ пространстве в точке $y$, проходящая через $y$ и пересекающаяся с касательной плоскостью к слою только в точке $y$. Такую плоскость можно представить уравнениями (1.23), если рассматривать их в заданной точке $y$. Коэффициенты $\Gamma^a{}_i$ в этих уравнениях должны удовлетворять некоторой системе дифференциальных уравнений, для того, чтобы определяемая ими плоскость была инвариантно присоединена к точке $y$.

Пусть $\delta$ обозначает символ дифференцирования при фиксированной точке $y \in V_{m+n}$. Тогда

$$\theta^i(\delta) = \sigma^a(\delta) = 0$$

и поэтому из (1.6) и (1.8) вытекают следующие уравнения

$$\delta\theta^i = -\theta^j\theta^i{}_j(\delta), \tag{1.24}$$

$$\delta\sigma^a = -\sigma^b\sigma^a{}_b(\delta) - \theta^i\sigma^a{}_i(\delta), \tag{1.25}$$

в которых для простоты опущен символ $d$ наиболее общего дифференцирования. Полученные уравнения можно рассматривать как уравнения инфинитезимального изменения кобазиса $(\theta^i, \sigma^a)$ на $V_{m+n}$ в заданной точке $y$.

Условие инвариантности плоскости (1.23) можно выразить в следующем виде. Для ковекторов

$$'\sigma^a = \sigma^a + \Gamma^a{}_i\theta^i$$

должны иметь место уравнения

$$\delta'\sigma^a = -'\sigma^b\sigma^a{}_b(\delta).$$

Так как вообще

$$\nabla\delta'\sigma^a = -'\sigma^b\sigma^a{}_b(\delta) + \theta^i\{\delta\Gamma^a{}_i - \Gamma^a{}_j\theta^j{}_i(\delta) + \Gamma^b{}_i\sigma^a{}_b(\delta) - \sigma^a{}_i(\delta)\},$$

то $\Gamma^a{}_i$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \Gamma^a{}_i - \sigma^a{}_i = \Gamma^a{}_{bi}\sigma^b + \Gamma^a{}_{ij}\theta^j, \qquad (1.26)$$

где $\Gamma^a{}_{bi}$, $\Gamma^a{}_{ij}$ — некоторые новые системы величин.

Эта система инвариантности плоскости (1.23), как видно, совпадает с системой уравнений (1.20) для части компонентов объекта связности в расслоенном пространстве проективных реперов $E$. Путём продолжения этой системы (1.26) можно найти систему дифференциальных уравнений для новых величин $\Gamma^a{}_{bi}$. Для этого нужно прежде всего произвести продолжение структурных уравнений (1.6), (1.8), (1.9), что приводит к уравнениям

$$d\theta^i{}_j = \theta^k{}_j \wedge \theta^i{}_k + \theta^k \wedge \theta^i{}_{jk}, \qquad (1.27)$$

$$d\sigma^a{}_i = \sigma^b{}_i \wedge \sigma^a{}_b - \sigma^a{}_j \wedge \theta^j{}_i + \sigma^b \wedge \sigma^a{}_{bi} + \theta^j \wedge \sigma^a{}_{ij}, \qquad (1.28)$$

$$d\sigma^b{}_{ai} = \sigma^c{}_{ai} \wedge \sigma^b{}_c - \sigma^b{}_{ci} \wedge \sigma^c{}_a - \sigma^b{}_{aj} \wedge \theta^j{}_i + (\delta^b{}_a\sigma_{ci} + \delta^b{}_c\sigma_{ai}) \wedge \sigma^c + $$
$$+ (\delta^b{}_a\sigma_c + \delta^b{}_c\sigma_a) \wedge \sigma^c{}_i + \theta^j \wedge \sigma^b{}_{aij}. \qquad (1.29)$$

Затем внешнее дифференцирование уравнений (1.26) с использованием формулы (1.15) дает следующие результаты:

$$\{\nabla \Gamma^a{}_{bi} - (\delta^a{}_b\Gamma^c{}_i + \delta^c{}_b\Gamma^a{}_i)\sigma_c - \sigma^a{}_{bi}\} \wedge \sigma^b + (\ldots)^a{}_{ij} \wedge \theta^j = 0.$$

Отсюда находим:

$$\nabla \Gamma^a{}_{bi} - (\delta^a{}_b\Gamma^c{}_i + \delta^c{}_b\Gamma^a{}_i)\sigma_c - \sigma^a{}_{bi} = \Gamma^a{}_{bci}\sigma^c + \Gamma^a{}_{bij}\theta^j. \qquad (1.30)$$

Сравнение полученной системы с системой (1.21) для части компонентов объекта связности показывает, что распределение на $V_{m+n}$, произвольная плоскость которого определяется уравнениями (1.23), может оказаться горизонтальным распределением некоторой связности в $V_{m+n}$ только тогда, когда совокупность величин $\Gamma^a{}_{bci}$, возникающих при продолжении объекта $\Gamma^a{}_i$, определяющего распределение, имеет следующее специальное строение:

$$\Gamma^a{}_{bci} = -(\delta^a{}_b\Gamma_{ci} + \delta^a{}_c\Gamma_{bi}). \qquad (1.31)$$

Допустим, что существует система величин $\Gamma_{ci}$, так что имеют место соотношения (1.31). Продифференцировав внешним образом уравнения системы (1.30) и использовав формулы (1.15), (1.8—10), (1.29), получим следующие результаты:

$$\{\delta^a{}_b(\nabla \Gamma_{ci} + \Gamma^d{}_{ci}\sigma_d - \sigma_{ci}) + \delta^a{}_c(\nabla \Gamma_{bi} + \Gamma^d{}_{bi}\sigma_d - \sigma_{bi})\} \wedge \sigma^c +$$
$$+ (\ldots)^a{}_{bij} \wedge \theta^j = 0.$$

Отсюда, после свертывания по индексам $a$, $c$, находим, что

$$\nabla \Gamma_{bi} + \Gamma^a{}_{bi}\sigma_a - \sigma_{bi} = \Gamma_{bci}\sigma^c + \Gamma_{bij}\theta^j. \qquad (1.32)$$

Сравнение с системой (1.22) показывает, что к необходимым условиям (1.31) добавляются следующие условия:

$$\Gamma_{bci} = 0. \qquad (1.33)$$

Очевидно, что условия (1.31) и (1.33) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы объект $\Gamma^a{}_i$ вместе с возникающими при его продолжении объектами $\Gamma^a{}_{bi}$ и $\Gamma_{bi}$ определил связность в проективном расслоении $V_{m+n}$.

В итоге можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Распределение на проективном расслоении* $V_{m+n}$, *которое определяется объектом* $\Gamma^a{}_i$ *согласно* (1.23), *является горизонтальным распределением некоторой связности в* $V_{m+n}$ *тогда и только тогда, когда система величин* $\Gamma^a{}_{bci}$ *в уравнениях* (1.30), *возникающих при продолжении системы* (1.26) *для объекта* $\Gamma^a{}_i$, *имеет строение* (1.31) *и в системе дифференциальных уравнений* (1.32) *для величин* $\Gamma_{bi}$ *имеет место равенство* (1.33).

Из этой теоремы следует, в частности, что горизонтальное распределение связности в проективном расслоении $V_{m+n}$ вполне определяет эту связность. В самом деле, из (1.31) путем свертывания по $a$ и $c$ получаем, что

$$(m+1)\Gamma_{bi} = -\Gamma^a{}_{bai}, \tag{1.34}$$

т. е. величины $\Gamma_{bi}$ в (1.31) определяются однозначно системой величин $\Gamma^a{}_{bci}$, возникающей при продолжении объекта $\Gamma^a{}_i$, который задается распределением.

## § 2. Сильные проективные оснащения многообразия плоскостей

1. Многообразием $m$-плоскостей в $P_N$ будем называть образ $\mu^N{}_m(B_n)$ некоторого $n$-мерного дифференцируемого многообразия $B_n$ при диффеоморфизме

$$\mu^N{}_m : B_n \text{ в } \Omega(m, N)$$

этого многообразия в грассманово многообразие $\Omega(m,N)$ $m$-мерных плоскостей $N$-мерного вещественного проективного пространства $P_N$. (Такой диффеоморфизм $\mu^N{}_m$ при заданных $n$, $m$ и $N$ существует не для всякого многообразия $B_n$, но имеются примеры многообразий — например, область числового пространства $R^n$ —, которые его всегда допускают.)

Вместе с многообразием плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ определено также многообразие $V$ пар $(x, y)$, где $x \in B_n$, а $y$ принадлежит плоскости $\mu^N{}_m(x)$. В дальнейшем будем всегда предполагать, что

$$\dim V = m + n. \tag{2.1}$$

Тогда, очевидно, $m+n \leqslant N$. В частном случае, когда $m+n = N$, многообразие $V$ $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ называется *конгруэнцией* $m$-плоскостей.

Многообразие $V$ при предположении (2.1) можно рассматривать как многообразие $V_{m+n}$, обладающее структурой проективного расслоения. Поэтому при ее изучении можно, в частности, применять понятия и результаты предыдущего параграфа.

2. Многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ и определяемые ими проективные расслоения $V_{m+n}$ удобно исследовать методом подвижного репера Э. Картана.

Пусть в пространстве $P_N$ задан подвижной репер $\{A_0, A_1, \ldots, A_N\}$, произвол которого ограничен только тем, что в каждом положении репера первые $m+1$ вершин $A_u$ $(u=0, 1, \ldots, m)$ принадлежат некоторой плоскости $\mu^N{}_m(x)$ нашего многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$. Инфинитезимальное перемещение репера определяется формулами

$$dA_I = A_K\omega^K{}_I \quad (I, K, L, \ldots = 0, 1, \ldots, N), \qquad (2.2)$$

в которых формы $\omega^K{}_I$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^K{}_I = \omega^L{}_I \wedge \omega^K{}_L. \qquad (2.3)$$

При этом нужно учитывать, что реперы $\{A_0, A_1, \ldots, A_N\}$ и $\{\lambda A_0, \lambda A_1, \ldots, \lambda A_N\}$ в проективном пространстве $P_N$ отождествляются. Поэтому формы $\omega^K{}_I$ определяются с точностью до слагаемого вида $\Theta\delta^K{}_I$, где $\Theta = d\ln\lambda$ — произвольная замкнутая пфаффова форма. Чтобы освободиться от этого произвола, целесообразно ввести формы

$$\sigma^K{}_I = \omega^K{}_I - \omega^0{}_0\delta^K{}_I, \qquad (2.4)$$

которые, в силу (2.3), удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\sigma^K{}_I = \sigma^L{}_I \wedge \sigma^K{}_L - \delta^K{}_I(\sigma^Q{}_0 \wedge \sigma^0{}_Q) \quad (Q = 1, \ldots, N), \qquad (2.5)$$

аналогичным (1.2). Формулы (2.2) можно теперь записать в виде

$$dA_I = A_I\omega^0{}_0 + A_K\sigma^K{}_I. \qquad (2.6)$$

Пусть дано покрытие $\{U\}$ многообразия $B_n$ областями $U$, каждая из которых снабжена системой кобазисов $\{\theta^{m+1}, \ldots, \theta^{m+n}\}$, составленной из 1-форм $\theta^i$ на $U$. Здесь формы $\theta^i$ линейно независимы в каждой точке $x \in U$ и образуют вполне интегрируемую пфаффову систему, т. е. удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i{}_j. \qquad (1.6)$$

При фиксации точки $x$ на многообразии $B_n$ фиксируется также плоскость $\mu^N{}_m(x)$. Поэтому из $\theta^i = 0$ должны вытекать уравнения

$$dA_u = A_v\omega^v{}_u.$$

Так как из формул (2.6) получается

$$dA_u = A_u\omega^0{}_0 + A_v\sigma^v{}_u + A_\alpha\sigma^\alpha{}_u, \qquad (2.7)$$

то в данном случае должны иметь место уравнения

$$\sigma^\alpha{}_u = \Lambda^\alpha{}_{ui}\theta^i. \qquad (2.8)$$

Из структурных уравнений (2.5) следует теперь, что

$$d\sigma^v{}_u = \sigma^w{}_u \wedge \sigma^v{}_w - \delta^v{}_u(\sigma^a{}_0 \wedge \sigma^0{}_a) + \theta^i \wedge \sigma^v{}_{ui}, \tag{2.9}$$

$$d\sigma^\beta{}_\alpha = \sigma^\gamma{}_\alpha \wedge \sigma^\beta{}_\gamma - \delta^\beta{}_\alpha(\sigma^a{}_0 \wedge \sigma^0{}_a) + \theta^i \wedge \sigma^\beta{}_{\alpha i}, \tag{2.10}$$

где

$$\sigma^v{}_{ui} = \Lambda^\alpha{}_{iu}\sigma^v{}_\alpha - \delta^v{}_u \Lambda^\alpha{}_{0i}\sigma^0{}_\alpha, \tag{2.11}$$

$$\sigma^\beta{}_{\alpha i} = -\Lambda^\beta{}_{ui}\sigma^u{}_\alpha - \delta^\beta{}_\alpha \Lambda^\gamma{}_{0i}\sigma^0{}_\gamma. \tag{2.12}$$

Уравнения (1.6) и (2.9) представляют собой структурные уравнения Г. Ф. Лаптева для расслоенного пространства $E$ проективных реперов, принадлежащих плоскостям многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$. Формы $\sigma^v{}_{ui}$ в них, как видно, определяются совокупностью величин $\Lambda^\alpha{}_{ui}$, которая называется фундаментальным объектом первого порядка многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$. Согласно методу продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [3] вся дифференциальная геометрия многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ определяется фундаментальным объектом некоторого достаточно высокого порядка, который получается последовательными дифференциальными продолжениями исходного объекта $\Lambda^\alpha{}_{ui}$. В настоящей статье наши исследования не выходят из дифференциальной окрестности второго порядка плоскости $\mu^N{}_m(x)$. Поэтому нам достаточно ограничиться фундаментальным объектом второго порядка.

Компоненты фундаментального объекта первого порядка $\Lambda^\alpha{}_{ui}$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \Lambda^\alpha{}_{ui} = \Lambda^\alpha{}_{uij}\theta^j, \tag{2.13}$$

которая получается продолжением уравнений (2.8). Здесь в операторе $\nabla$ отдельным сериям индексов соответствуют квадратные матрицы $\|\sigma^v{}_u\|$, $\|\theta^j{}_i\|$, $\|\sigma^\beta{}_\alpha\|$.

Следующее продолжение этой системы с помощью формул (1.15), (1.6), (2.9, 10) дает:

$$\nabla \Lambda^\alpha{}_{uij} = \Lambda^\alpha{}_{vi}\sigma^v{}_{uj} + \Lambda^\alpha{}_{uk}\theta^k{}_{ij} - \Lambda^\beta{}_{ui}\sigma^\alpha{}_{\beta j} + \Lambda^\alpha{}_{uijk}\theta^k. \tag{2.14}$$

Совокупность величин $\Lambda^\alpha{}_{ui}$, $\Lambda^\alpha{}_{uij}$ составляет фундаментальный объект второго порядка многообразия плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$.

3. Пусть в проективном расслоении $V_{m+n} \subset P_N$, которое определяется многообразием $\mu^N{}_m(B_n)$, задана связность горизонтальным распределением, плоскость которого в точке $y$ определяется системой уравнений

$$\sigma^u + \Gamma^u{}_i\theta^i = 0. \tag{1.23}$$

Если вершину $A_0$ репера поместить в точку $y$, то при смещении вершины $A_0$ в этой плоскости имеем $\sigma^u = -\Gamma^u{}_i\theta^i$, и поэтому, в силу (2.7, 8),

$$dA_0 = A_0\omega^0{}_0 + (\Lambda^\alpha{}_{0i}A_\alpha - \Gamma^a{}_iA_a)\,\theta^i.$$

Отсюда следует, что горизонтальная плоскость связности в точке $A_0$ натянута на эту точку $A_0$ и точки

$$M_i = \Lambda^{\alpha}{}_{0i} A_{\alpha} - \Gamma^{a}{}_{i} A_{a} \tag{2.15}$$

в касательной к $V_{m+n}$ плоскости в точке $A_0$.

Обратно, для того, чтобы распределение на $V_{m+n} \subset P_N$, плоскость которой в точке $A_0$ натянута на эту точку $A_0$ и точки (2.15), было горизонтальным распределением некоторой связности в $V_{m+n}$, необходимо и достаточно, чтобы объект $\Gamma^{a}{}_{i}$ удовлетворял условиям теоремы 1. Задание такого распределения вводит в $V_{m+n}$ некоторую однозначно определенную связность. Здесь тот факт, что $V_{m+n}$ погружено в $P_N$, не играет пока никакой роли. Указанным путем можно в $V_{m+n}$ получить произвольную допускаемую им связность.

Иначе обстоит дело, если мы горизонтальное распределение на $V_{m+n}$ будем задавать не непосредственно, а при помощи многообразия некоторых дополнительных геометрических образов в пространстве $P_N$, присоединенных к плоскостям исходного многообразия $\mu^{N}{}_{m}(B_n)$ — путем так называемого *оснащения* многообразия $\mu^{N}{}_{m}(B_n)$.

Известен один сравнительно простой способ такого задания, который до сих пор применялся лишь в частном случае многообразия касательных плоскостей некоторой поверхности $V_n$ в пространстве $P_N$ и который допускает, однако, распространение на более общий случай.

4. Пусть к каждой $m$-плоскости $\mu^{N}{}_{m}(x)$ многообразия $\mu^{N}{}_{m}(B_n)$ присоединена $(N-m-1)$-мерная плоскость $\nu^{N}{}_{N-m-1}(x)$ в пространстве $P_N$, не имеющая общих точек с плоскостью $\mu^{N}{}_{m}(x)$, так чтобы возникающее отображение $\nu^{N}{}_{N-m-1}$ базы $B_n$ в грассманово многообразие $\Omega\,(N-m-1,\ N)$ оказалось диффеоморфизмом.

Такую плоскость $\nu^{N}{}_{N-m-1}(x)$ можно задать $N-m$ точками

$$M_{\alpha} = A_{\alpha} - q^{u}{}_{\alpha} A_{u}, \tag{2.16}$$

каждая из которых лежит на прямой, проходящей через вершину $A_{\alpha}$ репера и точку пересечения $(N-m)$-плоскости, натянутой на $A_{\alpha}$ и $\nu^{N}{}_{N-m-1}(x)$, с плоскостью $\mu^{N}{}_{m}(x)$. Плоскость $\nu^{N}{}_{N-m-1}(x)$ связана инвариантно с плоскостью $\mu^{N}{}_{m}(x)$, если из $\theta^{i}=0$ вытекает, что

$$dM_{\alpha} = \omega^{\beta}{}_{\alpha} M_{\beta}.$$

Это условие накладывает на величины $q^{u}{}_{\alpha}$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\nabla q^{u}{}_{\alpha} - \sigma^{u}{}_{\alpha} = q^{u}{}_{\alpha i} \theta^{i}. \tag{2.17}$$

Определим теперь $n$-мерное распределение на многообразии

$V_{m+n} \subset P_N$, принимая за $n$-плоскость распределения в точке $A_0$ пересечение касательной $(m+n)$-плоскости к $V_{m+n}$ в точке $A_0$ с $(N-m)$-плоскостью, натянутой на $A_0$ к $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. Так как дифференциал $dA_0$ можно представить в виде

$$dA_0 = A_u\pi^u + \Lambda^\alpha{}_{0i}M_\alpha\theta^i,$$

то плоскость такого распределения натянута на точки $A_0$ и $\Lambda^\alpha{}_{0i}M_\alpha$ или, в силу (2.16), на точки $A_0$ и

$$M_i = \Lambda^\alpha{}_{0i}A_\alpha - \Lambda^\alpha{}_{0i}q^a{}_\alpha A_a. \tag{2.18}$$

Оказывается, что это распределение определяет всегда некоторую связность в $V_{m+n}$. Для этого нужно проверить, что совокупность величин

$$\Gamma^a{}_i = \Lambda^\alpha{}_{0i}q^a{}_\alpha \tag{2.19}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Систему (2.17) можно записать в виде

$$\nabla q^a{}_\alpha + q_\alpha\sigma^a - \sigma^a{}_\alpha = q^a{}_{\alpha i}\theta^i, \tag{2.20}$$

$$\nabla q_\alpha + q^a{}_\alpha\sigma_a - \sigma_\alpha = q_{\alpha i}\theta^i, \tag{2.21}$$

где для простоты опущен индекс 0 в обозначении величин $q^0{}_\alpha$. Аналогично систему (2.13) можно представить в виде

$$\nabla\Lambda^\alpha{}_i - \Lambda^\alpha{}_{ai}\sigma^a = \Lambda^\alpha{}_{ij}\theta^j, \tag{2.22}$$

$$\nabla\Lambda^\alpha{}_{ai} - \Lambda^\alpha{}_i\sigma_a = \Lambda^\alpha{}_{aij}\theta^j, \tag{2.23}$$

где также опущен индекс 0. Теперь для величин (2.19) находим

$$\nabla\Gamma^a{}_i = \sigma^a{}_i + \Gamma^a{}_{bi}\sigma^b + \Gamma^a{}_{ij}\theta^j, \tag{2.24}$$

где

$$\Gamma^a{}_{bi} = \Lambda^\alpha{}_{bi}q^a{}_\alpha - \delta^a{}_b\Lambda^\alpha{}_i q_\alpha. \tag{2.25}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\nabla\Gamma^a{}_{bi} = \sigma^a{}_{bi} + (\delta^a{}_b\Gamma^c{}_i + \delta^c{}_b\Gamma^a{}_i)\,\sigma_c -\\ -(\delta^a{}_b\Gamma_{ci} + \delta^a{}_c\Gamma_{bi})\,\sigma^c + \Gamma^a{}_{bij}\theta^j,\end{aligned} \tag{2.26}$$

где

$$\Gamma_{bi} = \Lambda^\alpha{}_{bi}q_\alpha. \tag{2.27}$$

Наконец,

$$\nabla\Gamma_{bi} = \sigma_{bi} - \Gamma^a{}_{bi}\sigma_a + \Gamma_{bij}\theta^j. \tag{2.28}$$

Следовательно, все условия теоремы 1 удовлетворены. В итоге можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 2.** *Если к каждой $m$-плоскости $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ присоединить не пересекающую ее $(N-m-1)$-плоскость $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$ в пространстве $P_N$, то распределение на проективном расслоении $V_{m+n} \subset P_N$, $n$-плоскость которого в точке $y$ плоскости $\mu^N{}_m(x)$ совпадает с пересечением касательной $(m+n)$-плоскости к $V_{m+n}$ в точке $y$ с $(N-m)$-плоскостью, натянутой на $y$ и $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$, является горизонтальным распределением некоторой вполне определенной связности в $V_{m+n}$.*

Будем называть присоединение к многобразию $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ многообразия $(N-m-1)$-плоскостей $\nu^N{}_{N-m-1}(B_n)$ в пространстве $P_N$ указанным выше способом *сильным проективным оснащением* многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$, а связность в $V_{m+n}$, которая получается при этом согласно теореме 2, — связностью, индуцированной этим оснащением. Если учитывать роль горизонтального распределения в инфинитезимальном задании связности (§ 1, п. 5), то можно сказать, что горизонтальное перенесение точек плоскости $\mu^N{}_m(x)$ в связности, индуцированной сильным проективным оснащением многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$, инфинитезимально совпадает с операцией проектирования из «центра» $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$.

Так как формулы (2.19), (2.25), (2.27) можно представить вместе в следующей компактной форме

$$\Gamma^v{}_{ui} = \Lambda^\alpha{}_{ui} q^v{}_\alpha - \delta^v{}_u \Lambda^\alpha{}_{0i} q^0{}_\alpha, \tag{2.29}$$

то индуцированная связность задается, в силу (1.16), формами

$$\bar{\sigma}^v{}_u = \sigma^v{}_u + \Lambda^\alpha{}_{ui} q^v{}_\alpha \vartheta^i - \delta^v{}_u \Lambda^\alpha{}_{0i} q^0{}_\alpha \vartheta^i. \tag{2.30}$$

Все полученные формулы сильно упростятся, если репер в пространстве $P_N$ выбрать так, чтобы вершины $A_\alpha$ принадлежали плоскости $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. Тогда, в силу (2.16),

$$q^u{}_\alpha = 0 \tag{2.31}$$

и (2.29,30) сведутся к

$$\Gamma^v{}_{ui} = 0, \tag{2.32}$$

$$\bar{\sigma}^v{}_u = \sigma^v{}_u. \tag{2.33}$$

Отметим, что наиболее простое доказательство теоремы 2 получается именно в этом репере. Остается только заметить, что из (2.17) следует

$$\sigma^u{}_\alpha = q^u{}_{\alpha i} \vartheta^i,$$

и теперь с помощью (2.9) и (2.11) можно непосредственно проверить, что 2-формы $\Omega^v{}_u$, составленные из 1-форм (2.33) по формуле (1.17), являются полубазовыми.

Как мы уже отмечали, рассматриваемое сильное проективное оснащение было раньше применено в частном случае многообразия касательных плоскостей некоторой поверхности $V_n$ в $P_N$. Такое многообразие характеризуется среди общих многообразий $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ следующими инвариантными признаками:

1) $m = n$,

2) ранг матрицы $\|\Lambda^\alpha{}_{ui}\|$, где значениям индекса $u$ соответствуют столбцы, а парам значений $(\alpha, i)$ — строки, равен $n$.

Сильное проективное оснащение для таких многообразий $\mu^N{}_m(B_n)$ было введено Э. Картаном [12].

В указанной нами более общей трактовке этого оснащения становится ясной его взаимность для многообразий $\mu^N{}_m(B_n)$ и

$\nu^N{}_{N-m-1}(B_n)$: если $\nu^N{}_{N-m-1}(B_n)$ оснащает $\mu^N{}_m(B_n)$, то обратно, $\mu^N{}_m(B_n)$ оснащает $\nu^N{}_{N-m-1}(B_n)$. Возникает многообразие в симметрическом пространстве $m$-пар $(P_m, P_{N-m-1})$ (в смысле Б. А. Розенфельда [9]) в пространстве $P_N$. Интересна связь между группой голономии связности, индуцируемой оснащением, и свойством расслояемости многообразия пар: *многообразие $\mu^N{}_m(B_n)$ расслояемо многообразием $\nu^N{}_{N-m-1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда группа голономии индуцированной связности в проективном расслоении $V_{m+n}$, заданном с $\mu^N{}_m(B_n)$, гомоморфна с фундаментальной группой для $B_n$ (т. е. когда связность имеет нулевую кривизну)*. Это утверждение следует непосредственно из определения расслояемости многообразия пар [1] и условия инволютивности горизонтального распределения индуцированной связности.

## § 3. Слабые проективные оснащения

**1.** Сильные проективные оснащения многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ можно включить в более обширный класс оснащений как весьма частные и наиболее простые случаи. При сильных оснащениях $n$-плоскости горизонтального распределения индуцируемой связности находятся в $(N-m)$-плоскостях, каждая из которых натянута на точку $y$ $m$-плоскости $\mu^N{}_m(x)$ и на оснащающую $(N-m-1)$-плоскость $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. Все эти $(N-m)$-плоскости составляют, следовательно, $m$-параметрический пучок с центром $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$.

Наиболее широкий класс оснащений можно получить, если эти пучки $(N-m)$-плоскостей заменить более общими конгруэнциями $(N-m)$-плоскостей. В настоящем параграфе будут выведены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы распределение $n$-мерных пересечений $(N-m)$-плоскостей этих конгруэнций с касательными к $V_{m+n}$ плоскостями на $V_{m+n}$ являлось горизонтальным распределением некоторой связности в $V_{m+n}$. Анализ этих условий позволяет выделить класс так называемых *слабых проективных оснащений*, промежуточных между наиболее общими оснащениями, с помощью конгруэнций, и сильными проективными оснащениями, когда конгруэнции оказываются $m$-параметрическими пучками.

**2.** Пусть к каждой точке $z$ произвольной $m$-плоскости $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ присоединена $(N-m)$-плоскость $\pi^N{}_{N-m}(z)$, проходящая через точку $z$ и пересекающая плоскость $\mu^N{}_m(x)$ только в точке $z$. Все такие плоскости $\pi^N{}_{N-m}(z)$ для фиксированной $x \in B_n$ образуют в $P_N$ (при выполнении необходимых условий дифференцируемости) некоторую конгруэнцию $(N-m)$-плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(P_m)$, а на всей базе $B$ они составят многообразие плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$. Пусть вершина $A_0$ подвижного проективного репера, первые $m+1$ вершин $A_u$ которого принадлежат плоскости $\mu^N{}_m(x)$, помещена в точку $z$. Тогда каждую плоскость $\pi^N{}_{N-m}(z)$ можно задавать вершиной $A_0$ и точками

$$M_\alpha = A_\alpha - q^a{}_\alpha A_a. \tag{3.1}$$

При этом из $\theta^i=0$, $\sigma^a=0$ должны вытекать уравнения

$$dM_\alpha = \vartheta_\alpha A_0 + \omega^\beta{}_\alpha M_\beta.$$

Это условие накладывает на величины $q^a{}_\alpha$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\nabla q^a{}_\alpha - \sigma^a{}_\alpha = q^a{}_{\alpha b}\sigma^b + q^a{}_{\alpha i}\theta^i. \tag{3.2}$$

Система величин $q^a{}_\alpha$ называется *фундаментальным объектом нулевого порядка* многообразия плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$. При внешнем дифференцировании уравнений системы (3.2), в силу (1.15), (2.9), (2.10) и (2.5), получатся следующие результаты

$$\{\nabla q^a{}_{\alpha b} + \delta^a{}_b(\sigma_\alpha - q^c{}_\alpha\sigma_c)\}\wedge\sigma^b + (\ldots)^a{}_{\alpha i}\wedge\theta^i = 0.$$

Поэтому совокупность величин $q^a{}_\alpha$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla q^a{}_{\alpha b} + \delta^a{}_b(\sigma_\alpha - q^c{}_\alpha\sigma_c) = q^a{}_{\alpha bc}\sigma^c + q^a{}_{\alpha bi}\theta^i, \tag{3.3}$$

где $q^a{}_{\alpha bc}$ симметричны по индексам $b$ и $c$. Система величин $q^a{}_\alpha$, $q^a{}_{\alpha b}$ называется *фундаментальным объектом первого порядка* многообразия плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$.

Пересечение плоскости $\pi^N{}_{N-m}(z)$ с касательной плоскостью к $V_{m+n}$ в точке $z$ определяется, как и выше (§ 2, п. 4), вершиной $A_0$ и точками

$$M_i = \Lambda^\alpha{}_{0i}A_\alpha - \Lambda^\alpha{}_{0i}q^a{}_\alpha A_a. \tag{2.18}$$

Условия, при которых распределение на $V_{m+n}$, плоскость которого в точке $z$ натянута на $A_0$ и $M_i$, является горизонтальным распределением некоторой связности, получаются теперь из теоремы 1, в которой следует взять

$$\Gamma^a{}_i = \Lambda^\alpha{}_i q^a{}_\alpha. \tag{2.19}$$

(здесь при $\Lambda^\alpha{}_{0i}$ опущен индекс 0).

С помощью (2.22) и (3.2) мы получаем

$$\nabla\Gamma^a{}_i = \sigma^a{}_i + \Gamma^a{}_{bi}\sigma^b + \Gamma^a{}_{ij}\theta^j, \tag{3.4}$$

где

$$\Gamma^a{}_{bi} = \Lambda^\alpha{}_{bi}q^a{}_\alpha + \Lambda^\alpha{}_i q^a{}_{\alpha b}. \tag{3.5}$$

Далее:

$$\nabla\Gamma^a{}_{bi} = \sigma^a{}_{bi} + (\delta^a{}_b\Gamma^c{}_i + \delta^c{}_b\Gamma^a{}_i)\sigma_c + \Gamma^a{}_{bci}\sigma^c + \Gamma^a{}_{bij}\theta^j, \tag{3.6}$$

где

$$\Gamma^a{}_{bci} = \Lambda^\alpha{}_i q^a{}_{\alpha bc} + \Lambda^\alpha{}_{bi} q^a{}_{\alpha c} + \Lambda^\alpha{}_{ci} q^a{}_{\alpha b}. \tag{3.7}$$

В силу теоремы 1 для получения связности в $V_{m+n}$ необходимо и достаточно, чтобы найденные величины (3.7) имели строение (1.37)

$$\Gamma^a{}_{bci} = -(\delta^a{}_b \Gamma_{ci} + \delta^a{}_c \Gamma_{bi}) \tag{1.37}$$

и величины $\Gamma_{bi}$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений (1.38) с $\Gamma_{bci}=0$. Из (1.34) и (3.7) следует, что если имеют место (1.37), то

$$\Gamma_{bi} = \frac{1}{m+1}\{m(\Lambda^\alpha{}_i q_{\alpha b} + \Lambda^\alpha{}_{bi} q_\alpha) - \Lambda^\alpha{}_{ai} q^a{}_{\alpha b}\}, \tag{3.8}$$

где $q_\alpha = -\frac{1}{m} q^a{}_{\alpha a}$ являются величинами, удовлетворяющими системе дифференциальных уравнений

$$\nabla q_\alpha - \sigma_\alpha + q^a{}_\alpha \sigma_a = q_{\alpha a}\sigma^a + q_{\alpha i}\theta^i, \tag{3.9}$$

вытекающей из (3.3). Условия (1.31) и (3.7) дают теперь

$$\Lambda^\alpha{}_i\{q^a{}_{\alpha bc} + \frac{2m}{m+1} q_{\alpha(c}\delta^a{}_{b)}\} +$$
$$+ 2Q^a{}_{\alpha(b}\Lambda^\alpha{}_{c)i} - \frac{2}{m+1}\Lambda^\alpha{}_{di} q^d{}_{\alpha(b}\delta^a{}_{c)} = 0, \tag{3.10}$$

где

$$Q^a{}_{\alpha c} = q^a{}_{\alpha c} + \frac{m}{m+1} q_\alpha \delta^a{}_c. \tag{3.11}$$

При продолжении системы (3.9) находим

$$\nabla q_{\alpha a} + (q^b{}_{\alpha a} + q_\alpha \delta^b{}_a)\sigma_b = q_{\alpha ab}\sigma^b + q_{\alpha ai}\theta^i. \tag{3.12}$$

Поэтому условие, чтобы в системе дифференциальных уравнений (1.32) имело место равенство $\Gamma_{bci} = 0$, принимает, в силу (3.8), следующий вид:

$$\Lambda^\alpha{}_{ai} q^a{}_{\alpha bc} - m\{\Lambda^\alpha{}_i q_{\alpha bc} + 2q_{\alpha(b}\Lambda^\alpha{}_{c)i}\} = 0. \tag{3.13}$$

Здесь участвуют величины $q^\alpha{}_{bc}$, которые выражаются уже через компоненты фундаментального объекта третьего порядка ($q^a{}_\alpha$, $q^a{}_{\alpha b}$, $q^a{}_{\alpha bc}$, $q^a{}_{\alpha bcd}$) многообразия конгруэнций $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$.

Наши исследования привели, таким образом, к следующему результату.

**Теорема 3.** *Распределение на $V_{m+n}$, $n$-плоскости которого высекаются из касательных к $V_{m+n}$ $(m+n)$-плоскостей $(N-m)$-плоскостями многообразия $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$, проходящими через точки касания, является горизонтальным распределением некоторой связности в $V_{m+n}$ тогда и только тогда, когда компоненты фундаментального объекта третьего порядка многообразия пло-*

*скостей* $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$ *связаны с компонентами фундаментального объекта первого порядка многообразия* $\mu^N{}_m(B_n)$ *соотношениями* (3.10) *и* (3.13).

**3.** Сильное проективное оснащение многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ соответствует здесь случаю, когда

$$q^a{}_{\alpha b} = -q_\alpha \delta^a{}_b, \tag{3.14}$$

$$q^a{}_{\alpha bc} = 0. \tag{3.15}$$

Действительно, подстановка выражений (3.14) в уравнения (3.2) дает сразу систему (2.20), а при их подстановке в уравнения (3.3) находим:

$$(\nabla q_\alpha + q^c{}_\alpha \sigma_c - \sigma_\alpha)\delta^a{}_b = q^a{}_{\alpha bc}\sigma^c + q^a{}_{\alpha bi}\theta^i. \tag{3.16}$$

Если здесь учесть (3.15) и произвести свертывание по индексам $a$ и $b$, то получится система (2.21).

Нетрудно проверить, что условия (3.10) и (3.13) удовлетворяются при (3.14) и (3.15) тождественно.

Необходимо отметить также, что при $m < 1$ равенство (3.15) вытекает из (3.14). В самом деле, из (3.16) следует, что

$$q^a{}_{\alpha bc} = Q_{\alpha c}\delta^a{}_b,$$

и так как $q^a{}_{\alpha bc}$ симметричны по индексам $b$ и $c$, то

$$Q_{\alpha c}\delta^a{}_b - Q_{\alpha b}\delta^a{}_c = 0.$$

Свертывание по $a$ и $b$ дает

$$(m-1)Q_{\alpha c} = 0,$$

откуда при $m > 1$ получаем $Q_{\alpha c} = 0$.

**4.** Условия (3.10) и (3.13) довольно сложны. Их можно значительно упростить, если в классе всевозможных конгруэнций $\pi^N{}_{N-m}(P_m)$, определяющих горизонтальное распределение некоторой связности в $V_{m+n}$, ограничиться более специальным подклассом. Например, если все конгруэнции $\pi^N{}_{N-m}(P_m)$ являются пучками, то эти условия удовлетворяются тождественно, и мы имеем дело с сильным проективным оснащением.

Ниже мы выделим один более широкий специальный класс оснащений многообразия $\pi^N{}_m(B_n)$, который содержит все сильные проективные оснащения. Для этого отметим, что величины

$$\Gamma_{bi} = -\Lambda^\alpha{}_{ai} q^a{}_{\alpha b} \tag{3.17}$$

вместе с величинами (3.5) удовлетворяют, как нетрудно проверить, системе дифференциальных уравнений (1.38), где

$$\Gamma_{bci} = -\Lambda^\alpha{}_{ai} q^a{}_{\alpha bc}. \tag{3.18}$$

Если теперь величины, определяемые формулами (3.7), (3.17) и

(3.18) подставить в условия (1.31) и (1.39) теоремы 1, то мы придём к следующим условиям:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{i}q^{a}{}_{\alpha bc}+2q^{a}{}_{\alpha(b}\Lambda^{\alpha}{}_{c)i}-2\Lambda^{\alpha}{}_{di}q^{d}{}_{\alpha(b}\delta^{a}{}_{c)}=0, \tag{3.19}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{ai}q^{a}{}_{\alpha bc}=0, \tag{3.20}$$

из которых условия (3.10) и (3.13) могут быть получены как следствия.

Итак, доказана

**Теорема 4.** *Для того, чтобы распределение на $V_{m+n}\subset P_N$, определяемое многообразием плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$, было горизонтальным распределением некоторой связности в $V_{m+n}$, достаточно, чтобы компоненты фундаментального объекта второго порядка многообразия $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$ удовлетворяли условиям* (3.19) *и* (3.20).

Оснащение многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ многообразием $(N-m)$-плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$, удовлетворяющим условиям (3.19) и (3.20), будем называть *слабым проективным оснащением* многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$. Объект индуцированной им связности в $V_{m+n}$ имеет следующие компоненты.

$$\Gamma^{a}{}_{i}=\Lambda^{\alpha}{}_{i}q^{a}{}_{\alpha}, \tag{2.19}$$

$$\Gamma^{a}{}_{bi}=\Lambda^{\alpha}{}_{bi}q^{a}{}_{\alpha}+\Lambda^{\alpha}{}_{i}q^{a}{}_{\alpha b}, \tag{3.5}$$

$$\Gamma_{bi}=-\Lambda^{\alpha}{}_{ai}q^{a}{}_{\alpha b}, \tag{3.17}$$

где $\Lambda^{\alpha}{}_{i}$, $\Lambda^{\alpha}{}_{ai}$ составляют фундаментальный объект первого порядка многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$, а $q^{a}{}_{\alpha}$, $q^{a}{}_{\alpha b}$ фундаментальный объект первого порядка оснащающего многообразия $\pi^N{}_{N-m}(V_{m+n})$.

Сравнение формул (2.19), (3.5) и (3.17) с формулами (2.19), (2.25) и (2.27) показывает, что класс слабых проективных оснащений многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ содержит все сильные проективные оснащения, которые соответствуют особой структуре системы величин $q^{a}{}_{\alpha b}$:

$$q^{a}{}_{\alpha b}=-q_{\alpha}\delta^{a}{}_{b}. \tag{3.14}$$

При $m\geqslant 2$ отсюда следуют равенства (3.15), а условия (3.19) и (3.20) удовлетворяются тождественно. Если $m=1$, то к (3.14) следует добавить (3.15) (не являющиеся уже следствиями из (3.14); см. п. 3), и мы приходим к тому же результату.

## § 4. Аффинные оснащения

1. Пусть в каждом слое проективного расслоения $V_{m+n}$ фиксирована некоторая $(m-1)$-плоскость. Тогда структурную группу $GP(m,R)$, действующую в слоях многообразия $V_{m+n}$,

можно привести к группе стационарности этой $(m-1)$-плоскости, т. е. к аффинной группе $GA(m,R)$. Так как группа $GA(m,R)$ выделяется из группы $GP(m,R)$ уравнениями $\sigma_a=0$, связывающими формы Маурера-Картана (§ 1, п. 2), то указанное приведение структурной группы в $V_{m+n}$ равносильно наложению требования, чтобы из $\vartheta^i=0$ вытекали $\sigma_a=0$, т. е. чтобы имели место уравнения

$$\sigma_a=p_{ai}\vartheta^i. \tag{4.1}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (1.8—10) приводит к структурным уравнениям так называемого расслоенного пространства аффинных реперов $\bar{E}$:

$$d\vartheta^i=\theta^j\Lambda\theta^i{}_j, \tag{1.6}$$

$$d\sigma^b=\sigma^a\Lambda\sigma^b{}_a+\theta^i\Lambda\sigma^b{}_i, \tag{4.2}$$

$$d\sigma^b{}_a=\sigma^c{}_a\Lambda\sigma^b{}_c+\theta^i\Lambda\bar{\sigma}^b{}_{ai}, \tag{4.3}$$

где в данном случае

$$\bar{\sigma}^b{}_{ai}=\sigma^b{}_{ai}+(\delta^b{}_a p_{ci}+\delta^b{}_c p_{ai})\sigma^c. \tag{4.4}$$

Из этих уравнений следует, в частности, что система $\vartheta^i=0$, $\sigma^a=0$ является вполне интегрируемой. Поэтому можно говорить о новом расслоенном пространстве, типовым слоем которого является точечное проективное пространство с исключенной из него $(m-1)$-плоскостью, а структурной группой — аффинная группа $GA(m,R)$. Это расслоенное пространство мы будем называть *аффинным расслоением*, погруженным в $P_N$, и обозначать через $V^*{}_{m+n}\subset P_N$. Его типовым слоем является $m$-мерное аффинное пространство.

Связность в расслоенном пространстве аффинных реперов $E^*$ можно задавать с помощью объекта связности $(\Gamma^a{}_i,\ \Gamma^a{}_{bi})$, удовлетворяющего следующему условию: соответствующие ему формы

$$'\sigma^a=\sigma^a+\Gamma^a{}_i\vartheta^i,\quad '\sigma^a{}_b=\sigma^a{}_b+\Gamma^a{}_{bi}\vartheta^i \tag{4.5}$$

должны обладать тем свойством, что составленные из них 2-формы

$$\Sigma^a=d'\sigma^a-{}'\sigma^b\Lambda{}'\sigma^a{}_b,\ \Omega^a{}_b=d'\sigma^a{}_b-{}'\sigma^c{}_b\Lambda{}'\sigma^a{}_c \tag{4.6}$$

должны быть полубазовыми, т. е. выражаться в виде

$$\Sigma^a=\frac{1}{2}S^a{}_{ij}\vartheta^i\Lambda\theta^j,\quad \Omega^b{}_a=\frac{1}{2}R^b{}_{aij}\theta^i\Lambda\theta^j. \tag{4.7}$$

Это условие накладывает на объект связности следующую систему дифференциальных уравнений

$$\nabla\Gamma^a{}_i=\sigma^a{}_i+\Gamma^a{}_{bi}\sigma^b+\Gamma^a{}_{ij}\theta^j, \tag{2.24}$$

$$\nabla\Gamma^a{}_{bi}={}'\sigma^b{}_{ai}+{}'\Gamma^a{}_{bij}\theta^j. \tag{4.8}$$

Связность в расслоенном пространстве аффинных реперов индуцирует некоторую связность также в соответствующем аффинном расслоении $V^*_{m+n}$. Горизонтальная плоскость этой связности определяется уравнениями

$$\sigma^a + \Gamma^a{}_i \theta^i = 0. \tag{1.23}$$

Пусть, обратно, к каждой точке многообразия $V^*_{m+n}$ присоединена $n$-мерная плоскость, определяемая уравнениями (1.23). Тогда величины $\Gamma^a{}_i$ удовлетворяют системе уравнений (1.26), которая совпадает с системой (2.24). При продолжении этой системы получаются дифференциальные уравнения для системы величин $\Gamma^a{}_{bi}$:

$$\nabla \Gamma^a{}_{bi} = {}'\sigma^b{}_{ai} + {}'\Gamma^a{}_{bci}\sigma^c + {}'\Gamma^a{}_{bij}\theta^j. \tag{4.11}$$

Сравнение с системой (4.8) показывает, что для получения связности в $\overline{V}_{m+n}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$'\Gamma^a{}_{bci} = 0. \tag{4.12}$$

Если продифференцировать внешним образом уравнения (4.6), учитывая (4.7), и развернуть полученные внешние уравнения третьего порядка, то возникает следующая система дифференциальных уравнений для величин $S^a{}_{ij}$ и $R^b{}_{aij}$:

$$\nabla S^a{}_{ij} = R^a{}_{bij}\sigma^b + S^a{}_{ijk}\theta^k, \tag{4.9}$$

$$\nabla R^b{}_{aij} = R^b{}_{aijk}\theta^k. \tag{4.10}$$

Следовательно, величины $R^b{}_{aij}$ составляют самостоятельный объект — так называемый *тензор кривизны* связности — на базе $B_n$; величины $S^a{}_{ij}$ составляют аналогичный объект только вместе с $R^b{}_{aij}$, но самостоятельно они образуют объект — так называемый *тензор кручения* связности — на многообразии $V^*_{m+n}$. Тензор кручения становится объектом на базе $B_n$, если его рассматривать в точках заданной секущей поверхности расслоенного пространства $V^*_{m+n}$, в которых

$$\sigma^a = \lambda^a{}_i \theta^i.$$

**2.** Пусть дано многообразие $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ проективного пространства $P_N$ и пусть в каждой плоскости $\mu^N{}_m(x)$ многообразия выбрана некоторая $(m-1)$-плоскость $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ так, чтобы отображение $\varkappa$ базы $B_n$ в грассманово многообразие $\Omega(m-1, N)$ оказалось диффеоморфизмом. Если вершины $A_a$ подвижного репера выбрать лежащими в этой плоскости $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$, то из $\theta^i = 0$ должны вытекать $dA_a = A_b\sigma^b{}_a$, и, так как, в силу (2.7) и (2.8), имеем

$$dA_a = A_a\omega^0{}_0 + A_0\sigma_a + A_b\sigma^b{}_a + A_\alpha\Lambda^a{}_{ai}\theta^i,$$

то

$$\sigma_a = p_{ai}\theta^i. \tag{4.1}$$

Подстановка этих выражений в структурные уравнения

(1.10) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla p_{ai} + \sigma_{ai} = p_{aij}\theta^j. \qquad (4.13)$$

Система величин $p_{ai}$, в силу (4.13), (2.11), (2.23) и (4.1), образует вместе с величинами $\Lambda^\alpha_{ai}$ геометрический объект, который называется *фундаментальным объектом первого порядка* многообразия $(m-1)$-плоскостей $\varkappa^N_{m-1}(B_n)$.

Многообразие $\varkappa^N_{m-1}(B_n)$ позволяет проективное расслоение $\overline{V}_{m+n}$, состоящее из точек, принадлежащих плоскостям из $\mu^N_m(B_n)$, привести к аффинному расслоению $V^*_{m+n}$ способом, указанным в предыдущем пункте. В связи с этим возникает задача нахождения оснащений многообразия $\mu^N_m(B_n)$, индуцирующих некоторую связность в аффинном расслоении $V^*_{m+n}$. Задача аналогична задаче проективного оснащения многообразия $\mu^N_m(B_n)$ и решается аналогичным путем.

Пусть к каждой точке $z$ $m$-плоскости $\mu^N_m(x)$ многообразия $\mu^N_m(B_n)$, не принадлежащей плоскости $\varkappa^N_{m-1}(x)$, присоединена $(N-m)$-плоскость $\pi^N_{N-m}(z)$, проходящая через $z$ и не имеющая с $\mu^N_m(x)$ других точек пересечения. Если вершину $A_0$ поместить в точку $z$, то плоскость $\pi^N_{N-m}(z)$ можно, как и выше, определить вершинной $A_0$ и точками (3.1). Величины $q^a_\alpha$ должны попрежнему удовлетворять системе дифференциальных уравнений (3.2). Аналогично величины

$$\Gamma^a_i = \Lambda^\alpha_i q^a_\alpha \qquad (2.19)$$

удовлетворяют системе (3.4), где по-прежнему

$$\Gamma^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi} q^a_\alpha + \Lambda^\alpha_i q^a_{\alpha b}. \qquad (3.5)$$

Дальше наблюдается некоторое расхождение по сравнению с материалом предыдущего параграфа, вызванное соотношениями (4.1). Именно уравнения (3.6) заменяются, в силу (4.1), на уравнения

$$\nabla \Gamma^a_{bi} = \overline{\sigma}^a_{bi} + \overline{\Gamma}^a_{bci}\sigma^c + \overline{\Gamma}^a_{bij}\theta^j, \qquad (4.11)$$

в которых

$$\overline{\Gamma}^a_{bci} = \Lambda^\alpha_i q^a_{\alpha bc} + \Lambda^\alpha_{bi} q^a_{\alpha c} + \Lambda^\alpha_{ci} q^a_{\alpha b} - (\delta^a_b p_{ci} + \delta^a_c p_{bi}). \qquad (4.14)$$

Учитывая условие (4.12), получим следующую теорему.

**Теорема 5.** *Если из каждой $m$-плоскости $\mu^N_m(x)$ многообразия $\mu^N_m(B_n)$ удалены точки лежащей в ней $(m-1)$-плоскости $\varkappa^N_{m-1}(x)$, то $(N-m)$-плоскости $\pi_{N-m}(z)$, проходящие через оставшиеся точки $z$ плоскостей $\mu^N_m(x)$ и не имеющие с $\mu^N_m(x)$ других точек пересечения, высекают из касательных к $V^*_{m+n}$ плоскостей в точках $z$ $n$-плоскости горизонтального распределения некоторой связности в $V^*_{m+n}$ тогда и только тогда, когда* *компоненты фундаментальных объектов многообразий плоскостей $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и $\pi^N{}_{N-m}(z)$, соответственно первого и второго порядков, связаны с компонентами фундаментального объекта первого порядка многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ соотношениями*

$$\Lambda^a{}_i q^a{}_{abc} + \Lambda^a{}_{bi} q^a{}_{ac} + \Lambda^a{}_{ci} q^a{}_{ab} = \delta^a{}_b p_{ci} + \delta^a{}_c p_{bi}. \qquad (4.15)$$

Присоединение к многообразию $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ проективного пространства $P_N$ многообразия $(m-1)$-плоскостей $\varkappa^N{}_{m-1}(B_n)$ и многообразия $(N-m)$-плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(V^*{}_{m+n})$ указанным в теореме способом так, чтобы были удовлетворены условия (4.15), будем называть *слабым аффинным оснащением* многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$. Из теоремы 5 следует, что слабым аффинным оснащением многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ можно всегда индуцировать наиболее общую связность в $V^*{}_{m+n}$. Этим оно отличается от слабого проективного оснащения многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$.

**3.** Теорему 5 можно применить, в частности, в том случае, когда из всего пространства $P_N$ удалена некоторая гиперплоскость, принимаемая за бесконечно удаленную, и группа $GP(N, R)$ приведена к стационарной подгруппе $GA(N, R)$ этой гиперплоскости. Тогда многообразие $\mu^N{}_m(B_n)$ представляет собой многообразие $m$-плоскостей $N$-мерного аффинного пространства. Если вершины $A_1, \ldots, A_N$ проективного репера выбрать лежащими на бесконечно удаленной гиперплоскости, то

$$dA_Q = A_Q\omega^0{}_0 + A_R\sigma^R{}_Q$$

и

$$\sigma^0{}_Q = 0. \qquad (4.16)$$

В частности, в формуле (4.1) имеют место равенства

$$p_{ai} = 0, \qquad (4.17)$$

а условие (4.15) в теореме 5 принимает вид

$$\Lambda^a{}_i q^a{}_{aac} + \Lambda^a{}_{bi} q^a{}_{ac} + \Lambda^a{}_{ci} q^a{}_{ab} = 0. \qquad (4.18)$$

При этом в качестве $(m-1)$-плоскостей $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ в $m$-плоскостях $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ рассматриваются пересечения плоскостей $\mu^N{}_m(x)$ с бесконечно удаленной гиперплоскостью пространства.

Присоединение к многообразию $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ $N$-мерного аффинного пространства многообразия $(N-m)$-плоскостей $\pi^N{}_{N-m}(z)$, так чтобы были удовлетворены условия (4.18), будем называть слабым собственно-аффинным оснащением многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$.

**4.** Простым частным случаем слабого аффинного оснащения является так называемое *сильное аффинное оснащение*, когда все $(N-m)$-плоскости $\pi^N{}_{N-m}(z)$, проходящие через точки заданной плоскости $\mu^N{}_m(x)$, образуют пучок с $(N-m-$ $-1)$-мерным центром $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. При $m>1$ оно характеризуется равенством

$$q^a{}_{\alpha b} = -q_\alpha \delta^a{}_b, \tag{3.14}$$

из которого вытекает, что

$$q^a{}_{\alpha bc} = 0. \tag{3.15}$$

При $m=1$ условие (3.15) не вытекает из (3.14) и его нужно накладывать дополнительно (см. § 3, п. 3). Сильное аффинное оснащение многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ $m$-плоскостей проективного пространства состоит, таким образом, в удалении из каждой плоскости $\mu^N{}_m(x)$ точек некоторой лежащей в ней $(m-1)$-плоскости $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и в присоединении к $\mu^N{}_m(x)$ не пересекающей ее $(N-m-1)$-плоскости $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$.

Условие (4.15) в случае сильного аффинного оснащения принимает, в силу (3.14) и (3.15), вид

$$-\Lambda^\alpha{}_{ci} q_\alpha \delta^a{}_b - \Lambda^\alpha{}_{bi} q_\alpha \delta^a{}_c = \delta^a{}_b p_{ci} + \delta^a{}_c p_{bi},$$

откуда

$$p_{ai} = -\Lambda^\alpha{}_{ai} q_\alpha. \tag{4.19}$$

Для упрощения дальнейшего анализа целесообразно подвижной репер выбирать так, чтобы вершины $A_\alpha$ принадлежали плоскости $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. Тогда имеют место равенства (2.31):

$$q^a{}_\alpha = q_\alpha = 0,$$

а из (2.21) и (4.19) вытекают соотношения

$$\sigma_\alpha = -q_{\alpha i}\theta^i, \tag{4.20}$$

$$p_{ai} = 0. \tag{4.21}$$

Подстановка последних соотношений в (4.13) дает

$$\sigma_{ai} = p_{aij}\theta^j,$$

где, в силу (2.11),

$$\sigma_{ai} = \Lambda^\alpha{}_{ai}\sigma_\alpha$$

и $p_{aij}$ симметричны по индексам $i$, $j$. Следовательно, величины $q_{\alpha i}$ должны удовлетворять следующей системе линейных однородных уравнений.

$$\Lambda^\alpha{}_{ai} q_{\alpha j} - \Lambda^\alpha{}_{aj} q_{\alpha i} = 0,$$

которую можно переписать также в виде

$$\Lambda^\alpha{}_{a[i}\delta^k{}_{j]} q_{\alpha k} = 0. \tag{4.22}$$

Обратно можно непосредственно проверить, что при выполнении условий (4.21) 2-формы, составленные из $\sigma^a$ и $\sigma^a{}_b$ по правилам (4.6), являются полубазовыми. Условия (4.22) гарантируют при этом, что уравнения $\sigma_a = 0$, вытекающие из (4.21), совместны с другими имеющимися уравнениями.

В итоге получается следующая теорема.

**Теорема 6.** *Если к каждой $m$-плоскости $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ присоединены лежащая в ней $(m-1)$-плоскость $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и непересекающая ее $(N-m-1)$-плоскость $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$ в пространстве $P_N$, то $n$-плоскости, являющиеся пересечениями касательных к $V^*{}_{m+n}$ плоскостей с $(N-m)$-плоскостями, натянутыми на $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$ и на точку касания, образуют горизонтальное распределение некоторой связности в $V^*{}_{m+n}$ тогда и только тогда, когда величины $p_{ai}$ и $q_{\alpha i}$, характеризующие многообразия плоскостей $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$ в репере, вершины $A_a$ и $A_\alpha$ которого лежат, соответственно, на $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$, удовлетворяют условиям* (4.21) *и* (4.22).

5. Допустим, что все плоскости $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$ сильного аффинного оснащения многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ проективного пространства $P_N$ принадлежат одной определенной гиперплоскости пространства $P_N$. Тогда эту гиперплоскость можно принять за бесконечно удаленную гиперплоскость $N$-мерного аффинного пространства.

Обратно, если задано многообразие $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ $N$-мерного аффинного пространства, то в качестве плоскостей $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ естественно взять бесконечно удаленные $(m-1)$-плоскости плоскостей $\mu^N{}_m(x)$, и многообразие $\mu^N{}_m(B_n)$ можно тогда оснастить многообразием $\nu^N{}_{N-m-1}(B_n)$ бесконечно удаленных $(N-m-1)$-плоскостей (или $(N-m-1)$-направлений). Такое оснащение мы будем называть *сильным собственно-аффинным оснащением* многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$.

Если вершины $A_a$ и $A_\alpha$ подвижного репера принадлежат соответственно плоскостям $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$, то к равенствам (4.21) прибавляются, в силу (4.16), равенства $q_{\alpha i} = 0$ и условия (4.22) удовлетворяются тождественно.

**Теорема 7.** *Если размерность $N$ пространства $P_N$, вмещающего многообразие $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$, не превышает числа $\frac{1}{2}m(n+1)$,*

$$N \leqslant \frac{1}{2}m(n+1), \tag{4.23}$$

*то всякое сильное аффинное оснащение многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ является, вообще говоря, сильным собственно-аффинным оснащением.*

Доказательство. Достаточно показать, что при (4.23) система (4.22) допускает, вообще говоря, только тривиальное решение. Число неизвестных $q_{\alpha k}$ в этой системе равно $(N-m)n$, число уравнений равно $\frac{1}{2}mn(n-1)$. Если справедливо (4.23), то число неизвестных не превышает числа уравнений и достаточно показать, что некоторый из определителей максимального порядка $(N-m)n$ матрицы системы (4.22) не равен тождественно нулю.

Эта матрица имеет следующее блочное строение:

$$\left\|\begin{matrix}
-L_2 & L_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
-L_3 & 0 & L_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-L_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & L_1 & 0 & 0 \\
-L_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & L_1 & 0 \\
-L_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & L_1 \\
0 & -L_3 & L_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & L_{n-2} & 0 & \ldots & L_2 & 0 & 0 \\
0 & L_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & L_2 & 0 \\
0 & L_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & L_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -L_{n-1} & L_{n-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -L_n & 0 & L_{n-2} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -L_n & L_{n-1}
\end{matrix}\right\|.$$

Здесь $L_i$ обозначает $m \times (N-m)$-матрицу

$$L_i = \left\|\begin{matrix}
A^{m+1}{}_{1i} & A^{m+2}{}_{1i} & \ldots & A^N{}_{1i} \\
A^{m+1}{}_{2i} & A^{m+2}{}_{2i} & \ldots & A^N{}_{2i} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A^{m+1}{}_{mi} & A^{m+2}{}_{mi} & \ldots & A^N{}_{mi}
\end{matrix}\right\|.$$

В каждом определителе максимального порядка имеются элементы, которые попарно или равны, или отличаются только знаком. Поэтому в выражении определителя происходят большие сокращения. Однако можно непосредственно проверить, что всегда сохраняются члены, которые содержат максимальное возможное число квадратов элементов. Поэтому ни один из определителей максимального порядка не равняется нулю тождественно. Теорема доказана.

Заметим, что неравенство (4.23) может иметь место только при $m \geqslant 3$. Действительно, мы уже в § 2, п. 1 ставили ограничение $m+n \leqslant N$, и если $N \leqslant \frac{1}{2}m(n+1)$, то необходимо, чтобы

$$m \geqslant 2 + \frac{2}{n-1}.$$

Теорема 6 утверждает, что при $m \geqslant 3$ и $N \leqslant \frac{1}{2}m(n+1)$ сильное аффинное оснащение может отличаться от сильного собственно-аффинного оснащения только в случае многообразий $\mu^N{}_m(B_n)$ некоторого специального строения.

## § 5. Центро-аффинные оснащения

**1.** Все ранее известные оснащения многообразий $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ — оснащение Картана, нормализация Нордена и оснащение Гальвани — относятся к тому случаю, когда $m = n$ и когда в каждом слое многообразия $V_{m+n}$ со структурой проективного расслоения (или многообразия $V^*{}_{m+n}$ со структурой аффинного расслоения), связанного с $\mu^N{}_m(B_n)$, выделена некоторая точка — центр слоя —, описывающая секущую поверхность расслоенного многообразия $V_{m+n}$ (или $V^*{}_{m+n}$). Первые два из названных оснащений, например, относятся к многообразию касательных плоскостей, когда в роли секущей поверхности выступает огибающая поверхность.

Если в случае оснащения Картана участие секущей (вернее огибающей) поверхности оказалось несущественным и это оснащение можно было непосредственно обобщить на более общие многообразия плоскостей в виде сильного проективного оснащения, то при нормализации Нордена огибающая поверхность используется уже существенно. Поэтому нормализацию Нордена нельзя непосредственно обобщить на случай наиболее общего многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$.

Целью настоящего параграфа является изучение возможностей индуцировать в многообразии $V^*{}_{m+n}$ со структурой аффинного расслоения некоторую связность с использованием секущей поверхности. Соответствующие оснащения будем называть *центро-аффинными*. Оказывается, что обобщение нормализации Нордена допускают многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ весьма специального класса.

**2.** Пусть задано многообразие $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ проективного пространства $P_N$ и пусть к каждой плоскости $\mu^N{}_m(x)$ присоединены: лежащие в ней точка $v(x)$ и не проходящая через эту точку $(m-1)$-плоскость $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и $(N-m)$ плоскость $\pi^N{}_{N-m}(x)$, проходящая через $v(x)$ и не имеющая с $\mu^N{}_m(x)$ других точек пересечения. Точка $v(x)$ называется центром, плоскость $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ — *бесконечно удаленной* $(m-1)$-плоскостью (или *нормалью второго рода*) плоскости $\mu^N{}_m(x)$; плоскость $\pi^N{}_{N-m}(x)$ называется *нормалью* (*первого рода*). Предполагается, что отображения $v$, $\varkappa$ и $\pi$ являются диффеоморфизмами базы $B_n$ соответственно в $\Omega(0, N) = P_N$, $\Omega(m-1, N)$ и $\Omega(N-m, N)$.

Пусть вершины $A_a$ по-прежнему лежат в плоскости $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$, так что имеют место уравнения (4.1). Вершину $A_0$ ставим в центр $v(x)$. Тогда из $\theta^i=0$ должны вытекать $dA_0=A_0\omega^0_0$, т. е.

$$\sigma^a=\lambda^a_i\theta^i.$$

Плоскость $\pi^N_{N-m}(x)$ задаем точкой $A_0$ и точками

$$M_\alpha=A_\alpha-q^a_\alpha A_a. \tag{3.1}$$

При этом из $\theta^i=0$ должны вытекать уравнения

$$dM_\alpha=A_0\vartheta_\alpha+M_\beta\omega^\beta_\alpha.$$

Это условие накладывает на величины $q^a_\alpha$ систему дифференциальных уравнений

$$\nabla q^a_\alpha=\sigma^a_\alpha+'q^a_{\alpha i}\theta^i, \tag{5.2}$$

имеющую некоторую аналогию с системой (3.2), но отличающуюся от нее в одной существенной части — в ней не возникает системы новых величин $q^a_{\alpha b}$, играющей важную роль при проективных и аффинных оснащениях.

3. Постараемся теперь многообразие $\pi^N_{N-m}(B_n)$ использовать как оснащение, индуцирующее в $V^*_{m+n}$ с выделенной секущей поверхностью $v(B_n)$ некоторую связность. Оказывается, что знание одного лишь многообразия $\pi^N_{N-m}(B_n)$ $(N-m)$-плоскостей, проходящих через точки некоторой секущей поверхности $v(B_n)$, достаточно для индуцирования связности в $V^*_{m+n}$ только для многообразий $\mu^N_m(B_n)$ весьма специального класса. Для общих многообразий $\mu^N_m(B_n)$ необходимо к каждой плоскости $\mu^N_m(x)$ присоединить некоторые дополнительные конструкции.

Связность в $V^*_{m+n}$ можно задать, как было указано в § 4, п. 1, 1-формами $\bar\sigma^a$, $\bar\sigma^a_b$ на $E^*$, удовлетворяющими структурным уравнениям

$$d\bar\sigma^a=\bar\sigma^b\wedge\bar\sigma^a_b+\Sigma^a, \tag{5.3}$$

$$d\bar\sigma^a_b=\bar\sigma^c_b\wedge\bar\sigma^a_c+\Omega^a_b \tag{5.4}$$

с полубазовыми 2-формами $\Sigma^a$ и $\Omega^a_b$ (см. (4.6) и (4.7)).

При построении таких форм исходим из форм $\sigma^a$, $\sigma^a_b$ инфинитезимального перемещения выбранного нами репера. Напомним, что первые из этих форм $\sigma^a$ выражаются линейно через базисные формы $\theta^i$ по формулам (5.1). Поэтому формы

$$'\sigma^a=\sigma^a+\Gamma^a_i\theta^i, \tag{5.5}$$

$$'\sigma^a_b=\sigma^a_b+\Gamma^a_{bi}\theta^i \tag{5.6}$$

удовлетворяют структурным уравнениям (5.3) и (5.4) тогда и только тогда, когда

$$\nabla\Gamma^a_i=\sigma^a_i+'\Gamma^a_{ij}\theta^j, \tag{5.7}$$

$$\nabla\Gamma^a_{bi}=\sigma^a_{bi}+'\Gamma^a_{bij}\theta^j. \tag{5.8}$$

При этом приведенные коэффициенты в формулах (4.7) выражаются в виде

$$S^a{}_{ij} = -2('\Gamma^a{}_{[ij]} + \Gamma^c{}_{b[j}\lambda^b{}_{i]}),$$
$$R^a{}_{bij} = -2\{'\Gamma^a{}_{b[ij]} + \Gamma^a{}_{b[i}\Gamma^a{}_{|c|j]} - (\delta^a{}_b p_{ci} + \delta^a{}_c p_{bi})\lambda^c{}_j\}.$$

Если системы дифференциальных уравнений (5.7) и (5.8) удовлетворены, то структурным уравнениям аффинной связности удовлетворяют вместе с формами $'\sigma^a$, $'\sigma^a{}_b$ также формы

$$\bar{\sigma}^a = d\xi^a + \xi_b{}'\sigma^a{}_b + {}'\sigma^a, \tag{5.9}$$
$$\bar{\sigma}^a{}_b = {}'\sigma^a{}_b, \tag{5.10}$$

в которых $\bar{\sigma}^a$ при параметических $\xi^a$ уже не зависят от базисных форм $\theta^i$.

Вся проблема сводится к построению систем величин $\Gamma^a{}_i$, $\Gamma^a{}_{bi}$, удовлетворяющих уравнением (5.7) и (5.8). Если мы желаем, чтобы горизонтальная плоскость получаемой связности в точке $v(x)$ принадлежала плоскости $\pi^N{}_{m-1}(x)$, то нужно взять, как и раньше (см. (2.19)),

$$\Gamma^a{}_i = \Lambda^\alpha{}_i q^a{}_\alpha. \tag{2.19}$$

При этом уравнения (5.5), в силу (2.24) и (5.1), удовлетворены. Что касается величин $\Gamma^a{}_{bi}$, то для них формула (3.5) уже неприменима, потому что нет величин $q^a{}_{\alpha b}$. Простейшей системой величин нужного типа, которую можно составить из $\Lambda^\alpha{}_i$, $\Lambda^\alpha{}_{ai}$, $p_{ai}$, $\lambda^a{}_i$, $q^a{}_\alpha$, является

$$\Gamma^a{}_{bi} = \Lambda^\alpha{}_{bi} q^a{}_\alpha. \tag{5.11}$$

Однако эти величины удовлетворяют уравнениям (5.8) только при некоторых дополнительных предположениях. Именно из (2.23), (4.1) и (5.2) следует, что

$$\nabla\Gamma^a{}_{bi} = \Lambda^\alpha{}_{bi}\sigma^a{}_\alpha + \Gamma^a{}_{bij}\theta^j. \tag{5.12}$$

Так как из (2.11)

$$\sigma^a{}_{bi} = \Lambda^\alpha{}_{bi}\sigma^a{}_\alpha - \delta^a{}_b \Lambda^\alpha{}_i \sigma_\alpha,$$

то системы величин (2.19) и (5.11) определяют в $V^*{}_{m+n}$ некоторую аффинную связность тогда и только тогда, когда

$$\Lambda^\alpha{}_i \sigma_\alpha = q_{ij}\theta^j. \tag{5.13}$$

**4.** Выясним геометрическое значение полученных условий (5.13). Рассмотрим для этого совокупность аналитических точек

$$P_i = \Lambda^\alpha{}_i M_\alpha.$$

Ненулевым из них соответствуют геометрические точки, лежащие на плоскости $\pi^N{}_{N-m}(x)$. Так как

$$dA_0 = A_0\omega^0{}_0 + A_a\bar{\sigma}^a + P_i\theta^i =$$
$$= A_0\omega^0{}_0 + \{A_a(\lambda^a{}_i + \Gamma^a{}_i) + P_i\}\theta^i,$$

то эти точки находятся на пересечении плоскости $\pi^N{}_{N-m}(x)$ с плоскостью, натянутой на $\mu^N{}_m(x)$ и на плоскость, касательную к $v(B_n)$. С другой стороны,

$$dP_i = A_0\Lambda^\alpha{}_i\sigma_\alpha + P_j\theta^j{}_i + P_{ij}\theta^j;$$

поэтому (5.13) равносильны тому, что при $\theta^i = 0$ имеют место формулы

$$dP_i = P_j\theta^j{}_i.$$

Отсюда ясно геометрическое значение условий (5.13): они выражают тот факт, что в касательной к $v(B_n)$ $n$-плоскости имеется $(n-1)$-плоскость $\varrho^N{}_{n-1}(x)$, инвариантно присоединенная к $\mu^N{}_m(x)$. (Эта $(n-1)$-плоскость является пересечением касательной к $v(B_n)$ плоскости с инвариантно присоединенной к $\mu^N{}_m(x)$ плоскостью, натянутой на $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и на точки $P_i$). Следовательно, справедлива

**Теорема 8.** *Если к каждой $m$-плоскости $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ присоединены: 1) лежащие в ней точка $v(x)$ и $(m-1)$-плоскость $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$, 2) $(N-m)$-плоскость $\pi^N{}_{N-m}(x)$, проходящая через $v(x)$ и не имеющая с $\mu^N{}_m(x)$ других точек пересечения, 3) $(n-1)$-плоскость $\varrho^N{}_{n-1}(x)$ в касательной $n$-плоскости к поверхности $v(B_n)$ (образованной точками $v(x)$), не проходящая через $v(x)$, то в аффинном расслоении $V^*{}_{m+n}$, которое задается многообразиями $\mu^N{}_m(B_n)$ и $\varkappa^N{}_m(B_n)$, определяется некоторая связность.*

Указанное в теореме оснащение будем называть *центро-аффинным оснащением* многообразия плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$. Так как, в силу (2.6), (5.6), (5.11) и (3.1), имеем

$$dA_a = A_a\omega^0{}_0 + A_b{}'\sigma^b{}_a\theta^i + (p_{ai}A_0 + \Lambda^\alpha{}_{ai}M_\alpha)\theta^i, \qquad (5.14)$$

то при горизонтальном перенесении, когда $'\sigma^b{}_a = 0$, произвольная точка $\xi^a A_a$ плоскости $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ (вектор) инфинитезимально перемещается в плоскости, натянутой на $\xi^a A_a$ и на $\pi^N{}_{N-m}(x)$.

Оказывается, что аналогичным свойством обладает вообще любая точка плоскости $\mu^N{}_m(x)$. Для того, чтобы это показать, совершим последовательно два преобразования репера: сначала заменим вершины $A_\alpha$ точками

$$M_\alpha = A_\alpha - q^a{}_\alpha A_a \qquad (3.1)$$

плоскости $\pi^N{}_{N-m}(x)$, а затем вершины $A_0$ — произвольной точкой

$$'A_0 = A_0 + \xi^a A_a$$

плоскости $\mu^N{}_m(x)$, не лежащей на $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$. При первом преобразовании формы инфинитезимального перемещения $\sigma^a$, $\sigma^a{}_b$ заменяются на

$$'\sigma^a = \sigma^a + \Lambda^a{}_i q^a{}_\alpha \theta^i, \tag{5.15}$$

$$'\sigma^a{}_b = \sigma^a{}_b + \Lambda^a{}_{bi} q^a{}_\alpha \theta^i, \tag{5.16}$$

а при втором переходе эти формы, в свою очередь, преобразуются по формулам (5.9), (5.10). В итоге получается формула

$$d'A_0 = 'A_0\omega^0{}_0 + A_0\xi^a p_{ai}\theta^i + A_a\overline{\sigma^a} + M_\alpha\,(\Lambda^\alpha{}_i + \xi^a\Lambda^\alpha{}_{ai})\theta^i.$$

Учитывая (5.15), (5.10), (2.19) и (5.11), можно сказать, что здесь формы $\overline{\sigma^a}$ совпадают с соответствующими формами индуцированной связности.

Точка $'A_0$ переносится горизонтально в этой связности, если $\overline{\sigma^a} = 0$. Поэтому горизонтальная плоскость связности в точке $'A_0$ натянута на точку $'A_0$ и точки

$$\xi^a p_{ai} A_0 + (\Lambda^\alpha{}_i + \xi^a \Lambda^\alpha{}_{ai}) M_\alpha. \tag{5.17}$$

Другими словами, при горизонтальном перенесении произвольная точка $'A_0$ плоскости $\mu^N{}_m(x)$ перемещается инфинитезимально в плоскости, натянутой на эту точку $'A_0$ и на $\pi^N{}_{N-m}(x)$.

Из (5.17) видно также, что в общем случае горизонтальные плоскости связности, индуцированной в $V^*{}_{m+n}$ центро-аффинным оснащением, в точках одной плоскости $\mu^N{}_m(x)$ не принадлежат $(N-m)$-плоскостям одного пучка с $(N-m-1)$-мерным центром. Это оснащение, следовательно, не сводится в общем случае к сильному аффинному оснащению.

**5.** Можно выделить один наиболее интересный частный случай центро-аффинного оснащения. Допустим, что в каждой точке $v(x)$ касательная к $v(B_n)$ плоскость принадлежит плоскости $\mu^N{}_m(x)$. Тогда в качестве плоскости $\varrho^N{}_{n-1}(x)$ можно взять ее пересечение с $(m-1)$-плоскостью $\varkappa^N{}_m(x)$. Это возможно только при многообразиях $\mu^N{}_m(B_n)$ весьма специального строения при $m \geqslant n$: каждая $m$-плоскость $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$ должна содержать касательную плоскость некоторой $n$-мерной поверхности $v(B_n)$. Такое многообразие $\mu^N{}_m(B_n)$ характеризуется в выбранном нами репере равенствами

$$\Lambda^\alpha{}_i = 0,$$

и условие (5.13) выполняется для них автоматически.

Итак, получается

**Теорема 9.** *Если каждая плоскость $\mu^N{}_m(x)$ многообразия $m$-плоскостей $\mu^N{}_m(B_n)$ проективного пространства $P_N$ содержит касательную плоскость некоторой $n$-мерной поверхности $v(B_n)$ (что возможно только при $m \geqslant n$) и к каждой плоскости $\mu^N{}_m(x)$ присоединены лежащая в ней $(m-1)$-плоскость $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$, не* *проходящая через точку касания $v(x)$, и $(N-m)$-плоскость $\pi^N{}_{N-m}(x)$, проходящая через $v(x)$ и не имеющая с $\mu^N{}_m(x)$ других точек пересечения, то в аффинном расслоении $V^*{}_{m+n}$, которое задается многообразиями $\mu^N{}_m(B_n)$ и $\varkappa^N{}_{m-1}(B_n)$, определяется некоторая связность.*

Нормализация Нордена получается отсюда при $m=n$. Поэтому указанное в теореме 9 оснащение будем называть *обобщенной нормализацией Нордена.*

**6.** В заключение следует указать, что условие (5.13) выполняется всегда при сильных аффинных оснащениях многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$, если вершины $A_\alpha$ выбрать лежащими на $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. Действительно, тогда справедлива (4.20), из которых (5.13) вытекают непосредственно. В качестве $(n-1)$-плоскости $\varrho^N{}_{n-1}(x)$ выступает пересечение касательной к $v(B_n)$ $n$-плоскости с $(N-1)$-плоскостью, натянутой на $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ и $\nu^N{}_{N-m-1}(x)$. Однако вся секущая поверхность $v(B_n)$ вместе со своими касательными плоскостями является в этом случае совершенно излишней. Связность в $V^*{}_{m+n}$ возникает без всякой фиксации секущей поверхности как связность, индуцируемая сильным аффинным оснащением многообразия $\mu^N{}_m(B_n)$.

Сказанное относится, в частности, к оснащению Гальвани [7], которое представляет собой сильное собственно-аффинное оснащение многообразия $n$-плоскостей $\mu^N{}_n(B_n)$ с фиксированной секущей поверхностью $v(B_n)$. При индуцировании связности эта секущая поверхность $v(B_n)$ не играет никакой роли. Ее значение состоит только в том, что в ее точках превращается в самостоятельный объект — в тензор кручения — совокупность коэффициентов $S^a{}_{ij}$ в выражениях (4.7), которая без фиксации секущей поверхности самостоятельного объекта на базе $B_n$ не составляет (§ 4, п. 1). Поэтому оснащение Гальвани следует отнести не к центро-аффинным оснащениям, а к сильным собственно-аффинным оснащениям.

## Литература


1. Дуничев К. И., Коровин В. И., Расслоение многообразий. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, т. 2. Ленинград, 1964, 206—209.
2. Лаптев Г. Ф., О погружении пространства аффинной связности в аффинное пространство. Докл. АН СССР, 1945, **47**, 551—554.
3. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, **2**, 275—382.
4. Лаптев Г. Ф., Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, т. 2. Ленинград, 1964, 226—233.
5. Либер А. Е., О геометрии $m$-поверхности в аффинном и проективном пространствах. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, т. 1. Москва, 1956, 157—158; Диссертация, МГУ, 1956.
6. Лумисте Ю. Г., К основаниям глобальной теории связностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 69—108.

7. Норден А. П., Пространства аффинной связности. Москва—Ленинград, 1950.
8. Рыбников А. К., О погружении пространства аффинной связности с кручением в аффинное пространство. Вестн. Моск. ун-та, 1960, № 1, 3—15.
9. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
10. Чжень Шэн-Шэнь, Комплексные многообразия, Москва, 1961.
11. Швейкин П. И., Инвариантные построения на $m$-мерной поверхности в $n$-мерном аффинном пространстве. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 811—814; Диссертация, МГУ, 1960.
12. Cartan, É., Les espaces á connexion projective. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1937, **4**, 147—159.
13. Cenkl, B., Les variétés de König generalisées. Чехосл. матем. ж., 1964, **14**, 1—21.
14. Chern S.-S., Sur la possibilité de plonger un espace á connexion projective donné dans un espace projectif. Bull. Sci. math., 1937, **61**, 234—243.
15. Galvani, O., La réalisation des connexions ponctuelles affinés et la géométrie des groupes de Lie. J. math. pures et appl., 1946, **25**, 209—239.
16. Klingenberg, W., Über das Einspannungsproblem in der projektiven und affinen Differentialgeometrie. Math. Z., 1952, **55**, 321—345.
17. Krasnodebski, R., Imbedding of a space with an affine connection in the affine space. Ann. polon. math., 1964, **14**, 303—309.
18. Swan, R. G., Vector bundles and projective modules. Trans Amer. Math. Soc., 1962, **105**, 264—277; Математика, Период. сб. перев. ин. статей, 1964, **8**, № 1, 29—43.
19. Švec, A., L'application des variétés á connexion á certains problémes de la géometrie differentielle. Чехосл. матем. ж., 1960, **10**, 523—550.
20. Švec, A., Au sujet de la definition des variétés de König. Чехосл. матем. ж., 1964, **14**, 222—234.

Поступило
14 XII 1964

Добавление при корректуре. После того, когда статья была сдана в печать, автору стало известно, что сильное проективное оснащение $n$-мерного многообразия $B_n$ $m$-плоскостей $N$-мерного проективного пространства $P_N$ и индуцированную им связность в прогруженном проективном расслоении $V_{m+n}$ рассматривал еще Э. Бортолотти (E. Bortolotti. Connessioni nelle varietà luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, **3**, 81—89).

## INDUTSEERITUD SEOSTUSED SISESTATUD PROJEKTIIVSETES JA AFIINSETES KIHTRUUMIDES

Ü. Lumiste

### Resümee

Olgu antud $n$-mõõtmelise diferentseeruva muutkonna $B_n$ difeomorfism $\mu^N{}_m : B_n \rightarrow \Omega(m, N)$ Grassmanni muutkonda $\Omega(m, N)$. Olgu $X$ suvaline punkt tasandil $\mu^N{}_m(x) \subset P_N$, kus $x$ on $B_n$ suvaline punkt. Paaride $(x, X)$ hulk

$\bigcup_{x \in B_n} (x, X)$ kujutab endast ruumi $P_N$ sisestatud projektiivset kihtruumi $V_{m+n}$, mille baasiks on $B_n$, tüüpkihiks $P_m$ ja struktuurirühmaks $GP(m, R)$. Kui igast tasandist $\mu^N{}_m(x)$ on välja jäetud $(m-1)$-mõõtmelise tasandi $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ punktid, siis $V_{m+n}$ ülejäänud punktid moodustavad ruumi $P_N$ sisestatud afiinse kihtruumi $V^*{}_{m+n}$.

Artiklis vaadeldakse kõige üldisemaid taglastusi, mis indutseerivad kihtruumis $V_{m+n}$ (või $V^*{}_{m+n}$) projektiivse (või afiinse) seostuse ning eraldatakse nende seast välja nn. nõrgad ja tugevad taglastused. Viimaste erijuhtudeks $m = n$ puhul on É. Cartani [12] ja O. Galvani [15] taglastused. Antakse üldistus A. P. Nordeni [7] normalisatsioonile, mille puhul erinevalt eelnevaist kasutatakse oluliselt kihtruumis $V^*{}_{m+n}$ fikseeritud lõikepinda.

## INDUCED CONNECTIONS IN IMBEDDED PROJECTIVE AND AFFINE BUNDLES

Ü. Lumiste

Summary

Let $\mu^N{}_m : B_n \rightarrow \Omega(m, N)$ denote a diffeomorphism of an $n$-dimensional differentiable manifold $B_n$ into the Grassmannian manifold $\Omega(m, N)$. Let $X$ be an arbitrary point of the plane $\mu^N{}_m(x) \subset P_N$, where $x$ is an arbitrary point of $B_n$. The set $\bigcup_{x \in B_n} (x, X)$ of pairs $(x, X)$ is a projective fibre bundle $V_{m+n}$ imbedded in $P_N$, with a base $B_n$, typical fibre $P_m$ and structural group $GP(m, R)$. Throwing away the points of a $(m-1)$-plane $\varkappa^N{}_{m-1}(x)$ in each plane $\mu^N{}_m(x)$, we obtain an affine fibre bundle $V^*{}_{m+n}$ imbedded in $P_N$.

In this paper we consider the most general rigging inducing in fibre bundle $V_{m+n}$ (or in $V^*{}_{m+n}$) a projective (affine) connection, and distinguish the more special classes of weak and strong riggings. The particular cases of the latter for $m = n$ are É. Cartan's [12] and O. Galvani's [15] riggings. A generalization is given for A. P. Norden's [7] normalization, in which, different from the preceding ones, the fixed cross-section of $V^*{}_{m+n}$ is essentially used.

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНУЛЕВЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

**Э. Юримяэ**

Кафедра математического анализа

## § 1. Введение

В этой статье будут рассмотрены матричные методы суммирования в виде преобразования последовательности в последовательность. Эти методы, соответствующие им матрицы и операторы обозначены через $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ и т. д. Поля их суммируемости, т. е. множества всех $A$-суммируемых ($B$-суммируемых) последовательностей будут обозначены символом $A^*$ (соответственно — $B^*$), а $A$-сумма последовательности $x = \{\xi_k\}$ — через $A\{x\}$.

По теореме Кожима—Шура метод $A$ сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда [1]

$$\lim_n a_{nk} = a_k \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = a, \tag{2}$$

$$\sum_k |a_{nk}| = 0(1). \tag{3}$$

Метод суммирования $A$, сохраняющий сходимость, называется *корегулярным*, если

$$\varrho(A) = a - \sum_k a_k \neq 0,$$

и *конулевым*, если

$$\varrho(A) = 0.$$

Следуя Даревскому [1], назовем метод $A$, сохраняющий сходимость, *совершенным*, если из условий

---

[1] Для краткости $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}$, $\sup\limits_{0\leqslant n<\infty}$ обозначаются соответственно через $\sum\limits_k$, $\lim\limits_n$, $\sup\limits_n$.

$$B^* \supseteq A^*,$$
$$B\{x\} = A\{x\} \text{ для всех } x \in c$$
вытекает
$$B\{x\} = A\{x\} \text{ для всех } x \in A^*.$$
Другими словами, метод $A$ называется совершенным, если он совместен со всеми более сильными методами $B$, являющимися совместными с $A$ на множестве $c$.

Метод $A$ называется *реверсивным*, если система
$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$
имеет единственное решение для всех $y = \{\eta_n\} \in c$.

Для корегулярных методов суммирования известны следующие теоремы, одна из которых называется теоремой Мазура—Банаха (см. [5], стр. 95, теорема 12; и [8], теорема 7), другая — теоремой Мазура—Орлича (см. [9], теорема 6, или [10], теорема 2).

**Теорема Мазура—Банаха.** *Реверсивный корегулярный метод $A = (a_{nk})$ является совершенным тогда и только тогда, когда система*
$$\sum_n a_{nk}\tau_n = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$
*имеет в пространстве абсолютно сходящихся рядов $l$ только тривиальное решение $\tau_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.*

**Теорема Мазура—Орлича.** *Пусть методы $A$ и $B$, сохраняющие сходимость, совместны на множестве $c$ и $\varrho(A) \neq 0$. Если для ограниченных последовательностей метод $B$ не слабее метода $A$, то эти методы совместны на множестве ограниченных последовательностей.*

Известно, что топологической основой теоремы Мазура—Банаха является следующее необходимое и достаточное условие:

I. *в поле суммируемости совершенного метода $A$ множество $c$ является всюду плотным множеством.*

Оказывается, что и теорема Мазура—Орлича имеет своей основой аналогичное топологическое свойство:

II. *в поле суммируемости корегулярного метода $A$ все ограниченные последовательности являются точками прикосновения множества $c$.*

Возникает вопрос: могут ли I и II быть выполнены и при конулевых методах? Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным. Имеются такие конулевые методы, для которых выполнены I и II, но II не имеет места для всех конулевых методов (см. § 4, метод $B$). С другой стороны, оказывается, что условие теоремы Мазура—Банаха является только необходимым, но не достаточным для совершенности реверсивного конулевого метода суммирования. В связи с этим возникают следующие две проблемы:

1. дать такой аналог теоремы Мазура—Банаха, чтобы он был применим как для корегулярных, так и для конулевых методов;

2. выделить класс таких конулевых методов, для которых выполнено II.

Первая из этих проблем решается в § 3, вторая — в § 5. В § 2 даны нужные понятия и выведен такой общий вид линейного непрерывного функционала в $A^*$, который внешне отличается от обычного, но оказывается более подходящим для решения предстоящих вопросов. Параграф 4 посвящен теореме Мазура—Орлича. При этом введено понятие $O$-совершенности метода суммирования, сохраняющего сходимость. Некоторые примеры даны в § 6.

В [5, 11, 12] изучен образ множества сходящихся последовательностей с оператором $A$, где $A$ — корегулярный метод суммирования, в пространстве $c$. В данной работе образ множества $X$ с оператором $A$ обозначен через $A(X)$. В последнем параграфе изучен вопрос о том, при каких условиях множество $A(c)$ является плотным в пространстве $c$. Там же изучено взаимоотношение множеств $A(c)$ и $A(m \cap A^*)$.

## § 2. Поле суммируемости, общий вид линейного непрерывного функционала

В связи с применением методов функционального анализа напомним некоторые известные результаты. Целлер [13] показал, что поле суммируемости матричного метода $A$ является $FK$-пространством (т. е. полным метрическим локально выпуклым пространством, в котором имеет место сходимость по координатам) с квазинормами

$$\sup_m \left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k\right| \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{5}$$

$$|\xi_k| \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{6}$$

$$\sup_n \left|\sum_k a_{nk}\xi_k\right|. \tag{7}$$

Далее, Целлером [13] показано, что каждый линейный непрерывный функционал в $A^*$ выражается формулой

$$fx = \sum_k \beta_k\xi_k + \varphi y, \tag{8}$$

где $y = \{\eta_n\} = Ax \in c$. Функционал $\varphi$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $c$. Поэтому

$$\varphi y = \sum_n \tau_n\eta_n + \tau\eta, \tag{9}$$

где $\eta = \lim\limits_n \eta_n = A\{x\}$ и $\sum\limits_n |\tau_n| < \infty$. Если метод $A$ реверсивен, то $A^*$ является банаховым пространством с нормой (7) и каждый линейный непрерывный функционал $fx$ выражается формулой (8), в которой все $\beta_k = 0$.

Для изучения свойств конулевого метода общий вид линейного непрерывного функционала, данный формулами (8) и (9), не совсем удобен. В связи с этим дадим функционалу (9) (вместе с тем и функционалу (8)) форму, более подходящую для некоторых дальнейших исследований.

При помощи преобразования Абеля из (9) получаем

$$\varphi y = \lim_m \sum_{n=0}^{m} \tau_n \eta_n + \tau\eta = \lim_m \left(-\sum_{n=0}^{m} t_{n-1} \bar{\Delta} \eta_n + t_m \eta_m\right) + \tau\eta,$$

где[2] $\bar{\Delta}\eta_n = \eta_n - \eta_{n-1}$ и $t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k$. Обозначая $t = \lim t_n$, на основании предыдущего имеем:

$$\lim_m \left(t_m \eta_m - \sum_{n=1}^{m} t_{n-1} \bar{\Delta}\eta_n\right) = t\eta - \sum_{n=1}^{\infty} t_{n-1} \bar{\Delta}\eta_n =$$

$$= t \sum_n \bar{\Delta}\eta_n - \sum_{n=1}^{\infty} t_{n-1} \bar{\Delta}\eta_n = t\eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (t - t_{n-1}) \bar{\Delta}\eta_n =$$

$$= t\eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \tau_k\right) \bar{\Delta}\eta_n = \sum_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \tau_k\right) \bar{\Delta}\eta_n.$$

Отсюда,

$$\varphi y = \sum_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \tau_k\right) \bar{\Delta}\eta_n + \tau\eta,$$

или

$$\varphi y = \sum_n \omega_n \bar{\Delta}\eta_n, \tag{10}$$

где $\omega_n = \tau + \sum_{k=n}^{\infty} \tau_n$. Обозначая $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n+1}$, из определения $\omega_n$ и из $\sum_n |\tau_n| < \infty$, получаем, что

$$\sum_n |\Delta\omega_n| < \infty. \tag{11}$$

Из доказанного ясно, что каждый линейный непрерывный функционал в пространстве $c$ выражается формулой (10) с выполнением условия (11). А обратно? Является ли каждый функционал (10), удовлетворяющий (11), линейным и непрерывным в пространстве $c$? При помощи преобразования Абеля можно доказать, что это так. Далее, на основе сказанного можно считать, что в пространстве $c$ всякий линейный непрерывный функционал выражается формулой (10), в которой выполняется условие (11). В связи с этим из (8) получаем, что *в поле сум-*

[2] Все величины с отрицательными индексами считаем равными нулю.

*мируемости реверсивного метода $A$ каждый линейный непрерывный функционал $f$ выражается формулой*

$$fx = \sum_n \omega_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk} \xi_k, \tag{12}$$

*в которой выполнено условие* (11), *а* $\bar{\Delta}_n a_{nk} = a_{nk} - a_{n-1,\,k}$.

## § 3. Аналог теоремы Мазура—Банаха

Приведенная в § 1 теорема Мазура—Банаха доказана для нормального регулярного метода суммирования Мазуром [8] в 1930 году, а для реверсивного регулярного метода — Банахом [5] в 1932 году. После того как Виланский [15] в 1949 году ввел понятие корегулярного метода, эта теорема была несколькими авторами обобщена на более широкий класс методов суммирования. Соответствующую теорему для нормального корегулярного метода суммирования доказал сам Виланский [15], а в 1954 году Мэкфейль [7] распространил ее на реверсивные корегулярные методы суммирования.

Возникает вопрос: является ли требование корегулярности существенным, или можно распространить теорему Мазура—Банаха и на конулевые методы? Пример 1 (см. § 6) подтверждает, что такой возможности нет. Имеются такие реверсивные конулевые методы суммирования, для которых выполнено условие теоремы Мазура—Банаха, но которые не являются совершенными. Это значит, что необходимое и достаточное условие для совершенности реверсивного метода суммирования, сохраняющего сходимость, имеет форму, отличающуюся от условия теоремы Мазура—Банаха. Такое условие дает

**Теорема 1.** *Реверсивный метод суммирования $A$, сохраняющий сходимость, является совершенным тогда и только тогда, когда система*

$$\sum_n \omega_n \bar{\Delta}_n a_{nk} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{13}$$

*имеет в пространстве абсолютно сходящихся последовательностей*[3] *только тривиальное решение* $\omega_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при всяком методе $B$, удовлетворяющем условию $B^* \supset A^*$, можно $B\{x\}$ рассматривать как линейный непрерывный функционал в $A^*$ и обратно (см. [7, 13]), то в доказательстве теоремы 1 можно исходить из необходимого и достаточного условия I (см. § 1). Известно, что множество $c$

[3] Последовательность $\{\omega_n\}$ называется абсолютно сходящейся, если $\sum_n |\Delta\omega_n| < \infty$. Ясно, что всякая абсолютно сходящаяся последовательность является сходящейся, т. е. существует $\lim_n \omega_n$.

является всюду плотным множеством в $A^*$ тогда и только тогда, когда для каждого линейного непрерывного функционала в $A^*$ из условия

$$fx=0 \quad \text{для всех} \quad x \in c \tag{14}$$

вытекает

$$fx=0 \quad \text{для всех} \quad x \in A^*. \tag{15}$$

Ввиду того, что последовательности

$$e_k=\{\underbrace{0,0,\ \ldots\ ,0}_{k\ \text{нулей}},1,0,\ \ldots\} \qquad (k=0,1,\ \ldots)$$

и

$$e=\{1,1,\ \ldots\ ,1,\ \ldots\}$$

составляют основное множество в $c$, то для выполнения (14) необходимо и достаточно выполнение условий

$$fe_k=\sum_n \omega_n \bar{\Delta}_n a_{nk}=0 \quad (k=0,1,\ \ldots), \tag{16}$$

$$fe=\sum_n \omega_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk}=0, \tag{17}$$

где $\omega_n$ удовлетворяют условию (11).

С другой стороны, условие (15) может быть выполнено только для таких $f$, при которых все $\omega_n=0$. Это значит, что наша теорема будет доказана, если мы докажем, что (17) следует из (16). Доказательство последнего факта проведем в два этапа.

1) Пусть метод $A$ — конулевой. В этом случае последовательность $\sum_{k=0}^{r} e_k$ слабо сходится $(r \to \infty)$ к $e$ в $A^*$ (см. [4]) и тем самым (17) вытекает из (16).

2) При корегулярных методах доказательство несколько сложнее. Для этого покажем сначала, что из всех абсолютно сходящихся последовательностей только сходящиеся к нулю последовательности $\{\omega_n\}$ могут удовлетворять условиям (16) и (17). Действительно, так как всякая абсолютно сходящаяся последовательность $w$ может быть представлена в виде

$$w=\{\omega_n\}=p+\omega e,$$

где $p=\{\pi_n\} \in c_0$ и $\omega=\lim\limits_n \omega_n$, то из (17) получим

$$\sum_n \omega_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk}=\sum_n \pi_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk}+\omega \sum_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk}=$$
$$=\sum_k \sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk}\pi_n+\omega \cdot a=0.$$

Здесь мы изменили порядок суммирования. Ввиду того, что $p \in c_0$, приведенная замена порядка суммирования допустима (см. [14], теорема 7.2). С другой стороны, из (16)

$$\sum_k \sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk}\omega_n=\sum_k \sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk}\,(\pi_n+\omega)=$$

$$=\sum_k \sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk}\pi_n + \omega \sum_k \sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk} =$$

$$=\sum_k \sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk}\pi_n + \omega \sum_k a_k = 0.$$

При вычитании полученных нами равенств, получаем

$$\omega(a - \sum_k a_k) = 0,$$

откуда и вытекает, что в случае $\varrho(A) \neq 0$ условиям (16) и (17) может удовлетворять только $w = \{\omega_n\} \in c_0$. Но тогда в равенстве (17) можно изменить порядок суммирования, а это значит, что равенство (17) следует из условия (16). Другими словами, в пространстве абсолютно сходящихся последовательностей система, составленная из (16) и (17), имеет то же решение, что и система (16).

## § 4. О теореме Мазура—Орлича

Известно, что корегулярный метод $A$ не может быть сильнее конулевого метода $B$, т. е. $A^* \subset B^*$, $A^* \neq B^*$ (см. [4, 13]). Учитывая сказанное о конулевых методах в § 3, можно заключить, что корегулярный метод $A$ может быть на множестве $c$ совместен только с корегулярным методом, а конулевой — с конулевым. В связи с этим возникает вопрос: будут ли конулевые методы совместны на множестве ограниченных последовательностей, если они совместны на $c_0$ (здесь можно ограничиться множеством $c_0$, так как все точки множества $c$ в поле конулевого метода являются точками прикосновения множества $c_0$)? Другими словами, не верна ли теорема Мазура—Орлича и для конулевых методов? Ввиду свойства II (см. введение), поставленная проблема сводится к следующей: являются ли все $A$-суммируемые ограниченные последовательности точками прикосновения множества $c$ в поле конулевого метода $A$?

Рассмотрим конулевой метод $A = (a_{nk})$, где

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{при} \quad k = n, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq n. \end{cases}$$

Ввиду того, что $A$ реверсивен, его поле суммирования $A^*$ — пространство Банаха с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\sum_k a_{nk}\xi_k| = \sup \frac{|\xi_n|}{n+1}.$$

Из последнего ясно, что каждая ограниченная последовательность является точкой прикосновения множества $c$ в $A^*$.

Но последнее свойство не имеет места для каждого конулевого метода. Это видно из следующего примера. Пусть для метода $B$

$$b_{nk}=\begin{cases} (-1)^k & \text{при } k=n-1 \text{ и } k=n, \\ 0 & \text{при остальных } k. \end{cases}$$

Непосредственное вычисление дает, что

$$B\{x\}=\lim_n (-1)^n(\xi_n-\xi_{n-1}).$$

Это значит, что $B\{x\}=0$ для всех $x \in c$, но имеются ограниченные последовательности, суммируемые этим методом к любому числу, отличному от нуля. Например, для последовательности

$$x=\{\xi_k\}=\{(-1)^k\}$$

получаем

$$\sum_k b_{nk}\,\xi_n=2 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е. $B\{x\}=2$. Но это значит, что не все ограниченные последовательности являются точками прикосновения множества $c$ в $B^*$. Отсюда вытекает, что для метода $B$ утверждение теоремы Мазура—Орлича не выполняется.

На основании последнего примера получаем, что верной является

**Теорема 2.** *Для каждой расходящейся ограниченной последовательности $z$ найдется такой конулевой метод суммирования, в поле которого рассматриваемая последовательность не является точкой прикосновения множества сходящихся последовательностей.*

Действительно, существует матрица Теплица $T$, для которой $Tz=\{(-1)^k\}$ (см. [2], стр. 98), и, вместе с тем, конулевой метод, определенный матрицей $P=BT$, удовлетворяет требованиям теоремы 2.

Сравнивая понятие совершенности с утверждением теоремы Мазура—Орлича, естественно ввести понятие — совершенность метода суммирования на множестве ограниченных последовательностей ($O$-совершенность). Метод $A$ назовем *$O$-совершенным*, если при любом методе $B$, который не слабее метода $A$ для ограниченных последовательностей, из

$$B\{x\}=A\{x\} \qquad \text{при } x \in c$$

вытекает

$$B\{x\}=A\{x\} \text{ для всех } x \in m \cap A^*.$$

Учитывая понятие $O$-совершенности, можем сформулировать теорему Мазура—Орлича по-иному:

*Каждый корегулярный метод $A$ — $O$-совершенен.*

Первый приведенный пример показывает, что класс $O$-совершенных методов шире класса корегулярных методов (свойство II во введении). В следующем параграфе разъясняется вопрос о том, какие из конулевых методов являются $O$-совершенными. Для этого будет использована

**Теорема 3.** *Конулевой метод $A$ является $O$-совершенным тогда и только тогда, когда все $A$-суммируемые ограниченные последовательности являются точками прикосновения множества $c_0$ в $A^*$.*

Справедливость этой теоремы очевидна.

## § 5. $O$-совершенные конулевые методы

В этом параграфе дадим некоторые условия для $O$-совершенности конулевого метода $A$. Начнем с вывода одного необходимого и достаточного условия.

**Теорема 4.** *Конулевой метод $A$ является $O$-совершенным тогда и только тогда, когда для каждой $A$-суммируемой ограниченной последовательности $s = \{\sigma_k\}$*

$$A\{s\} = \sum_k a_k \sigma_k.$$

Необходимость. Пусть конулевой метод $A$ — $O$-совершенен. Учитывая свойство конулевого метода, отмеченное в доказательстве теоремы 1, можно заключить, что при каждом $s \in m \cap A^*$ существует последовательность элементов $x_r \in c_0$ $(r = 0, 1, \ldots)$, для которой

$$\lim x_r = s \quad \text{в } A^*.$$

Так как

$$fx = \sum_k a_k \xi_k$$

является линейным непрерывным функционалом на $m \cap A^*$ и

$$fx = A\{x\} \text{ для всех } x \in c_0,$$

то

$$\lim_r fx_r = \lim_r A\{x_r\} = \sum_k a_k \sigma_k. \tag{18}$$

С другой стороны, и $A\{x\}$ является линейным непрерывным функционалом в $A^*$, т. е.

$$\lim_r A\{x_r\} = A\{s\}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) получаем

$$A\{s\} = \sum_k a_k \sigma_k.$$

Достаточность. Пусть

$$A\{s\} = \sum_k a_k \sigma_k \text{ для всех } s \in m \cap A^*. \tag{20}$$

На множестве $m \cap A^*$ каждый линейный непрерывный функционал в $A^*$ можно представить в виде

$$fx = \sum_k \mu_k \xi_k + \tau A\{x\}, \tag{21}$$

где $\mu_k = \beta_k + \sum_n a_{nk} \tau_n$ (см. (8) и (9)). Рассмотрим теперь такие функционалы вида (21), которые обращаются в нуль на множестве $c_0$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$fe_k = \mu_k + \tau a_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда вытекает, что рассматриваемые функционалы выражаются формулой

$$fx = \tau\left(A\{x\} - \sum_k a_k \xi_k\right).$$

Этот результат вместе с (20) и доказывает нашу теорему.

Условие теоремы 4 означает, что в случае $O$-совершенных конулевых методов в выражении

$$A\{x\} = \lim_n \sum_k a_{nk} \xi_k$$

можно переходить к пределу под знаком суммы, если $x \in m \cap A^*$. Это обстоятельство позволяет нам получить достаточные условия для $O$-совершенности конулевого метода. Дадим здесь одно такое условие.

**Теорема 5.** *Конулевой метод $A$ является $O$-совершенным, если он суммирует все ограниченные последовательности.*

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 4 и теоремы Шура (см. [3], стр. 63, теорема 3).

Применяя понятие «слабая сходимость по отрезкам», можно дать еще одно необходимое и достаточное условие для $O$-совершенности конулевого метода суммирования. Отрезками последовательности

$$x = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots\}$$

называются (см. [14]) последовательности

$$x^r = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r, 0, 0, \ldots\} \quad (r = 0, 1, \ldots).$$

Если в пространстве $A^*$ последовательность $\{x^r\}$ слабо сходится к $x$, то говорят, что для последовательности $x$ имеет место слабая сходимость по отрезкам.

Из теоремы 4 как следствие вытекает теперь

**Теорема 6.** *Конулевой метод $A$ является $O$-совершенным тогда и только тогда, когда для всех $A$-суммируемых ограниченных последовательностей имеет место слабая сходимость по отрезкам.*

Достаточность. Если при всех $x \in m \cap A^*$ имеет место слабая сходимость по отрезкам, то для линейного непрерывного функционала $A\{x\}$ получаем

$$A\{x\} = \lim_r A\{x^r\} = \lim_r \sum_{k=0}^{r} a_k\xi_k = \sum_k a_k\xi_k,$$

и на основе теоремы 4 метод $A$ является $O$-совершенным.

Необходимость. Пусть метод $A$ является $O$-совершенным, т. е. для всех $x \in m \cap A^*$

$$A\{x\} = \sum_k a_k\xi_k.$$

Из соотношения (21) получаем, что для каждого линейного непрерывного функционала на множестве $m \cap A^*$ имеет место равенство

$$fx = \sum_k \mu_k\xi_k + \tau \sum_k a_k\xi_k = \sum_k (\mu_k + \tau a_k)\xi_k.$$

Из этого равенства и вытекает утверждение.

Рассмотрим теперь реверсивные конулевые методы суммирования и дадим еще одно достаточное условие для $O$-совершенности.

**Теорема 7.** *Реверсивный конулевой метод $A$ является $O$-совершенным, если из условий*

$$\sum_n |\Delta\omega_n| < \infty,$$

$$\sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk}\omega_n = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots)$$

*вытекает*

$$\lim_m \sum_k \left| \sum_{n=0}^{m} \bar{\Delta}_n a_{nk}\omega_n \right| = 0. \tag{22}$$

Доказательство. Мы знаем, что для реверсивного метода $A$ каждый линейный непрерывный функционал в $A^*$ выражается формулой

$$fx = \sum_n \omega_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk}\xi_k,$$

где $\sum_n |\Delta\omega_n| < \infty$. На основании теоремы 3 можем сказать, что метод $A$ является $O$-совершенным тогда и только тогда, когда из

$$fe_k = \sum_n \bar{\Delta}_n a_{nk}\omega_n = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{23}$$

вытекает

$$fx = \sum_n \omega_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk}\xi_k = 0 \qquad \text{для всех } x \in m \cap A^*,$$

или

$$\lim_m \sum_k \left(\sum_{n=0}^{m} \bar{\Delta}_n a_{nk}\omega_n\right)\xi_k = 0 \qquad \text{для всех } x \in m \cap A^*.$$

Обозначив

$$b_{mk} = \sum_{n=0}^{m} \overline{\Delta}_n a_{nk} \omega_n,$$

можем сказать, что последнее имеет место тогда, когда метод $B = (b_{mk})$ суммирует к нулю все ограниченные последовательности. По вышеупомянутой теореме Шура метод $B$ имеет это свойство тогда и только тогда, когда

$$\lim_m b_{mk} = \sum_n \overline{\Delta}_n a_{nk} \omega_n = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_m \sum_k |b_{mk}| = \lim_m \sum_k \left| \sum_{n=0}^{m} \overline{\Delta}_n a_{nk} \omega_n \right| = 0.$$

Так как первое из этих условий выполнено из-за (23), то наша теорема доказана.

Примечание. Теорема 7 имеет место не только для реверсивных конулевых методов, но и для реверсивных корегулярных методов суммирования. При этом доказательство существенно не усложняется. Здесь это не сделано, потому что для корегулярных методов теорема 7 не имеет смысла. Ведь легче проверяется условие $\varrho(A) \neq 0$, чем условие теоремы 7, и все корегулярные методы — $O$-совершенные.

Наконец заметим, что как корегулярные, так и конулевые совершенные методы суммирования являются $O$-совершенными, но не наоборот. Это выяснится на следующих примерах.

## § 6. Примеры

Пример 1. Рассмотрим снова метод $A = (a_{nk})$, приведенный уже в § 4. Этот метод не является совершенным, так как для последовательности $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ он не совместен с методом $H = (h_{nk}) = (2a_{nk})$. (Ясно, что $H^* = A^*$.). Если бы мы для данного метода $A$ решали систему (4), то получили бы

$$\frac{1}{n+1} \tau_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

откуда $\tau_n = 0$ для всех $n$.

Из этого примера видно, что теорема Мазура—Банаха не верна для конулевых методов.

Система (13) дает нам

$$\frac{1}{k+1} (\omega_k - \omega_{k+1}) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

т. е. $\omega_k = \omega = \mathrm{const}$. На основании теоремы 1 можно сказать, что метод $A$ не является совершенным.

Условие (22) дает

$$\lim_m \sum_k \left| \sum_{n=0}^{m} \overline{\Delta}_n a_{nk} \omega_n \right| = \lim_m \frac{\omega}{m+1} = 0,$$

т. е. метод $A$ является $O$-совершенным.

Пример 2. Пусть дана матрица $C=(c_{nk})$, где

$$c_{nk}=\begin{cases} t_k, & \text{если } n \geqslant k, \\ 0, & \text{если } n<k. \end{cases}$$

Матрица $C$ определяет конулевой метод суммирования, если $\sum\limits_k |t_k|<\infty$ (см. условие (3)). Метод $C$ является реверсивным при $t_k \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$. Здесь

$$\bar{\Delta}_n c_{nk}=\begin{cases} t_k, & \text{если } n=k, \\ 0, & \text{если } n \neq k. \end{cases}$$

Из системы (13) получим

$$t_k \omega_k=0 \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

т. е. реверсивный метод $C$ — совершенен.

Система же (4) (из теоремы Мазура—Банаха) дает нам

$$t_k \sum_{n=k}^{\infty} \tau_n=0 \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

откуда и $\tau_n=0$ $(n=0, 1, \ldots)$.

На основе рассмотренных примеров можно высказать следующую гипотезу: система (4) имеет в пространстве $l$ только тривиальное решение тогда, когда для системы (13) единственным абсолютно сходящимся решением $\{\omega_n\}$ является $\omega_n=0$ $(n=0, 1, \ldots)$. То, что это непременно так, мы видим из соотношения между $\omega_n$ и $\tau_n$ (см. § 2). Это значит, что условие теоремы Мазура—Банаха является только необходимым, но не достаточным для того, чтобы реверсивный конулевой метод суммирования был совершенным.

Пример 3. Пусть дана матрица $D=(d_{nk})$, где

$$d_{nk}=\begin{cases} -1 & \text{для } k=n-1, \\ 1 & \text{для } k=n, \\ 0 & \text{для остальных } k. \end{cases}$$

Матрица $D$ определяет реверсивный конулевой метод суммирования. Этот метод не удовлетворяет ни требованиям теоремы 5, ни требованиям теоремы 7. Применим теорему 4. В данном случае $d_k=0$ $(k=0, 1, \ldots)$. На основе теоремы 4 надо убедиться, что для всякой $D$-суммируемой ограниченной последовательности $s$ ее $D$-сумма равна нулю. Действительно, последовательность $x=\{\xi_k\}$ является $D$-суммируемой, если существует предел

$$\lim_n (\xi_n-\xi_{n-1}).$$

Допустим, что для некоторой последовательности этот предел не равняется нулю. Пусть

$$\xi_n-\xi_{n-1}=a_n,$$

где $\lim\limits_n a_n=a \neq 0$. Отсюда

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \xi_0 + n\alpha + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k,$$

где $\alpha_n = \alpha + \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n \to 0$.

Так как $\alpha \neq 0$, то можно найти такой индекс $p$, что $|\varepsilon_k| < \frac{|\alpha|}{2}$ для всех $k > p$. Тогда

$$\xi_n - \xi_p = (n-p)\alpha + \sum_{k=p+1}^{n} \varepsilon_k,$$

откуда

$$|\xi_n - \xi_p| \geqslant (n-p)\alpha - \sum_{k=p+1}^{n} |\varepsilon_k| > (n-p)\frac{|\alpha|}{2}.$$

Из последнего неравенства видно, что только для неограниченной последовательности ее $D$-сумма может быть отлична от нуля. Таким образом, $D$ является $O$-совершенным конулевым методом, который не суммирует все ограниченные последовательности. Этот пример довольно интересен, так как известно, что всякий матричный метод, суммирующий все ограниченные последовательности, является конулевым (теорема Штейнгауза) и $O$-совершенным методом (см. теорема 5). Теперь мы знаем, что существуют и такие конулевые $O$-совершенные методы, которые не суммируют всех ограниченных последовательностей.

Из определения $O$-совершенного метода суммирования получаем, что метод $A$ не является $O$-совершенным, если найдется такая $A$-суммируемая ограниченная расходящаяся последовательность, $A$-сумма которой не равна $A$-сумме никакой сходящейся последовательности.[4] (Это свойство мы применили уже в § 4 при изучении метода $B$). Возникает вопрос: является ли такое условие и необходимым для того, чтобы метод суммирования не являлся $O$-совершенным? Другими словами, является ли $O$-совершенным метод $A$, если для каждой $A$-суммируемой ограниченной расходящейся последовательности $s$ найдется такая последовательность $x \in c$, что

$$A\{s\} = A\{x\}?$$

Все приведенные в примерах $O$-совершенные методы именно такого вида. Следующим примером покажем, что это не так.

Пример 4. Рассмотрим нормальный конулевой метод $T = (t_{nk})$, для которого

$$t_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ (-1)^k, & \text{если } k = n-1 \text{ и } k = n, \\ 0 & \text{при остальных } k. \end{cases}$$

Из определения элементов матрицы $T$ получаем, что $t_0 = 1$

[4] Ясно, что такое обстоятельство может иметь место только тогда, когда $A\{x\} = 0$ для всех $x \in c$.

и $t_k = 0$ для $k > 1$. Это значит, что для каждого $x = \{\xi_k\} \in c$
$$T\{x\} = \sum_k t_k \xi_k = \xi_0.$$
Если вычислить $T$-сумму последовательности $s = \{(-1)^k\}$, то получим $T\{s\} = 3$. Это значит, что при данном методе $T$ не выполнено условие теоремы 4, т. е. метод $T$ не является $O$-совершенным.

## § 7. Образ множества $c$

Метод суммирования $A$, сохраняющий сходимость, называется *методом типа $M$*, если система (4) имеет только тривиальное решение в пространстве $l$. В 1932 году Банахом была установлена

**Теорема 8.** (см. [5], стр. 93, лемма 2). *Если регулярный метод $A$ — типа $M$, то $A(c)$ является всюду плотным в множестве $c$.*

Приведенная теорема стала основой многих исследований. Например, Хилл [6] показал, что в случае реверсивности метода $A$ условие теоремы 8 является и необходимым. Далее, в 1954 году Рамануджаном [12] было доказано, что результат Хилла можно получить и без требования реверсивности. Наконец, в 1957 году Парамесваран показал, что результат Рамануджана можно еще обобщить. Он доказал теорему (см. [11], следствие 6), в которой требование регулярности было заменено требованием $\varrho(A) \neq 0$.

В настоящем параграфе результат Парамесварана обобщим на такие методы, для которых система (13) имеет только тривиальное решение в пространстве абсолютно сходящихся последовательностей. Такие методы назовем *методами типа $P$*. Из доказательства теоремы 1 ясно, что для корегулярных методов понятия «метод типа $M$» и «метод типа $P$» совпадают. Таким образом, нижеследующая теорема действительно является обобщением результата Парамесварана.

**Теорема 9.** *Для метода $A$, сохраняющего сходимость, множество $A(c)$ оказывается всюду плотным в пространстве $c$ тогда и только тогда, когда $A$ является методом типа $P$.*

Доказательство. 1) Пусть сохраняющий сходимость метод $A$ является методом типа $P$. Множество $A(c)$ является всюду плотным в $c$, если из
$$fy = 0 \quad \text{при всех} \quad y \in A(c) \tag{24}$$
следует
$$fy = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in c, \tag{25}$$
где $f$ — линейный непрерывный функционал в пространстве $c$, выражаемый формулой (10). Из (24) при $x = e_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ получим, что

$$f(Ae_k)=\sum_n \omega_n\bar{\Delta}_n a_{nk}=0 \quad (k=0,1,\ldots).$$

Так как метод $A$ типа $P$, то отсюда

$$\omega_n=0 \quad (n=0,1,\ldots), \tag{26}$$

и, следовательно, условие (25) выполнено.

2) Пусть в случае метода $A$ множество $A(c)$ всюду плотно в $c$. Это значит, что из (24) вытекает (25). Но для функционала (10) условие (25) может быть выполнено только при условии (26).

Мы знаем, что $e$ и $e_k$ $(k=0,1,\ldots)$ составляют основное множество в $c$, т. е. (24) будет выполнено тогда и только тогда когда

$$\begin{cases} f(Ae)=\sum_n \omega_n \sum_k \bar{\Delta}_n a_{nk}=0, \\ f(Ae_k)=\sum_n \omega_n\bar{\Delta}_n a_{nk}=0 \quad (k=0,1,\ldots). \end{cases} \tag{27}$$

Это значит, что система (27) должна иметь только тривиальное решение среди абсолютно сходящихся последовательностей. С другой стороны, системы (27) и (13) имеют одинаковые решения (см. доказательство теоремы 1), т. е. метод $A$ — типа $P$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь множества $A(c)$ и $A(m\cap A^*)$, для которых имеет место соотношение

$$A(c)\subset A(m\cap A^*)\subset c.$$

Возникает вопрос: какой частью является $A(c)$ в $A(m\cap A^*)$? Парамесваран показал[5] (см. [11], теорема 5.2), что при $\varrho(A)\neq 0$ множество $A(c)$ всюду плотно в $A(m\cap A^*)$. Следующая теорема является уточнением этого результата.

**Теорема 10.** *Пусть метод $A$ сохраняет сходимость. Множество $A(c)$ является всюду плотным в $A(m\cap A^*)$ в смысле метрики пространства $c$ тогда и только тогда, когда метод $A$ является $O$-совершенным.*

Достаточность. Для $O$-совершенного метода $A$ имеет место соотношение

$$\bar{c}\supset m\cap A^*.$$

Достаточность условия теоремы следует из этого в силу непрерывности оператора $A$ (см. [13], теорема 4.4).

Необходимость. Пусть $A(c)$ является всюду плотным в $A(m\cap A^*)$ в смысле метрики пространства $c$. В этом случае каждый линейный непрерывный функционал в $c$ обращается в нуль на $A(m\cap A^*)$, если он обращается в нуль на $A(c)$. Из формулы (9) и условия (3) можно получить, что каждый линей-

[5] Для регулярных методов этот факт доказан Банахом (см. [5], стр. 93, лемма 3).

ный непрерывный функционал в пространстве $c$ на множестве $A(m \cap A^*)$ выражается формулой

$$f(Ax) = \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk}\xi_k + \tau A\{x\} =$$
$$\sum_k \mu_k\xi_k + \tau A\{x\},$$

где $\mu_k = \sum_n a_{nk}\tau_n$. Возьмем далее $x = e_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Тогда получим

$$f(Ae_k) = \mu_k + \tau a_k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Из последнего равенства следует, что каждый определяемый на $A(m \cap A^*)$ линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на $A(c)$, выражается формулой

$$f(Ax) = \tau(A\{x\} - \sum_k a_k\xi_k). \tag{28}$$

Нам надо убедиться, что функционал (28) обращается в нуль на множестве $A(m \cap A^*)$ только в том случае, когда метод $A$ является $O$-совершенным. Для этого рассмотрим два случая.

1) Пусть $\varrho(A) \neq 0$. Тогда условие $f(Ae) = 0$ дает, что $\tau = 0$, т. е. функционал (28) обращается в нуль на $A(m \cap A^*)$.

2) В случае же конулевого метода функционал (28) обращается в нуль на $A(c)$ и в том случае, когда $\tau \neq 0$. Теперь утверждение следует из теоремы 4.

## Литература


1. Даревский В. М., О методах Toeplitz'a. Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, **11**, 3—32.
2. Кук, Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
3. Харди Г., Расходящиеся ряды, Москва, 1951.
4. Юримяэ Э. И., Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Корегулярные и конулевые методы. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1959, **8**, 115—121.
5. Banach, S., Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
6. Hill, J. D., On perfect methods of summability. Duke Math. J., 1937, **3**, 702—714.
7. Macphail, M. S., On some recent developments in the theory of series. Canad. J. Math., 1954, **6**, 405—409.
8. Mazur, S., Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. Studia Math., 1930, **2**, 40—50.
9. Mazur, S., Orlicz, W., Sur les méthodes linéaires de sommation. C. r. Acad. sci., 1933, **196**, 32—34.
10. Mazur, S., Orlicz, W., On linear methods of summability. Studia Math., 1954, **14**, 129—160.
11. Parameswaran, M. R., Some applications of Banach functional methods to summability. Proc. Indian Acad. Sci., 1957, **A45**, 377—384.

12. Ramanujan, M. S., On summability methods of type M. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 184—189.
13. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, **53**, 463—487.
14. Zeller, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, **55**, 55—70.
15. Wilansky, A., An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 59—68.

Поступило
14 VII 1964

## KONULLMENETLUSTE TOPOLOOGILISI OMADUSI

**E. Jürimäe**

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse koonduvust säilitavaid summeerimismenetlusi jada-jada teisenduse kujul. Koregulaarsete menetluste ($\varrho(A) \neq 0$) korral on tuntud Mazur-Banachi teoreem pööratava menetluse perfektsusest (vt. [5], lk. 95, teoreem 12 või [8], teoreem 7) ning Mazur-Orliczi teoreem kooskõlast tõkestatud jadade hulgal (vt. [9], teoreem 6 või [10], teoreem 2). Tekib küsimus, kas need teoreemid ei ole laiendatavad ka konullmenetluste ($\varrho(A) = 0$) juhule. Uurides neid summeerimisväljade topoloogilisi omadusi, mis on aluseks mainitud teoreemidele, selgub, et need teoreemid ei ole üldjuhul konullmenetluste korral tõestatavad. Küll aga selgub, et on terve konullmenetluste klass, mille puhul on õige Mazur-Orliczi teoreemi väide. Selline klass (nn. $O$-perfektsed menetlused) on iseloomustatud teoreemidega 4—7. Sealjuures annavad teoreemid 4 ja 6 tarvilikud ja piisavad tingimused konullmenetluse $O$-perfektsuseks.

Menetlust $A = (a_{nk})$ nimetatakse $M$-tüüpi menetluseks, kui süsteemil (4) on vaid triviaalne lahend absoluutselt koonduvate ridade ruumis. Mazur-Banachi teoreem väidab, et pööratav koregulaarne menetlus on perfektne parajasti siis, kui ta on $M$-tüüpi. Osutub, et pööratavate konullmenetluste puhul on vastav tingimus vaid tarvilik. Seoses sellega vaadeldakse koonduvust säilitavaid menetlusi, mille puhul on süsteemil (13) vaid triviaalne lahend absoluutselt koonduvate jadade ruumis. Selliseid menetlusi nimetame *P-tüüpi* menetlusteks. Osutub, et kehtib järgmine Mazur-Banachi teoreemi analoog (vt. § 3): pööratav koonduvust säilitav menetlus on perfektne parajasti siis, kui ta on $P$-tüüpi.

Töö viimases paragrahvis uuritakse koonduvate jadade hulga $c$ kujutist maatriksiga $A$ (vastav summeerimismenetlus olgu koonduvust säilitav). Tõestatakse, et koonduvate jadade hulga kujutis on kõikjal tihe ruumis $c$ parajasti siis, kui menetlus $A$ on $P$-tüüpi (teoreem 9). Teiselt poolt näidatakse selles paragrahvis, et koonduvate jadade hulga kujutis on $A$-summeeruvate tõkestatud jadade hulga kujutises kõikjal tihe (ruumi $c$ meetrika mõttes) parajasti siis, kui menetlus on $O$-perfektne.

## TOPOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN VON CO-NULL-MATRIZEN

E. Jürimäe


### Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die konvergenztreuen Matrixverfahren in der Folge-Folge-Form betrachtet. Für die «co-regulären» Matrixverfahren ($\varrho(A) \neq 0$) sind der Satz von Mazur-Banach über die Perfektheit der reversiblen Matrixverfahren (siehe [5], S. 95, Satz 12 oder [8], Satz 7) und der Satz von Mazur-Orlicz über die Verträglichkeit für beschränkte Folgen (siehe [9], Satz 6 oder [10], Satz 2) bekannt. Es fragt sich, ob sich diese Sätze auch für die «co-null» Matrixverfahren ($\varrho(A) = 0$) beweisen lassen. Der Beweis des Satzes von Mazur-Orlicz beruht auf der folgenden topologischen Eigenschaft: im Wirkfeld eines konvergenztreuen Matrixverfahrens mit $\varrho(A) \neq 0$ ist jede beschränkte divergente Folge Berührpunkt von $c$. Es ergibt sich (siehe § 4), daß jede Co-null-Matrix nicht diese Eigenschaft besitzt, aber es gibt eine ganze Klasse von Matrizen mit $\varrho(A) = 0$ (wir nennen sie $O$-perfekte), für die die Eigenschaft geeignet ist. Die Klasse der $O$-perfekten Verfahren ist durch die Sätze 4—7 charakterisiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $O$-Perfektheit sind mit den Sätzen 4 und 6 gegeben. Die Sätze 5 und 7 geben nur hinreichende Bedingungen. Für die $O$-perfekten Matrizen ist es leicht, den Satz von Mazur-Orlicz zu beweisen.

Man sagt, daß das Matrixverfahren von dem *Typus M* ist, wenn das System (4) nur triviale Lösung im Raum $l$ besitzt. Der Satz von Mazur—Banach sagt, daß ein reversibles Matrixverfahren mit $\varrho(A) \neq 0$ genau dann perfekt ist, wenn es den Typus $M$ besitzt. Für die reversiblen «co-null» Matrixverfahren ist diese Bedingung nur notwendig, aber nicht hinreichend.

Wir sagen, daß ein konvergenztreues Matrixverfahren vom *Typus P* ist, wenn das System (13) nur triviale Lösungen im Raum der absolut konvergenten Folgen besitzt. In § 3 beweist man, daß ein konvergenztreues reversibles Matrixverfahren genau dann perfekt ist, wenn es den Typus $P$ besitzt.

In § 7 wird die Menge $A(c)$ (die Menge der Bildpunkte $y = Ax$, $x \in c$) für die konvergenztreue Matrix betrachtet. Man beweist, daß $A(c)$ in $c$ genau dann überall dicht ist, wenn $A$ den Typus $P$ besitzt (Satz 9). Anderseits, $A(c)$ ist genau dann überall dicht (im Sinne von der Metrik $c$) in der Menge der Bildpunkte der $A$-summierbaren beschränkten Folgen, wenn $A$ $O$-perfekt ist (Satz 10).

# ЗАМЕТКИ О КОРЕГУЛЯРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЧНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ

**Э. Юримяэ**

Кафедра математического анализа

Пусть $X$ и $Y$ — банаховые пространства и[1] $A_{nk}$ — линейные непрерывные операторы из $X$ в $Y$. Преобразование

$$y_n = \sum_k A_{nk} x_k$$

определяет обобщенный матричный метод суммирования $\mathfrak{A} = (A_{nk})$. Предел[2] $\lim\limits_n y_n = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\}$ в $Y$ называется $\mathfrak{A}$-суммой последовательности $\mathfrak{x} = \{x_k\}$. Будем рассматривать методы $\mathfrak{A}$, сохраняющие сходимость. Имеет место

**Теорема** (см. [3]). *Метод $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда*

1° $\lim\limits_n A_{nk} x = A_k x$ *для всех* $x \in X$,

2° $\lim\limits_n \sum\limits_k A_{nk} x = A x$ *для всех* $x \in X$,

3° $\sup\limits_{\|x_k\| \leqslant 1} \|\sum\limits_{k=0}^{p} A_{nk} x_k\| \leqslant M$ *равномерно относительно $n$ и $p$.*

Все обобщенные матричные методы, сохраняющие сходимость, были разделены автором на две части — корегулярные и конулевые методы (см. [1]). В [2] было изучено, при каких условиях в поле суммируемости $\mathfrak{A}^*$ корегулярного метода $\mathfrak{A}$ ограниченные последовательности являются точками прикосновения множества сходящихся последовательностей $c_X$ (такое положение имеет место в случае $X = Y = R_1$). Там же было указано, что таким свойством обладают те корегулярные методы $\mathfrak{A} = (A_{nk})$, для которых выполнено следующее условие:

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 0 до $+\infty$.

[2] Для краткости $\lim\limits_{n \to \infty}$ обозначаем через $\lim\limits_n$.

*из равенства*

$$\lim_{r} \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0 \qquad \text{(T)}$$

*при всех* $x \in X$ *вытекает* $\varphi = 0$ *в* $\overline{Y}^*$.

Так как условие (T) является достаточным для вышеуказанного свойства пространства $\mathfrak{A}^*$, то возникают следующие вопросы. 1) Имеются ли корегулярные обобщенные матричные методы, для которых не выполнено условие (T), но в $\mathfrak{A}^*$ все ограниченные последовательности являются точками прикосновения множества $c_X$? 2) Найдутся ли вообще такие корегулярные обобщенные матричные методы, для которых последнее обстоятельство не имеет места? Положительные ответы на эти вопросы даются, соответственно, следующими примерами.

Пример 1. Пусть $X = c$ и $Y = c_0$. Определим матрицу $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ следующим образом:

$$A_{nk}x = \begin{cases} \xi_k e_k & , \text{ для } k < n, \\ \xi_n e_n - \xi \sum_{i=0}^{n} e_i, & \text{ для } k = n, \\ 0 & , \text{ для } k > n, \end{cases}$$

где $x = \{\xi_i\}$ и $e_i = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i \text{ нулей}}, 1, 0, \ldots\}$.

Можно проверить, что этот метод суммирования сохраняет сходимость. Непосредственное вычисление дает, что $\mathfrak{A}$-сумма сходящейся последовательности $\mathfrak{x} = \{x_k\}$, $x_k = \{\xi_i^k\}$ выражается формулой

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\} = \sum_k (\xi_k^k - \xi) e_k,$$

где $\xi = \lim_k \xi_k$ и $\xi^k = \lim_i \xi_i^k$.

Так как

$$\sum_{k=0}^{n} A_{nk} x_k = \{\xi_0^0 - \xi^n, \ \xi_1^1 - \xi^n, \ \ldots, \ \xi_n^n - \xi^n, 0, 0, \ldots\}, \qquad (1)$$

то $\lim_n \sum_{k=0}^{n} A_{nk} x_k = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\}$ существует тогда и только тогда, когда $\lim_n \xi^n = \xi$ и $\lim_n \xi_n^n = \xi$. Это значит, что для каждой $\mathfrak{A}$-суммируемой последовательности $\mathfrak{x} = \{x_k\}$

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\} = \sum_k (\xi_k^k - \xi) e_k.$$

Автором было показано (см. [2]), что если рассматривать линейные непрерывные функционалы из $\mathfrak{A}^*$ только на множестве $\mathfrak{A}$-суммируемых ограниченных последовательностей, то при методах, сохраняющих сходимость, они выражаются формулой

$$f\mathfrak{x} = \sum_k g_k x_k + \varphi(\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\}), \tag{2}$$

где $g_k \in \overline{X}^*$ и $\varphi \in \overline{Y}^*$.

Рассматривая вместе с $\mathfrak{x} = \{x_k\}$ ее *отрезки*

$$\mathfrak{x}^r = \{x_0, x_1, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots\},$$

из (2) получаем, что

$$f\mathfrak{x} = \lim_r f\mathfrak{x}^r + \lim_r \varphi\,(\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\} - \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}^r\}). \tag{3}$$

Исходя из равенства (3), можем заключить, что из условия

$$f\mathfrak{x} = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathfrak{x} \in c_X$$

следует, что $f\mathfrak{x} = 0$ для всех $\mathfrak{A}$-суммируемых ограниченных последовательностей. Это значит, что при данном методе $\mathfrak{A}$ все $\mathfrak{A}$-суммируемые ограниченные последовательности являются точками, прикосновения множества $c_X$. Существование $\mathfrak{A}$-суммируемых ограниченных расходящихся последовательностей следует из (1).

С другой стороны, так как каждый линейный непрерывный функционал в $Y = c_0$ выражается формулой

$$\varphi y = \sum_i \alpha_i \eta_i,$$

где $y = \{\eta_i\}$ и $\sum_i |\alpha_i| < \infty$, то из условия (T) получаем

$$\lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = -\xi \sum_i \alpha_i = 0.$$

Так как из последнего равенства не следует, что $\varphi = 0$ в $Y^*$ (в последнем случае должны все $\alpha_i = 0$), то при данном методе $\mathfrak{A}$ не выполняется условие (T). Это значит, что условие (T) не является необходимым для того, чтобы все расходящиеся $\mathfrak{A}$-суммируемые ограниченные последовательности являлись точками прикосновения множества $c_X$ в поле суммируемости корегулярного обобщенного матричного метода $\mathfrak{A}^*$.

Пример 2. Пусть[3] $X = R_1$ и $Y = R_2$. Матрицу $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ определим следующим образом:

$$A_{nk}x = a_{nk}xe_1 + (-1)^k xe_2, \text{ если } k = n - 1 \text{ и } k = n,$$
$$A_{nk}x = a_{nk}xe_1 \text{ для остальных случаев.}$$

Здесь $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$, а метод $(a_{nk})$ — некоторый регулярный метод суммирования, суммирующий последовательность $\mathfrak{x}_1 = \{(-1)^k\}$ (например, метод арифметических средних). Метод $\mathfrak{A} = (A_{nk})$, определенный таким образом, является коре-

[3] Через $R_n$ обозначается $n$-мерное эвклидовое пространство.

гулярным. Этот метод $\mathfrak{A}$ суммирует все сходящиеся последовательности к точкам одномерного подпространства $R_1$ пространства $Y = R_2$, но $\mathfrak{A}$-сумма ограниченной расходящейся последовательности $\mathfrak{x}_1$ не принадлежит к $R_1$. Отсюда следует, что $\mathfrak{x}_1$ не является точкой прикосновения множества $c_X$ в $\mathfrak{A}^*$. Действительно, каждый непрерывный линейный функционал в $Y = R_2$ выражается формулой

$$\varphi y = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2,$$

где $y = (\eta_1, \eta_2) \in R_2$ и $\alpha_1$, $\alpha_2$ — некоторые числа. Так как $f\mathfrak{x} = \varphi(\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\})$ является непрерывным линейным функционалом в $\mathfrak{A}^*$, то пологая $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, видим, что существует такой непрерывный линейный функционал $f$ в $\mathfrak{A}^*$, что $f\mathfrak{x} = 0$ для всех $\mathfrak{x} \in c_X$ и $f\mathfrak{x}_1 \neq 0$. Это значит, что $\mathfrak{x}_1$ не является точкой прикосновения множества $c_X$ в $\mathfrak{A}^*$.

Этот пример показывает нам, что существуют корегулярные обобщенные матричные методы суммирования, в поле суммируемости которых не все ограниченные расходящиеся последовательности являются точками прикосновения множества сходящихся последовательностей. Отсюда, между прочим, заключаем, что не для всех корегулярных обобщенных матричных методов верно обобщение теоремы Мазура—Орлича о совместности матричных методов на множестве ограниченных последовательностей.

На основе приведенных примеров можно сделать следующие заключения.

1. Без наложения дополнительных ограничений на обобщенные корегулярные матричные методы суммирования для них не верны многие известные свойства корегулярных методов из теории обыкновенных матричных методов суммирования. Одним из таких дополнительных ограничений является условие (Т).

2. Свойства обобщенных матричных методов суммирования зависят в первую очередь от пространства $Y$, а не от пространства $X$.

## Литература


1. Юримяэ Э. И., Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования, корегулярные и конулевые методы. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ. матем. наук, 1959, 8, 115—121.
2. Юримяэ Э. И., Об одном классе обобщенных матричных методов суммирования. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ. матем. наук, 1959, 8, 166—172.
3. Zeller, K., Verallgemeinerte Matrixtransformationen. Math. Z., 1956, 53, 18—20.



Поступило
19 XII 1964

## MÄRKMEID KOREGULAARSETE ÜLDISTATUD MAATRIKSMENETLUSTE KOHTA

E. Jürimäe

Resümee

Käesolevas artiklis on antud kaks näidet koregulaarsete üldistatud maatriksmenetluste kohta. Nendest näidetest selgub, et eksisteerivad koregulaarsed üldistatud maatriksmenetlused, mille summeerimisväljas leidub tõkestatud hajuvaid jadasid, mis pole koonduvate jadade hulga kuhjumispunktideks (näide 2). Näitest 1 järeldub, et tingimus $(T)$ (vt. [2]) pole tarvilik ülalmärgitud summeerimisvälja omaduseks.

## REMARKS ON CO-REGULAR GENERALIZED MATRIX METHODS OF SUMMABILITY

E. Jürimäe

Summary

There are two examples of co-regular generalized matrix methods of summability (see [1]) given in this paper. It is known that every bounded divergent sequence is the point of limit of the set of convergent sequences in the field of co-regular matrix method of summability if the elements of matrix are real or complex numbers. For co-regular generalized matrix method of summability, it is not always so (example 2). A sufficient condition for this topological property was given in [2] (condition (T)). According to the first example, the condition (T) is not necessary.

# ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА, СВЯЗАННЫЕ С МЕТОДАМИ ЯКИМОВСКОГО

**Т. Сырмус**

Кафедра математического анализа

## § 1. Введение

В настоящей статье изучаются вопросы, связанные с аналогом метода Хаусдорфа для преобразования последовательности в функцию. Этот полунепрерывный аналог метода Хаусдорфа введен Якимовским в статье [4], и мы назовем его *методом Якимовского.*

Многими авторами рассматривался следующий вопрос.

Пусть $A$ и $B$ два метода преобразования последовательностей. При каких условиях и для каких пар методов $A$ и $B$ из $A$-суммируемости последовательности вытекает $A$-суммируемость $B$-преобразования исходной последовательности? Этот вопрос решен Якимовским [4] для случая, когда $A$ — полунепрерывный метод Якимовского, а $B$ — регулярный метод Хаусдорфа. Теоремы Якимовского, посвященные решению поставленной проблемы, приведены в § 2 нашей статьи. Это теоремы 2.2 и 2.3. В указанных теоремах на преобразуемую последовательность наложено определенное ограничительное условие (см. условие (2.1)). В § 4, в частности, показано, что для определенного класса методов Якимовского условие (2.1) заменяется другим, не более ограничительным для некоторого класса последовательностей. В результате получаются аналоги теорем 2.2 и 2.3.

Основной целью настоящей статьи (см. § 3 и § 4) является решение задачи, обратной вышеприведенной. Именно, разыскиваются условия, при которых из $A$-суммируемости $B$-преобразования последовательности вытекает $A$-суммируемость исходной последовательности. При решении этой задачи метод $A$ — попрежнему полунепрерывный метод Якимовского, а в качестве метода B рассматриваются некоторые частные виды метода Хаусдорфа. Так как обратные теоремы получаются с ограничениями, наложенными на преобразуемую последовательность, то мы отнесем их к тауберовым теоремам. Тауберовы условия наших теорем приведены в § 2, предназначенном для ознакомления с основными понятиями и обозначениями.

## § 2. Обозначения и основные понятия

Следуя Якимовскому [4], введем преобразование последовательности в функцию, определяющее полунепрерывный метод суммирования последовательностей. Якимовский показал, что рассматриваемый метод можно считать полунепрерывным аналогом метода Хаусдорфа, преобразующего последовательность в последовательность. Обозначения, касающиеся метода Хаусдорфа, сохраним такие, какие введены в статье [8].

Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная для $x > x_0 \geqslant 0$ и имеющая производные любого порядка. Назовем преобразование последовательности[1] $\{s_n\}$, определенное равенством

$$t(x) = \sum_k (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) s_k \quad (x > 0), \tag{2.0}$$

$[J,\ f(x)]$-преобразованием последовательности $\{s_n\}$. Если $\lim\limits_{x\to\infty} t(x) = s$, то скажем, что рассматриваемая последовательность $[J,\ f(x)]$-суммируема к числу $s$, а $s$ назовем $[J, f(x)]$-суммой данной последовательности. По мере надобности будем эту сумму обозначать символом $[J,\ f(x)]\{s_n\}$. Множество всех $[J,\ f(x)]$-суммируемых последовательностей обозначим через $[J,\ f(x)]^*$.

Описанный метод определяет целый класс полунепрерывных методов суммирования. Если, в частности, $f(x) = (x+1)^{-1}$, то метод $[J,\ f(x)]$ определяет известный метод Абеля. В случае же $f(x) = e^{-x}$ мы имеем дело с экспоненциальным методом Бореля.

Введем, далее, некоторые обозначения.

Для последовательности $\{s_n\}$ мы определим последовательность $\{s_n^*\}$ равенством

$$s_n^* = \max_{r \leqslant n} |s_r|.$$

Класс последовательностей $\{s_n\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_n \frac{x^n}{n!} |f^{(n)}(x)| s_n^* < \infty \qquad (x > 0), \tag{2.1}$$

обозначим через $m_f$, а класс ограниченных последовательностей

[1] Везде, где опущены пределы изменения индексов, они пробегают все целочисленные значения от 0 до $+\infty$.

через $m$. Нетрудно проверить, что классы $m_f$ и $m$ связаны соотношением $m_f \supset m$, если $\sum_n \frac{x^n}{n!} |f^{(n)}(x)| < \infty$. Класс последовательностей, сохраняющих знак [2], обозначим символом $m_p$.

В качестве тауберовых условий для теорем из §§ 3 и 4 рассматриваются условия трех видов: 1) $\{s_n\} \in m_f$, т. е. для $x > 0$ последовательность $\{s_n\}$ удовлетворяет условию (2.1), где $f(x)$ — функция, определяющая метод суммирования Якимовского в тауберовой теореме, 2) $\{s_n\} \in m$, т. е. последовательность $\{s_n\}$ удовлетворяет оценке $s_n = O(1)$ и 3) $\{s_n\} \in m_p$, т. е. последовательность $\{s_n\}$ удовлетворяет односторонней оценке $s_n \geqslant 0$.

Через $V_0^1$ обозначим класс функций с конечным изменением на отрезке $[0,1]$, в то время как к классу $cV_0^1$ отнесем подкласс функций $\varphi(t) \in V_0^1$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0+) = 0, \qquad \varphi(1) = \varphi(1-) = 1. \tag{2.2}$$

Якимовский [4] вывел для метода $[J, f(x)]$ условия регулярности, доказав следующую теорему.

**Теорема 2.1.** *Для того, чтобы метод $[J, f(x)]$ был регулярным методом суммирования, необходимо и достаточно существование такой функции $\varphi(t) \in cV_0^1$, чтобы*

$$f(x) = \int_0^1 t^x d\varphi(t) \qquad (x > 0). \tag{2.3}$$

Установлено также, что условие (2.3) вместе с условием $\varphi(t) \in V_0^1$ необходимо и достаточно для того, чтобы метод $[J, f(x)]$ сохранял сходимость.

При выводе наших теорем мы будем опираться на следующие теоремы Якимовского [4].

**Теорема 2.2.** *Пусть метод $[J, f(x)]$ сохраняет сходимость, а*

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k. \tag{2.4}$$

*Если последовательность $\{s_n\} \in m_f \cap [J, f(x)]^*$, то для произвольного регулярного метода* [3] *$[H, \mu_k]$ последовательность $\{t_n\} \in [J, f(x)]^*$, причем выполняется равенство $[J, f(x)]\{t_n\} = [J, f(x)]\{s_n\}$.*

Замечание. Если метод $[J, f(x)]$ сохраняет сходимость, то справедливо соотношение $m \subset m_f$. Поэтому все теоремы, доказанные для класса $m_f$ и метода $[J, f(x)]$, сохраняющего сходимость, справедливы и для класса $m$.

Для упрощения формулировок ряда теорем введем следующие классы функций и последовательностей.

Символом $\varepsilon G$ обозначим класс таких неотрицательных мо-

---

[2] В рассуждениях ограничимся случаем $s_n \geqslant 0$.

[3] О методе Хаусдорфа см [9].

нотонно возрастающих функций, которые в случае произвольного фиксированного $\varepsilon \in (0, 1]$ удовлетворяют условию

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(\varepsilon x)}{g(x)} = 1. \tag{2.5}$$

При помощи функций этого класса Якимовский рассматривает еще один вид суммируемости, который мы назовем *исправленной суммируемостью.*

Пусть для последовательности $\{s_n\}$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{g(x)} \sum_k (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) s_n = s. \tag{2.6}$$

Все последовательности, удовлетворяющие условию (2.6), мы припишем классу $[J, f(x)]_g^*$ и скажем, что последовательность исправленно суммируема методом $[J, f(x)]$. В некоторых случаях предел (2.6) будем обозначать символом $[J, f(x)]_g\{s_n\}$.

Одна из нужных нам теорем Якимовского [4] приобретает в случае введенной нами символики следующий вид.

**Теорема 2.3.** *Пусть метод $[J, f(x)]$ сохраняет сходимость, последовательность $\{t_n\}$ определена равенствами* (2.4), *а функция $g(x) \in \varepsilon G$. Если последовательность $\{s_n\} \in m_f \cap [J, f(x)]_g^*$, то для произвольного регулярного метода $[H, \mu_k]$ последовательность $\{t_n\} \in [J, f(x)]_g^*$, причем выполняется равенство $[J, f(x)]_g\{t_n\} = [J, f(x)]_g\{s_n\}$.*

В доказательствах нам понадобится еще следующая теорема Якимовского [4], касающаяся понятия преобразования Меллина.

Преобразование Меллина для функции $\alpha(t) \in V_0^1$ определено равенством

$$T(z) = \int_0^1 t^z d\alpha(t).$$

**Теорема 2.4.** *Если функция $f(x)$, определенная для $x > x_0 \geqslant 0$, удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \sum_k \frac{x^k}{k!} |f^{(k)}(x)| < \infty, \tag{2.7}$$

*то $f(x)$ — регулярная аналитическая функция на полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, а функция $f(x)$ при $x > 0$ — преобразование Меллина для некоторой функции класса $V_0^1$. Если функция $f(x)$ при $x > x_0 \geqslant 0$ — преобразование Меллина для некоторой функции класса $V_0^1$, то выполняется условие* (2.7).

## § 3. Некоторые тауберовы теоремы

В настоящем параграфе мы рассмотрим методы суммирования последовательностей, определенные равенством

$$U_a = aE + (1-a)B, \tag{3.1}$$

где $E$ — единичный метод, $B$ — один из методов $[H, \mu_k]$, $C^\varkappa$ или $H^\varkappa$ $(\varkappa > 0)$, а $a$ — положительное действительное число.

Предварительно докажем следующие леммы.

**Лемма 3.1.** *Если $A$ — треугольный метод, удовлетворяющий условию*

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| = O(1), \tag{3.2}$$

*и*

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} s_k,$$

*то из соотношения $\{s_n\} \in m_f$ вытекает соотношение $\{\tau_n\} \in m_f$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно отметить, что при условиях нашей леммы имеет место следующая оценка

$$\max_{r \leqslant n} |\tau_r| = O(s_n{}^*).$$

Из полученной оценки, предположения $\{s_n\} \in m_f$ и теорем сравнения для знакопостоянных рядов вытекает утверждение нашей леммы.

Замечание 1. В нижеследующем считаем очевидным, что при выполнении неравенств (3.2) из условия $\{s_n\} \in m$ вытекает $\{\tau_n\} \in m$.

**Лемма 3.2.** *Если $a > {}^1/_2$, а метод Хаусдорфа $[H, \mu_k]$ вполне регулярен, то последовательность Хаусдорфа $\{\nu_k\}$, где*

$$\nu_k = \frac{1}{a + (1-a)\mu_k}, \tag{3.3}$$

*регулярна.*

**Лемма 3.3.** *Если абсолютно монотонная и регулярная последовательность Хаусдорфа $\{\nu_k\}$ удовлетворяет условию $\inf\limits_k \nu_k > 0$, то последовательность Хаусдорфа $\{1/\nu_k\}$ регулярна.*

Для доказательства леммы 3.2 (леммы 3.3) достаточно отметить, что аналогичные леммы для методов $C^\varkappa$, $H^\varkappa$ $(\varkappa = 2, 3, \ldots)$ и $H^\varkappa$ $(0 < \varkappa < 1)$ доказаны в статье [7] (соответственно леммы 1.2, 1.3 и 1.4). Доказательство первых двух из указанных лемм основано на применении теоремы 3А из [5]. Точно так же доказывается и лемма 3.2 (лемма 3.3), если вместо теоремы 3А из [5] воспользоваться теоремой 1 из [2] (теоремой 2.4 из [8], в которой дополнительно нужно затребовать регулярности метода $[H, \nu_k]$).

Докажем теперь основные теоремы этого параграфа.

**Теорема 3.1.** *Пусть $a > {}^1/_2$, $[H, \mu_k]$ — вполне регулярный метод Хаусдорфа и*

$$t_n = as_n + (1-a)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k s_k. \qquad (3.4)$$

*Если метод $[J, f(x)]$ сохраняет сходимость и $\{s_n\}\in m_f$, то из соотношения*

$$\{t_n\}\in[J, f(x)]^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\}\in[J, f(x)]^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J, f(x)]\{t_n\} = [J, f(x)]\{s_n\}. \qquad (3.5)$$

Доказательство. Известно (см. гл. XI из [9]), что линейная комбинация двух методов Хаусдорфа есть метод Хаусдорфа. При этом, линейная комбинация двух регулярных методов Хаусдорфа — регулярный метод Хаусдорфа, если коэффициенты этой линейной комбинации составляют в сумме единицу. В нашей теореме преобразование (3.4) определено методом (3.1), где $B$ — вполне регулярный метод Хаусдорфа $[H, \mu_k]$. Ввиду вышесказанного, метод $U_\alpha = aE + (1-a)[H, \mu_k]$ — регулярный метод Хаусдорфа с последовательностью $\varsigma_n = \alpha + (1-\alpha)\mu_n$. Поэтому $U_\alpha = [H, \zeta_n]$.

Обозначим, далее, метод, обратный методу $U_\alpha$, через $U_\alpha^{-1}$ и рассмотрим последовательность $\{s_n\}$ как $U_\alpha^{-1}$-преобразование последовательности $\{t_n\}$. При этом установим, что для вполне регулярного метода $[H, \mu_k]$ и $a > 1/2$ метод $U_\alpha^{-1}$ является регулярным методом Хаусдорфа. Для этого, следуя правилу умножения методов Хаусдорфа (см. гл. XI из [9]), заметим, что

$$U_\alpha[H, \nu_k] = [H, \zeta_k]\ [H, \nu_k] = E,$$

где последовательность $\{\nu_k\}$ определена равенствами (3.3). Поэтому $U_\alpha^{-1} = [H, \nu_k]$, и, ввиду леммы 3.2, метод $U_\alpha^{-1}$ регулярен.

Таким образом, последовательность $\{s_n\}$ — регулярное Хаусдорфово $U_\alpha^{-1}$-преобразование последовательности $\{t_n\}$. Если при этом последовательность

$$\{t_n\}\in m_f, \qquad (3.6)$$

то будут выполнены все условия теоремы 2.2 и ее применение привело бы нас к доказываемому соотношению $\{s_n\}\in[J, f(x)]^*$ и равенству (3.5).

Поэтому остается доказать, что соотношение (3.6) вытекает из условий нашей теоремы. Докажем это.

Известно, что в случае каждого треугольного регулярного метода $A = (a_{nk})$ выполняется условие (3.2). Следовательно, оно выполнено и для нашего метода $U_\alpha$. Ввиду леммы 3.1 из условия $\{s_n\}\in m_f$ и вытекает доказываемое соотношение (3.6). Теорема доказана.

В проведенном доказательстве выяснилось, что метод $U_\alpha^{-1} = [H, \nu_k]$ — регулярный метод Хаусдорфа, и поэтому для него выполнено условие (3.2). Учитывая лемму 3.1, получаем теперь, что соотношение (3.6) влечет за собой

$$\{s_n\} \in m_f,$$

и наша теорема 3.1 равносильна следующей.

**Теорема 3.1 А.** *Пусть $\alpha > 1/2$, $[H, \mu_k]$ — вполне регулярный метод Хаусдорфа и последовательность $\{t_n\}$ определена равенством* (3.4).

*Если метод $[J, f(x)]$ сохраняет сходимость и $\{t_n\} \in m_f \cap [J, f(x)]^*$, то $\{s_n\} \in [J, f(x)]^*$. При этом выполняется равенство $[J, f(x)]\{t_n\} = [J, f(x)]\{s_n\}$.*

Если в доказательстве теоремы 3.1 вместо теоремы 2.2 применить теорему 2.3, то для случая исправленной суммируемости получим следующую теорему.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\alpha > 1/2$, $[H, \mu_k]$ — вполне регулярный метод Хаусдорфа, последовательность $\{t_n\}$ определена равенством* (3.3) *и функция $g(x) \in \varepsilon G$.*

*Если метод $[J, f(x)]$ сохраняет сходимость и $\{s_n\} \in m_f$, то из соотношения*

$$\{t_n\} \in [J, f(x)]_g^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\} \in [J, f(x)]_g^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J, f(x)]_g\{s_n\} = [J, f(x)_g\{t_n\}.$$

Замечание 2. В теоремах 3.1, 3.1А и 3.2 для некоторых частных случаев метода $[H, \mu_k]$ можно условия, наложенные на параметр $\alpha$, расширить. Так, в случае методов $H^\varkappa$ $(0 < \varkappa \leqslant 1)$ условие $\alpha > 1/2$ заменится условием $\alpha > 0$. Для этого нужно вместо теоремы 1 из [2] применить теорему 3.1 из [6] или теорему 51 из [9]. Если же здесь применить теорему 3А из [5], то условие $\alpha > 1/2$ расширится также для методов $C^\varkappa$ и $H^\varkappa$ $(\varkappa = 2, 3, \ldots)$, но не достигнет наиболее общего возможного $\alpha > 0$.

Рассмотрим далее теоремы более общие, чем теоремы 3.1 и 3.2.

**Теорема 3.3.** *Пусть функция $\chi(r) \in cV_0^1$ не имеет сингулярной составляющей, причем $\inf\limits_{\mathrm{Re}\,\omega \geq 0} \left|\int\limits_0^1 r^\omega\, d\chi(r)\right| > 0$, а*

$$t_n = \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} s_k\, d\chi(r). \tag{3.7}$$

*Если метод $[J, f(x)]$ сохраняет сходимость и $\{s_n\} \in m_f$, то из соотношения*

$$\{t_n\} \in [J, f(x)]^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\} \in [J,\ f(x)]^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J,\ f(x)]\{t_n\} = [J,\ f(x)]\{s_n\}. \qquad (3.8)$$

Доказательство. Заметим, что последовательность моментов метода Хаусдорфа $[H,\ \chi(r)]$, определяющего преобразование (3.7), есть $\mu_n = \int_0^1 r^n d\chi(r)$. Ввиду условия $\chi(r) \in cV_0^1$ и теоремы 208 из [9] метод $[H,\ \chi(r)]$ — регулярный метод Хаусдорфа. Применение леммы 3.1 приводит теперь к заключению, что последовательность $\{t_n\} \in m_f$, ибо по условию $\{s_n\} \in m_f$. Ввиду леммы 1.1 из [8] последовательность Хаусдорфа $\{1/\mu_k\}$ при условиях нашей теоремы регулярна. Как и в теореме 3.1, из полученного вытекает, что методом, обратным для $[H,\ \chi(r)] = [H,\ \mu_k]$, является метод $[H,\ 1/\mu_k]$, причем метод $[H,\ 1/\mu_k]$ регулярен.

Таким образом, последовательность $\{s_n\}$ может быть рассмотрена как регулярное хаусдорфово $[H,\ 1/\mu_k]$-преобразование последовательности $\{t_n\}$. Выше было установлено, что $\{t_n\} \in m_f$. Поэтому выполнены все условия теоремы 2.2, применение которой приводит к доказываемому соотношению $\{s_n\} \in [J,\ f(x)]^*$ и равенству (3.8).

Аналогично можно установить подобную теорему и для метода $[H,\ \nu_k]$, где последовательность $\{\nu_k\}$ — абсолютно монотонная и регулярная последовательность Хаусдорфа, удовлетворяющая условию $\inf_k \nu_k > 0$. Для этого в предыдущем доказательстве воспользуемся вместо леммы 1.1 из [8] леммой 3.3, устанавливающей регулярность метода $[H,\ \nu_k]^{-1}$.

Таким образом, имеет место

**Теорема 3.4.** *Пусть $\{\nu_k\}$ — абсолютно монотонная и регулярная последовательность Хаусдорфа, удовлетворяющая условию $\inf_k \nu_k > 0$, а*

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \nu_k s_k. \qquad (3.9)$$

*Если метод $[J,\ f(x)]$ сохраняет сходимость и $\{s_n\} \in m_f$, то из соотношения*

$$\{t_n\} \in [J,\ f(x)]^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\} \in [J,\ f(x)]^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J,\ f(x)]\{t_n\} = [J,\ f(x)]\{s_n\}.$$

Воспользовавшись в доказательстве теорем 3.3 и 3.4 вместо теоремы 2.2 теоремой 2.3, можем считать доказанной следующую теорему.

**Теорема 3.5.** *Пусть метод* $[H, \chi(r)]$ (*или* $[H, \nu_k]$) *удовлетворяет условиям теоремы* 3.3 (*теоремы* 3.4), *последовательность* $\{t_n\}$ *определена равенством* (3.7) (*или* (3.9)) *и функция* $g(x) \in \varepsilon G$.

*Если метод* $[J, f(x)]$ *сохраняет сходимость и* $\{s_n\} \in m_f$, *то из соотношения*

$$\{t_n\} \in [J, f(x)]_g^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\} \in [J,\ f(x)]_g^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J, f(x)]_g\{t_n\} = [J, f(x)]_g\{s_n\}.$$

Замечание 3. В теоремах 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5, как и в теореме 3.1, условие $\{s_n\} \in m_f$ может быть заменено равносильным условием $\{t_n\} \in m_f$.

## § 4. Замечание к двум теоремам Якимовского

В теоремах Якимовского 2.2 и 2.3 на последовательность $\{s_n\}$ наложено ограничительное условие $\{s_n\} \in m_f$. Это условие введено в теореме 2.2 для того, чтобы обосновать равенство

$$\sum_n (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) t_n =$$

$$= \int_0^1 \sum_k \left\{ (-1)^k \frac{(xr)^k}{k!} f^{(k)}(xr) s_k \right\} d\varphi(r), \tag{4.1}$$

необходимое при доказательстве теоремы. В этом равенстве последовательность $\{t_n\}$ есть $[H,\ \mu_k]$-преобразование последовательности $\{s_n\}$. Так как по условиям теоремы 2.2 метод Хаусдорфа $[H,\ \mu_k]$ регулярен, то существует (см. [9], гл. XI) функция $\varphi(r) \in cV_0^1$, такая, что

$$\mu_k = \int_0^1 r^k d\varphi(r).$$

Поэтому последовательность $\{t_n\}$ можно представить в виде

$$t_n = \int_0^1 \{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} s_k \} d\varphi(r). \tag{4.2}$$

Далее учтем, что метод $[J, f(x)]$ — полунепрерывный метод суммирования, сохраняющий сходимость. В этом случае метод $[J, f(x)]$ удовлетворяет условию (см. [9], гл. III)

$$\sum_n \frac{x^n}{n!} |f^{(n)}(x)| < K, \tag{4.3}$$

где постоянная $K$ не зависит от $x > 0$. Из неравенств (4.3) и теоремы 2.4 вытекает, что $f(x)$ — регулярная функция на полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Благодаря регулярности функции $f(x)$ можно в равенстве (4.1) производные $f^{(k)}(xr)$ представить в виде

$$f^{(k)}(xr) = \sum_n \frac{(rx - x)^n}{n!} f^{(k+n)}(x). \tag{4.4}$$

Ввиду равенств (4.2) и (4.4) ясно, что справедливость равенства (4.1) вытекает из следующего равенства:

$$\sum_n (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} s_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{(rx)^k}{k!} (-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n \frac{[x(1-r)]^n}{n!} f^{(k+n)}(x). \tag{4.5}$$

Доказательство же равенства (4.5) проводится элементарными вычислениями и проверкой допустимости изменения в порядке суммирования. При выполнении условия $\{s_n\} \in m_f$, т. е. условия (2.1), ряды, содержащиеся в равенстве (4.5), сходятся абсолютно, а это гарантирует как допустимость в изменении порядка суммирования, так и допустимость интегрирования. Этим доказано равенство (4.5), следовательно, и равенство (4.1).

Нашей целью будет показать, что в некоторых случаях можно установить справедливость равенства (4.1) и без условия (2.1).

Для этого рассмотрим последовательности из класса $m_p$ и положим, что последовательность $\{s_n\}$ не удовлетворяет условию (2.1), т. е. $\{s_n\} \bar{\in} m_f$, но $\{s_n\} \in m_p \cap [J, f(x)]^*$. Тогда теорема 2.2 не в силе распознать, суммируемо ли $[H, \mu_k]$-преобразование последовательности $\{s_n\}$ методом $[J, f(x)]$ или нет. Ограничимся, далее, рассмотрением методов $[J, f(x)]$, удовлетворяющих условиям

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \varphi_n(x),$$

где

$$\varphi_n(x) \geqslant 0 \qquad (x > x_0 \geqslant 0).$$

Этим условиям, в частности, удовлетворяют методы Абеля и Бореля, для которых, как указывалось в § 2, соответственно $f(x) = (x+1)^{-1}$ и $f(x) = e^{-x}$.

Справедливость равенств (4.5) и (4.1) для последовательностей $\{s_n\} \in m_p \cap [J, f(x)]^*$ очевидна. Вместе с тем из условия $\{s_n\} \in m_p \cap [J, f(x)]^*$ вытекает и соотношение

$$\{t_n\} \in [J, f(x)]^*.$$

Таким образом справедлива

**Теорема 4.1.** *Пусть метод* $[J, f(x)]$ *сохраняет сходимость,* $f^{(k)}(x) = (-1)^k \varphi_k(x)$ *и* $\varphi_k(x) \geqslant 0$ $(x > x_0 \geqslant 0)$, *а*

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k s_k.$$

*Если последовательность* $\{s_n\}\in m_p\cap[J,f(x)]^*$, *то для произвольного регулярного метода* $[H,\mu_k]$ *последовательность* $\{t_n\}\in[J,f(x)]^*$, *причем* $[J,f(x)]\{t_n\}=[J,f(x)]\{s_n\}$.

Вышеприведенное рассуждение относится и к теореме Якимовского 2.3, поэтому справедлива и

**Теорема 4.2.** *Пусть метод* $[J,f(x)]$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.1, $t_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k s_k$, *а* $g(x)\in\varepsilon G$.

*Если последовательность* $\{s_n\}\in m_p\cap[J,\ f(x)]_g^*$, *то для произвольного регулярного метода* $[H,\mu_k]$ *последовательность* $\{t_n\}\in[J,\ f(x)]_g^*$, *причем* $[J,f(x)]_g\{t_n\}=[J,f(x)]_g\{s_n\}$.

Теоремы 4.1 и 4.2 возьмем за основу при выводе следующих теорем.

**Теорема 4.3.** *Пусть метод* $[H,\nu_k]$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.4, *последовательность* $\{t_n\}$ *определена равенством* (3.9), *а метод* $[J,\ f(x)]$ *сохраняющий сходимость, удовлетворяет условиям* $f^{(k)}(x)=(-1)^k\varphi_k(x)$ *и* $\varphi_k(x)\geqslant 0$ $(x>x_0\geqslant 0)$. *При сделанных предположениях для каждой последовательности* $\{s_n\}\in m_p$ *из соотношения*

$$\{t_n\}\in[J,f(x)]^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\}\in[J,f(x)]^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J,f(x)]\{t_n\}=[J,f(x)]\{s_n\}.$$

Для доказательства заметим, что из условия $\{s_n\}\in m_p$ вытекает $\{t_n\}\in m_p$. В остальном доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 3.4, если в нем воспользоваться теоремой 4.1 вместо теоремы 2.2.

Если же применение теоремы 3.4 заменить применением теоремы 3.1, то получится

**Теорема 4.4.** *Пусть* $a\in({}^1/_2,1)$, $[H,\mu_k]$ — *вполне регулярный метод Хаусдорфа, последовательность* $\{t_n\}$ *определена равенством* (3.4), *а метод* $[J,f(x)]$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.3.

*При сделанных предположениях для каждой последовательности* $\{s_n\}\in m_p$ *из соотношения*

$$\{t_n\}\in[J,f(x)]^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\}\in[J,f(x)]^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J,f(x)]\{t_n\}=[J,f(x)]\{s_n\}.$$

Учитывая замечание 2, сохраняющее свое значение и для теоремы 4.4., аналогично получается

**Теорема 4.5.** *Пусть* $a \in (0,1)$,

$$t_n = as_n + (1-a)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k,$$

*а метод* $[J, f(x)]$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.3.

*При сделанных предположениях для каждой последовательности* $\{s_n\} \in m_p$ *из соотношения*

$$\{t_n\} \in [J, f(x)]^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\} \in [J, f(x)]^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J, f(x)]\{t_n\} = [J, f(x)]\{s_n\}.$$

Эта теорема для случая $f(x) = (x+1)^{-1}$ и произвольных последовательностей $\{s_n\}$ доказана Гопсоном [3]. У Андерсена [1] рассмотрен такой случай теоремы 4.5, в котором метод $[J, f(x)]$ заменен методом Чезаро преобразования последовательности в последовательность, а $\{s_n\}$ — произвольная последовательность.

Теоремы, аналогичные теоремам 4.3, 4.4 и 4.5 для случая исправленной суммируемости, получаются из теоремы 4.2. Приведем одну из них.

**Теорема 4.6.** *Пусть метод* $[H, \nu_k]$ *удовлетворяет условиям теоремы 3,4, последовательность* $\{t_n\}$ *определена равенством* (3.9), *функция* $g(x) \in \varepsilon G$, *а метод* $[J, f(x)]$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.3.

*При сделанных предположениях для каждой последовательности* $\{s_n\} \in m_p$ *из соотношения*

$$\{t_n\} \in [J, f(x)]_g^*$$

*вытекает*

$$\{s_n\} \in [J, f(x)]_g^*,$$

*причем выполняется равенство*

$$[J, f(x)]_g\{t_n\} = [J, f(x)]_g\{s_n\}.$$

В заключение отметим, что автор собирается посвятить отдельную статью вопросам применения доказанных теорем.

## Литература


1. Andersen, A. F., Om en Græseværdisætuing af J. Mercer. Mathematisk Tidskr., 1927, B, 77—83.
2. Basu, S. K., On the total relative strength of some Hausdorff methods equivalent to identity. Amer. J. Math., 1954, 76, 389—398.
3. Copson, E. T., A generalisation of a theorem of Mercer. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1930, 2, 108—110.

4. J a k i m o v s k y, A., The sequence-to-function analogues to Hausdorff transformations. Bull. Research Cauncil Israel, 1960, F, **8F**, 3.
5. P o l n i a k o v s k i, Z., Polynomial Hausdorff transformations. I. Mercerian theorems. Ann. polon. math., 1958, **5**, 1—24.
6. С ы р м у с Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1961, **102**, 169—184.
7. С ы р м у с Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 37—49.
8. С ы р м у с Т., Об обобщенной теореме Мерсера. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 99—106.
9. Х а р д и Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Поступило
19 XII 1964

## JAKIMOVSKI MENETLUSTEGA SEOSES OLEVAD TAUBERI TÜÜPI TEOREEMID

T. Sõrmus

R e s ü m e e

Olgu $f(x)$ poolteljel $x > x_0 \geqslant 0$ määratud lõpmatult diferentseeruv funktsioon. Jakimovski vaatles jadade niisuguseid poolpidevaid summeerimismenetlusi, mis on määratud võrdusega (2.0).

Jada $\{s_k\}$ nimetatakse $[J, f(x)]$-summeeruvaks, kui eksisteerib $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Artiklis leitakse tingimused selleks, et jada $\{s_k\}$ summeeruvusest menetlusega $AB$ järelduks selle jada $A$-summeeruvus. Siinjuures on $A$ mingi $[J, f(x)]$-menetlus ja $B$ — mingi Hausdorffi menetlus (vt. teoreemid 3.1—3.5 ja 4.3—4.6).

## EINIGE TAUBERSCHE SÄTZE

T. Sõrmus

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es sei $f(x)$ auf der Halbachse $x > x_0 \geqslant 0$ eine bestimmte und beliebig oft differenzierbare Funktion. Nach Jakimowski wird das mittels der Vorschrift (2.0) bestimmte Limitierungsverfahren $[J, f(x)]$-Verfahren genannt. Strebt $t(x) \to s$ für $x > x_0 \geqslant 0$, $x \to \infty$, so heißt die Folge $\{s_k\}$ nach den $[J, f(x)]$-Verfahren limitierbar, kurz $[J, f(x)]$-limitierbar.

Es werden einige Taubersche Bedingungen dazu gefunden, die unter Hinzunahme der neuen Bedingungen aus der $AB$-Limitierbarkeit, einer Folge auf ihre $A$-Limitierbarkeit schließen lassen. Dabei wird unter $A$ ein $[J, f(x)]$-Verfahren und unter $B$ ein Hausdorff-Verfahren verstanden (s. Sätze 3.1—3.5 und 4.3—4.6).

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ

**Г. Кангро и Ю. Ламп**

Кафедра математического анализа

## § 1. Вводные замечания

1. В настоящей статье рассматриваются нормальные матричные методы суммирования $A=(a_{nk})$, в обратной матрице которых при виде преобразования последоваетльности в последовательность имеется конечное число отличных от нуля диагоналей. Именно, если $A^{-1}=(a'_{nk})$, то предпологаем, что

$$a'_{nk}=0 \quad \text{при} \quad k<n-\alpha, \tag{1.1}$$

где $\alpha$ есть некое натуральное число. Класс всех таких методов $A$, удовлетворяющих условиям[1]

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}=1 \tag{1.2}$$

и

$$a'_{nk}=O(a'_{nn}), \tag{1.3}$$

будем обозначать через $K_\alpha$. Из условия (1.2) вытекает (см. [3], стр. 198)

$$\sum_{k=0}^{n} a'_{nk}=1. \tag{1.4}$$

Определяя величины $\alpha'_{nk}$ равенством

$$\alpha'_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n} a'_{n\nu},$$

из (1.2), в силу (1.1), находим

$$\alpha'_{nk}=1 \quad \text{при} \quad k\leqslant n-\alpha. \tag{1.5}$$

Из (1.3) вытекает

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то каждое соотношение в настоящей статье справедливо при всех значениях $0, 1, 2, \ldots$ соответствующих индексов.

$$a'_{nk} = O(a'_{nn}). \tag{1.6}$$

Действительно, поскольку $a'_{n\nu} = 0$ при $\nu < n - \alpha$, то

$$|a'_{nk}| \leqslant \sum_{\nu=n-\alpha}^{n} |a'_{n\nu}| = \sum_{\nu=n-\alpha}^{n} O(a'_{nn}) = O(a'_{nn}).$$

При $k=0$ из (1.6), ввиду (1.4), следует

$$1 = |a'_{n0}| = O(a'_{nn}) = O\left(\frac{1}{a_{nn}}\right),$$

откуда

$$a_{nn} = O(1). \tag{1.7}$$

Класс $K_\alpha$ содержит метод Чезаро $C_\alpha$ целочисленного порядка $\alpha$, который в виде преобразования последовательности в последовательность задается матрицей с элементами

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \quad (0 \leqslant k \leqslant n), \quad a_{nk} = 0 \quad (k > n),$$

где

$$A^\alpha_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} \quad (n > 0), \quad A^\alpha_0 = 1.$$

Можно показать, что нормальный метод Рисса $(R, p, \alpha)$ целочисленного порядка $\alpha$, который при помощи преобразования ряда в последовательность задается матрицей с элементами[2] (см. [5])

$$a_{nk} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right)\left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{n+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{n+\alpha-1}}\right) \quad (0 \leqslant k \leqslant n),$$

$$a_{nk} = 0 \quad (k > n),$$

принадлежит классу $K_\alpha$, если $p_n > 0$ и $p_n = O(p_{n-1})$. Метод взвешенных средних Рисса $(R, p) = (R, p, 1)$ принадлежит классу $K_1$ тогда и только тогда, когда $P_{n-1} = O(P_n)$.

**2.** В настоящей статье при помощи метода билинейных преобразований исследуется суммируемость произведения последовательностей, суммируемых соответсвенно методами $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$. Суммируемость произведения последовательностей исследовали впервые С. Мазур и В. Орлич [7]. Фроли [6] впервые использовал метод билинейных преобразований для исследования произведения последовательностей. Билинейный метод для исследования суммируемости произведения двойных рядов вы-

---

[2] Всюду $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0$, где $p_k$ — данные комплексные числа. Метод $(R, p, \alpha)$ превращается в метод Чезаро при $p_k = 1$.

работал в своей диссертации И. Кулль [4]. Произведение последовательностей, суммируемых методами взвешенных средних Рисса, т. е. методами Рисса первого порядка, начал исследовать в своей дипломной работе Т. Аккел, используя метод билинейных преобразований.

С. Мазур и В. Орлич доказали, что если $A = (a_{nk})$ — метод, сохраняющий сходимость и удовлетворяющий условию $\sup_n |a_{nk}| \neq 0$, то вместе с двумя $A$-суммируемыми последовательностями $\{U_k\}$ и $\{V_k\}$ метод $A$ тогда и только тогда суммирует также последовательность $\{U_k V_k\}$, когда $A$ не суммирует расходящихся последовательностей.

Мы скажем, что произведение последовательностей является *произведением типа* $A, B \to C$, если $\{U_k V_k\}$ является $C$-суммируемой при каждой $A$-суммируемой последовательности $\{U_k\}$ и $B$-суммируемой последовательности $\{V_k\}$. Теорема Мазура и Орлича утверждает, что если $A$ сохраняет сходимость и $\sup_n |a_{nk}| \neq 0$, то произведение последовательностей является произведением типа $A$, $A \to A$ тогда и только тогда, когда $A$ не суммирует расходящихся последовательностей. В настоящей статье устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение последовательностей было произведением типов[3] $|A|$, $B \to C$, $|A|$, $|B| \to C$, $|A|$, $|B| \to |C|$, где $C = (c_{nk})$ — треугольный метод суммирования последовательностей, $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$.

**3.** Комплексные числа $\varepsilon_k$ называются *множителями суммируемости типа* $(A, B, C)$, если при каждой $A$-суммируемой последовательности $\{U_k\}$ и $B$-суммируемой последовательности $\{V_k\}$ ряд $\sum_k \varepsilon_k U_k V_k$ является $C$-суммируемым. Множители суммируемости типа $(A, B, C)$ впервые рассматривал Г. Кангро [2]. Ф. Вихманн [1] обобщил метод Пейеримхоффа на множители суммируемости типов $(|A|, B, C)$ $(|A|, |B|, C)$, $(|A|, |B|, |C|)$. Необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости этих типов в случае $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$ в настоящей статье выводятся из результатов, полученных авторами для суммируемости произведения последовательностей.

## § 2. Суммируемость произведения последовательностей

**1.** Пусть $C = (c_{nk})$ — треугольный метод суммирования, а методы $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ нормальны. Для исследования $C$-суммируемости последовательности $\{W_k\}$, где

[3] Всюду $|A|$ означает абсолютную суммируемость методом $A$.

$$W_k = U_k V_k,$$

образуем сумму

$$W'_n = \sum_{j=0}^{n} c_{nj} W_j = \sum_{j=0}^{n} c_{nj} U_j V_j.$$

Воспользовавшись соотношениями

$$U_j = \sum_{i=0}^{j} a'_{ji} u'_i, \quad V_j = \sum_{k=0}^{j} b'_{jk} V'_k.$$

где $A^{-1} = (a'_{ji})$ и $B^{-1} = (b'_{jk})$, получим билинейное преобразование

$$W'_n = \sum_{i,\, k=0}^{n} C^1_{nik} u'_i V'_k \tag{2.1}$$

с матрицей

$$C^1_{nik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{n} c_{nj} a'_{ji} b'_{jk}. \tag{2.2}$$

Из (2.1) вытекают преобразования

$$W'_n = \sum_{i,\, k=0}^{n} C^2_{nik} u'_i v'_k, \tag{2.3}$$

$$w'_n = \sum_{i,\, k=0}^{n} C^3_{nik} u'_i v'_k, \tag{2.4}$$

где

$$C^2_{nik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{n} c_{nj} a'_{ji} \beta'_{jk}, \tag{2.5}$$

$$C^3_{nik} = \bar{\Delta}_n C^2_{nik} = C^2_{nik} - C^2_{n-1,\, ik}. \tag{2.6}$$

Методом, развитым И. Куллем [4] для билинейного преобразования, можно доказать следующие леммы.

**Лемма 1.** *Билинейное преобразование* (2.1) *переводит пространство*[4] $l \times c$ *в пространство* $c$ *тогда и только тогда, когда*[5]

1° $\exists \lim C^1_{nik}$,

2° $\exists \lim \sum_{k=0}^{n} C^1_{nik}$,

3° $\sum_{k=0}^{n} |C^1_{nik}| = O(1)$.

**Лемма 2.** *Билинейное преобразование* (2.3) *переводит пространство* $l \times l$ *в пространство* $c$ *тогда и только тогда, когда*

---

[4] Здесь $c$ означает пространство сходящихся последовательностей, а $l$ — пространство абсолютно сходящихся рядов.

[5] Символ $\lim$ означает $\lim\limits_{n \to \infty}$.

1° $\exists \lim C^2_{nik}$,

2° $C^2_{nik} = O(1)$.

**Лемма 3.** *Билинейное преобразование* (2.4) *переводит пространство $l \times l$ в пространство $l$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_n |C^3_{nik}| = O(1).$$

Применяя леммы 1, 2, 3 соответственно к билинейным преобразованиям (2.1), (2.3), (2.4), получаем следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа $|A|$, $B \to C$, необходимо и достаточно выполнение условий леммы* 1, *где $C^1_{nik}$ определяются формулой* (2.2).

**Теорема 2.** *Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа $|A|$, $|B| \to C$, необходимо и достаточно выполнение условий леммы* 2, *где $C^2_{nik}$ определяются формулой* (2.5).

**Теорема 3.** *Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа $|A|$, $|B| \to |C|$, необходимо и достаточно выполнение условия леммы* 3, *где $C^3_{nik}$ определяются формулой* (2.6).

**2.** Пусть $E$ — метод сходимости, $A = (a_{nk})$ — нормальный и $C = (c_{nk})$ — произвольный треугольный метод суммирования последовательностей. Известно, что $C \supset A$ (соответственно $C \supset |A|$ или $|C| \supset |A|$) тогда и только тогда, когда $CA^{-1} \supset E$ (соответственно $CA^{-1} \supset |E|$ или $|CA^{-1}| \supset |E|$). Учитывая теорему Кожима—Шура [3], а также леммы 6 и 7 работы [3], легко установить следующие три леммы.

**Лемма 4.** *Для того, чтобы $C \supset A$, необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $\exists \lim D^1_{ni}$,

2° $\exists \lim \sum_{j=0}^{n} D^1_{nj}$,

3° $\sum_{i=0}^{n} |D^1_{ni}| = O(1)$,

где

$$D^1_{ni} = \sum_{j=i}^{n} c_{nj} a'_{ji}.$$

**Лемма 5.** *Для того, чтобы $C \supset |A|$, необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $\exists \lim D^2_{ni}$,

2° $D^2_{ni} = O(1)$,

где

$$D^2_{ni} = \sum_{j=i}^{n} c_{nj} a'_{ji}.$$

**Лемма 6.** *Для того, чтобы $|C| \supset |A|$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_n |D^3_{ni}| = O(1),$$

где

$$D^3_{ni} = \overline{\Delta}_n D^2_{ni}.$$

В дальнейшем оказывается полезной

**Лемма 7.** *Если*

1° $\exists \lim c_{nk}$,

2° $A \in K_\alpha$,

3° $c_{nk} = O(a_{kk})$,

то $C \supset |A|$ тогда и только тогда, когда $C \supset |E|$.

Доказательство. Если[6] $n \geqslant i + \alpha$, то, в силу (1.5), мы можем записать

$$D^2_{ni} = \sum_{j=i}^{i+\alpha-1} c_{nj} a'_{ji} + \sum_{j=i+\alpha}^{n} c_{nj}.$$

В силу условия 1° леммы 7 условие 1° леммы 5 выполняется тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim \sum_{j=i+\alpha}^{n} c_{nj}. \tag{2.7}$$

Ввиду условий 2° и 3° леммы 7 имеем

$$\left|\sum_{j=i}^{i+\alpha-1} c_{nj} a'_{ji}\right| \leqslant \sum_{j=i}^{i+\alpha-1} |c_{nj}| |a'_{ji}| = O(1),$$

вследствие чего условие 2° леммы 5 выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=i+\alpha}^{n} c_{nj} = O(1). \tag{2.8}$$

Утверждение леммы 7 вытекает из леммы 6 работы [3], согласно которой условия (2.7) и (2.8) необходимы и достаточны для включения $C \supset |E|$.

Аналогично лемме 7 при помощи леммы 7 работы [3] доказывается

**Лемма 8.** *Если*

1° $A \in K_\alpha$,

2° $\sum_n |\overline{\Delta}_n c_{nk}| = O(a_{kk})$,

*то $|C| \supset |A|$ тогда и только тогда, когда $|C| \supset |E|$.*

---

[6] При $n < i + \alpha$ условие 2° леммы 5 автоматически выполнено.

3. Применим теоремы 1, 2, 3 к случаю $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$.

**Теорема 4.** *Пусть* $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$ *и* $\exists \lim c_{nk}$. *Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа* $|A|$, $B \to C$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $C \supset B$,

2° $c_{nk} = O(a_{kk} b_{kk})$.

Доказательство. Необходимость[7] условия 1° теоремы 4 вытекает из существования предела

$$\lim \sum_{k=0}^{n} c_{nk} U_k V_k,$$

если предполагать $U_k = 1$. Из условия 3° леммы 1 при $k = i - \beta$, $i - \beta + 1$, $i - \beta + 2$, $\ldots$, $i$ находим

$$c_{ni} a'_{ii} b'_{i,\, i-\beta} = O(1), \tag{2.9$_1$}$$

$$c_{ni} a'_{ii} b'_{i,\, i-\beta+1} + c_{n,\, i+1} a'_{i+1,\, i} b'_{i+1,\, i-\beta+1} = O(1), \tag{2.9$_2$}$$

$$c_{ni} a'_{ii} b_{i,\, i-\beta+2} + c_{n,\, i+1} a'_{i+1,\, i} b'_{i+1,\, i-\beta+2} + c_{n,\, i+2} a'_{i+2,\, i} b'_{i+2,\, i-\beta+2} = O(1), \tag{2.9$_3$}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$c_{ni} a'_{ii} b'_{ii} + c_{n,\, i+1} a'_{i+1,\, i} b'_{i+1,\, i} + \ldots + c_{n,\, i+\beta}\, a'_{i+\beta,\, i} b'_{i+\beta,\, i} = O(1). \tag{2.9$_{\beta+1}$}$$

В силу (1.6) имеем $a'_{i+1,\, i} = O(a'_{i+1,\, i+1})$. Поэтому из соотношения (2.9$_2$) при помощи соотношения (2.9$_1$) вытекает

$$c_{ni} a'_{ii} b'_{i,\, i-\beta+1} = O(1).$$

Аналогично из соотношения (2.9$_3$) следует

$$c_{ni} a'_{ii} b'_{i,\, i-\beta+2} = O(1).$$

Наконец, из соотношения (2.9$_{\beta+1}$) вытекает необходимость условия 2° теоремы 4.

Достаточность. Условие 1° леммы 1 вытекает из формулы (2.2) ввиду существования $\lim c_{nk}$, если учесть, что $b'_{jk} = 0$ при $j > k + \beta$. Поскольку $B \in K_\beta$, то $B$, а в силу включения $C \supset B$ и $C$, суммируют последовательность $\{1\}$, т. е. $\lim \sum_{j=0}^{n} c_{nj}$ существует. Следовательно, ввиду соотношения

$$\sum_{k=0}^{n} C^1_{nik} = \sum_{j=i}^{n} c_{nj} a'_{ji} \sum_{k=0}^{i} b'_{jk} = \sum_{j=i}^{i+\alpha-1} c_{nj} a'_{ji} + \sum_{j=i+\alpha}^{n} c_{nj},$$

условие 2° леммы 1 выполнено.

Поскольку $a'_{ji} = O(a'_{jj})$, $b'_{jk} = O(b'_{jj})$, то при помощи тождества

---

[7] Необходимость условий 1° и 2° теоремы 4 вытекает также из теоремы 5.

$$\sum_{k=0}^{n}|C^1{}_{nik}| = \sum_{k=i-\beta}^{i}\left|\sum_{j=i}^{k+\beta} c_{nj}a'_{ji}b'_{jk}\right| + \sum_{k=i+1}^{i+\alpha-1}\left|\sum_{j=k}^{k+\beta} c_{nj}a'_{ji}b'_{jk}\right| + \sum_{k=i+\alpha}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n} c_{nj}b'_{jk}\right|$$

из условий 1° и 2° теоремы 4 при помощи леммы 4 вытекает условие 3° леммы 1.

Примечание. Условие $\exists \lim c_{nk}$ необходимо, если $b'_{i,\,i-\beta} \neq 0$. Действительно, это условие вытекает из соотношения $C^1{}_{ni,\,i-\beta} = c_{ni}a'_{ii}b'_{i,\,i-\beta}$, ввиду условия 1° леммы 7.

**Следствие 1.** *Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа* $|C_\alpha|$, $C_\beta \to C$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $\exists \lim c_{nk}$,
2° $C \supset C_\beta$,
3° $c_{nk}(k+1)^{\alpha+\beta} = O(1)$.

**Следствие 2.** *Пусть* $P_{n-1} = O(P_n)$, $Q_{n-1} = O(Q_n)$. *Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа* $|R, p|$, $(R, q) \to C$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $\exists \lim c_{nk}$,
2° $C \supset (R, q)$,
3° $c_{nk}P_kQ_k = O(p_kq_k)$.

**Теорема 5.** *Пусть* $A \in K_\beta$, $B \in K_\beta$ *и* $\exists \lim c_{nk}$. *Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа* $|A|$, $|B| \to C$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $C \supset |E|$,
2° $c_{nk} = O(a_{kk}b_{kk})$.

Доказательство. Необходимость. Существование предела

$$\lim \sum_{k=0}^{n} c_{nk}U_kV_k$$

при $V_k = 1$ влечет за собой включение $C \supset |A|$, откуда на основе леммы 5 вытекает

$$D^2{}_{ni} = O(1).$$

Из формулы (2.5) при $k = i - \beta + 1$, в силу соотношения

$$\beta'_{i,\,i-\beta+1} = \beta'_{i,\,i-\beta} - b'_{i,\,i-\beta+1} = 1 - b'_{i,\,i-\beta+1},$$

находим

$$C^2{}_{ni,\,i-\beta+1} = \sum_{j=i}^{n} c_{nj}a'_{ji}\beta'_{j,\,i-\beta+1} = c_{ni}a'_{ii}\beta'_{i,\,i-\beta+1} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{nj}a'_{ji} =$$

$$= c_{ni}a'_{ii}\beta'_{i,\,i-\beta+1} + \sum_{j=i}^{n} c_{nj}a'_{ji} - c_{ni}a'_{ii} =$$

$$= \sum_{j=i}^{n} c_{nj}\alpha'_{ji} + c_{ni}\alpha'_{ii}(\beta'_{i,i-\beta+1} - 1) =$$

$$= \sum_{j=i}^{n} c_{nj}\alpha'_{ji} - c_{ni}a'_{ii}b'_{i,i-\beta} = D^2_{ni} - c_{ni}a'_{ii}b'_{i,i-\beta}.$$

Отсюда, в силу условия 2° леммы 2, вытекает

$$c_{ni}a'_{ii}b'_{i,i-\beta} = O(1). \tag{2.10}$$

Аналогично из формулы (2.5) при $k = i - \beta + 2$ находим

$$C^2_{ni,\, i-\beta+2} = D^2_{ni} - c_{ni}a'_{ii}b'_{i,i-\beta+1} - c_{ni}a'_{ii}b'_{i,i-\beta} -$$
$$- c_{n,\, i+1}\alpha'_{i+1,\, i}b'_{i,i-\beta+1},$$

откуда при помощи соотношений $\alpha'_{i+1,\,i} = O(a'_{i+1,\,i+1})$ и (2.10), ввиду условия 2° леммы 2, следует

$$c_{ni}a'_{ii}b_{i,i-\beta+1} = O(1).$$

Наконец, из формулы (2.5) при $k = i$ вытекает необходимость условия 2° теоремы 5.

Ввиду соотношения $b_{kk} = O(1)$ (ср. (1.7)), из условия 2° теоремы 5 заключаем $c_{nk} = O(a_{kk})$. Необходимость условия 1° теоремы 5 следует теперь из леммы 7.

Достаточность. На основе леммы 7 справедливы соотношения $C \supset |A|$ и $C \supset |B|$. Условие 1° леммы 2 вытекает из формулы (2.5) ввиду существования пределов

$$\lim c_{nk}, \qquad \lim \sum_{j=k+\beta}^{n} c_{nj}\alpha'_{jk}.$$

Условие 2° леммы 2 вытекает из тождеств

$$C^2_{nik} = \sum_{j=k}^{k+\beta-1} c_{nj}\alpha'_{ji}\beta'_{jk} + D^2_{ni} - \sum_{j=i}^{k+\beta-1} c_{nj}\alpha'_{ji} \qquad (i \leqslant k),$$

$$C^2_{nik} = \sum_{j=i}^{i+\alpha-1} c_{nj}\alpha'_{ji}\beta'_{jk} + D^2_{ni} - \sum_{j=k}^{i+\alpha-1} c_{nj}\beta_{jk} \qquad (k \leqslant i),$$

если учесть соотношения $\alpha'_{ji} = O(a'_{jj})$, $\beta'_{jk} = O(b'_{jj})$, $C \supset |A|$, $C \supset |B|$ и условия 1°, 2° теоремы 5.

Аналогично доказательству теоремы 5 из теоремы 3 при помощи леммы 8 выводится

**Теорема 6.** *Пусть $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$. Для того, чтобы произведение последовательностей являлось произведением типа $|A|$. $|B| \to |C|$, необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $|C| \supset |E|$,

2° $\sum_{n} |\overline{\Delta}_n c_{nk}| = O(a_{kk}b_{kk})$.

## § 3. Обобщенные множители суммируемости

Пусть дан ряд

$$\sum_k \varepsilon_k U_k V_k$$

и треугольный метод суммирования $\Gamma = (\gamma_{nk})$ в виде преобразования ряда в последовательность. Числа $\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(A, B, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда для каждой $A$-суммируемой последовательности $\{U_k\}$ и B-суммируемой последовательности $\{V_k\}$ существует предел

$$\lim \sum_{k=0}^{n} c_{nk} U_k V_k,$$

где

$$c_{nk} = \gamma_{nk} \varepsilon_k.$$

Другими словами, числа $\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(A, B, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда произведение последовательностей представляет собой произведение типа $A$, $B \rightarrow C$, где $C = (c_{nk})$. Поэтому, заменяя в теоремах 4—6 величины $c_{nk}$ через $\gamma_{nk}\varepsilon_k$ и имея в виду, что включение $C \supset B$ здесь означает, что числа $\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости первого рода типа $(B, C)$ (см. [3], стр. 200), мы получаем следующие теоремы об обобщенных множителях суммируемости.

**Теорема 7.** *Пусть $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$ и $\exists \lim \gamma_{nk}$. Величины $\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(|A|, B, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда*

1° *$\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(B, C)$,*

2° $\gamma_{nk}\varepsilon_k = O(a_{kk} b_{kk})$.

**Теорема 8.** *Пусть $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$ и $\exists \lim \gamma_{nk}$. Величины $\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(|A|, |B|, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда*

1° *$\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(|E|, C)$,*

2° $\gamma_{nk}\varepsilon_k = O(a_{kk} b_{kk})$.

**Теорема 9.** *Пусть $A \in K_\alpha$, $B \in K_\beta$. Величины $\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(|A|, |B|, |\Gamma|)$ тогда и только тогда, когда*

1° *$\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(|E|, |C|)$,*

2° $\varepsilon_k \sum_n |\bar{\Delta}_n \gamma_{nk}| = O(a_{kk} b_{kk})$.

Примечание 2. Если метод $\Gamma = (\gamma_{nk})$ суммирует (соответственно абсолютно суммирует) все абсолютно сходящиеся ряды к их обыкновенной сумме, то условие 2° теорем 7 и 8 (соответственно теоремы 9) можно заменить условием

$$\varepsilon_k = O(a_{kk} b_{kk}). \tag{3.1}$$

Действительно, согласно предположению,

$$\lim_n \gamma_{nk} = 1, \ \gamma_{nk} = O(1)$$

(соответственно $\sum_n \bar{\Delta}_n \gamma_{nk} = 1$, $\sum_n |\bar{\Delta}_n \gamma_{nk}| = O(1)$), вследствие чего из условия 2° теорем 7 и 8 (соответственно 9) следует (3.1) и наоборот.

В случае $A = C_\alpha$, $B = C_\beta$ из теорем 7—9 вытекает

**Следствие 3.** *Если $\Gamma$ удовлетворяет условию примечания 2, то величины $\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(|C_\alpha|, C_\beta, \Gamma)$ (соответственно $(|C_\alpha|, |C_\beta|, \Gamma)$ или $(|C_\alpha|, |C_\beta|, |\Gamma|)$) тогда и только тогда, если $\varepsilon_k$ представляют собой множители суммируемости типа $(C_\beta, C)$ (соответственно $(|E|, C)$ или $(|E|, |C|)$) и $(k+1)^{\alpha+\beta} \varepsilon_k = O(1)$.*

В случае регулярного $\Gamma$ более громоздкие условия для первых двух типов множителей суммируемости следствия 3 дал Вихманн (см. [1], стр. 245).

В случае $A = (R, p)$, $B = (R, q)$ из теорем 7 и 8 при помощи теорем 10 и 11 статьи [3] вытекают соответственно теоремы 10 и 9 статьи [1].

## Литература


1. Вихманн Ф., Об обобщенных множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 226—248.
2. Кангро Г., О линейных и билинейных преобразованиях последовательностей в банаховом пространстве. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 199—201.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
4. Куллъ И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
5. Burkhill, H., On Riesz and Riemann summability. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1961, **57**, 55—60.
6. Fraleigh, P. A., Regular bilinear transformations of sequences. Amer. J. Math., 1931, **53**, 697—709.
7. Mazur, S., Orlicz, W., Sur les methodes lineares de sommation. C. r. Acad. sci., 1933, **196**, 32—34.
8. Zeller, K., Theorie der Limitier ungsverfahren. Berlin, 1959.



Поступило
14 IV 1965

## ÜHEST MAATRIKSMENETLUSTE KLASSIST

G. Kangro ja J. Lamp

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse ühte normaalsete maatriksmenetluste klassi, kus iga menetluse jada-jada teisenduse pöördmaatriksis on lõplik arv nullist erinevaid diagonaale. Bilineaarteisenduste meetodi abil leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused vaadeldava klassi menetlustega summeeruvate jadade korrutise summeeruvuseks. Saadud tulemusi rakendatakse üldistatud summeeruvustegurite uurimiseks.

## VON EINER KLASSE DER MATRIXVERFAHREN

G. Kangro und J. Lamp

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird eine gewisse Klasse von normalen Matrixverfahren, deren Umkehrmatrix der Folge-Folge-Transformation eine endliche Anzahl von Null verschiedene Diagonale besitzt, betrachtet. Mit Hilfe der Methode der bilinearen Transformationen werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Summierbarkeit des Produktes von Folgen, die mittels der Verfahren der betrachteten Klasse limitierbar sind, gefunden. Erhaltene Ergebnisse werden für die Untersuchung von den verallgemeinernden Summierbarkeitsfaktoren angewendet.

# МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

**М. Абель**

Кружок СНО при кафедре математического анализа

## § 1. Введение

Пусть $\{\varphi_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел.

Ряд[1]

$$\sum u_n \tag{1}$$

называем $\varphi$-$C^\alpha$- суммируемым (или $\varphi$-$C^\alpha$- ограниченным), если последовательность

$$\{\varphi_n U'_n\}, \tag{2}$$

где

$$U'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_n} u_k,$$

сходится (ограничена).

Ряд (1) называем $\varphi$-$|C^\alpha|$-суммируемым, если ряд

$$\sum \varphi_n u'_n, \tag{3}$$

где[2]

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k A^{\alpha-1}_{n-k}}{n A^\alpha_n} u_k,$$

абсолютно сходится.

Комплексные числа $\varepsilon_n$ называются множителями суммируемости типа[3] $(\varphi\text{-}C^\alpha, C^\beta)$ (или $(\varphi\text{-}C^\alpha{}_O, B)$, если при любом $\varphi$-$C^\alpha$-суммируемом (или $\varphi$-$C^\alpha$-ограниченном) ряде (1) ряд

[1] Если пределы изменения индексов у знака $\Sigma$ не указаны, то индекс суммирования имеет значения 0, 1, 2, ... .

[2] Здесь и всюду в дальнейшем считаем $\frac{0}{0} = 1$.

[3] Если $\varphi_n = 1$, то вместо $\varphi$-$C^\alpha$-суммируемости и $\varphi$-$|C^\alpha|$-суммируемости будем писать соответственно $C^\alpha$-суммируемость или $|C^\alpha|$-суммируемость.

$$\sum \varepsilon_n u_n$$

является $B$-суммируемым, где $B = C^\beta, |C^\beta|$.

Множители суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^\alpha|, B)$ и др. определяются аналогично[4].

Чжоу [12], а затем Чжоу и Бозанкет [11] рассматривали случай $(\varphi\text{-}|C^\alpha|, |C^\beta|)$, когда $n^{-1}\varphi_n$ — невозрастающая последовательность положительных чисел и $\alpha, \beta \geqslant 0$. Бозанкет [10] и Андерсен [9] рассматривали случай $(\varphi\text{-}C^\alpha, C^\beta)$, когда последовательность $\varphi_n \sim (n+1)^{-p}$, $p \geqslant 0$. Случай $(\varphi\text{-}|C^\alpha|, C^\beta)$ и $(\varphi\text{-}|C^\alpha|, |C^\beta|)$, где $\alpha \geqslant 0$ и $\beta > -1$, и случай $(\varphi\text{-}C^{\alpha+1}, |C^\beta|$ и $(\varphi\text{-}C_0^{\alpha+1}, |C^\beta|)$, где $\alpha \geqslant -1$ и $\beta > -1$, рассматривали Барон, Паллум и Петерсон в [2].

Как показал Волков (см. [4]), если $\operatorname{Re}\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha_2$ и $\operatorname{Im}\alpha_1 \neq \operatorname{Im}\alpha_2$, то методы $C^{\alpha_1}$ и $C^{\alpha_2}$ несравнимы. Барон (см. [3], стр. 179) показал, что в этом случае также методы $|C^{\alpha_1}|$ и $|C^{\alpha_2}|$ несравнимы. Поэтому представляет интерес исследовать множители суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка.

Волков рассматривал уже случай, когда $\alpha$ — вещественное число и $\beta$ — мнимое. В работе [5] он нашел множители суммируемости типа $(\varphi\text{-}C^\alpha, C^\beta)$, когда $\varphi_n = 1$, $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ и $\beta$ — произвольное комплексное число с $\operatorname{Re}\beta = 1$, а в [6] — то же, когда $\alpha = 0, 1, \ldots$ и $\beta$ — произвольное комплексное число с $\operatorname{Re}\beta = \alpha$.

В настоящей статье внимание обращается, главным образом, на случай, когда $\alpha = 0, 1, \ldots$ и $\beta$ — произвольное комплексное число с $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$.

## § 2. Некоторые леммы

**Лемма 1.** *Из условий*

$$\varepsilon_n = O(1) \tag{A}$$

*и*

$$\sum (n+1)^\alpha \varphi_n^{-1} |\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n| < \infty \tag{B}$$

*при всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha + 1$ *следует*

$$\sum (n+1)^{\sigma-1} \varphi_n^{-1} |\Delta^\sigma \varepsilon_n| \leqslant \sum (n+1)^\alpha \varphi_n^{-1} |\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n|.$$

Доказательство см. [13], стр. 194—195.

**Лемма 2.** а) *Если* $\sigma > -1$, $\alpha > 0$ *и* $\sigma + \alpha > 0$, *то из условия* (A) *следует*

---

[4] Мы не останавливаемся на истории развития теории множителей суммируемости при $\varphi_n = 1$, так как это подробно изложено в статье [1], стр. 47—50.

$$\Delta^{\sigma}(\Delta^{\alpha}\varepsilon_n) = \Delta^{\sigma+\alpha}\varepsilon_n. \tag{4}$$

б) *Если* $\sigma \geqslant -1$, $\alpha \geqslant 0$ *и* $\sigma + \alpha \geqslant 0$, *то из условия*

$$\varepsilon_n = o(1)$$

*следует* (4).

Доказательство см. [8], стр. 20.

**Лемма 3.** *Из условий* (A) *и* (B), *где* $\alpha \geqslant 0$, *при всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *следует* [5]

$$\Delta^{\sigma}\varepsilon_n = o(\varphi_n n^{-\sigma}).$$

Доказательство. Положив $\sigma = 1$ в лемме 1 и учитывая, что $\{\varphi_n\}$ — монотонно убывающая последовательность, получаем сходимость ряда

$$\sum \Delta\varepsilon_n. \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$\varepsilon_n = \varepsilon + \delta_n \text{ с } \delta_n = o(1). \tag{6}$$

В силу (6), при $\sigma > 0$, имеем

$$\Delta^{\sigma}\varepsilon_n = \Delta^{\sigma}\delta_n = o(1). \tag{7}$$

По леммам 1 и 2б из соотношения (7) вытекает

$$|A^{\sigma}{}_n\varphi_n{}^{-1}\Delta^{\sigma}\varepsilon_n| = A^{\sigma}{}_n\varphi_n{}^{-1}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta^{\sigma+1}\delta_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}A^{\sigma}{}_k\varphi_k{}^{-1}|\Delta^{\sigma+1}\varepsilon_k| = o(1)$$

при $n \to \infty$.

**Лемма 4.** *Из условий*

$$\varepsilon_n = O(\varphi_n) \tag{A'}$$

*и*

$$\Delta^{\alpha}\varepsilon_n = O(\varphi_n n^{-\alpha}) \tag{I}$$

*при всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *вытекает*

$$\Delta^{\sigma}\varepsilon_n = O(\varphi_n n^{-\sigma}).$$

Доказательство см. [12], стр. 465.

## § 3. Множители суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, C^{\beta})$ и $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|)$

**Теорема 1.** *Если* $\alpha \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\beta > -1$ *с* $\mathrm{Re}\beta \neq 0, 1, \ldots$ *или* $\beta > -1$ *вещественное, то для того, чтобы числа* $\varepsilon_n$ *были множителями суммируемости типа* $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, C^{\beta})$ *или* $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (A'), (I) *и*

$$\varepsilon_n = O(\varphi_n n^{\mathrm{Re}\beta - \alpha}). \tag{D}$$

Доказательство. Аналогично тому, как в [12], стр. 465 или в [2], стр. 279, можно доказать, что

*Числа* $\varepsilon_n$ *являются множителями суммируемости типа*

[5] При $\varphi_n = 1$ см. [8], стр. 34.

$(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{a}_{nk}| = O(1), \tag{8}$$

*где*

$$nA^{\beta}{}_{n}\bar{a}_{nk} = kA^{\alpha}{}_{k}\varphi_{k}^{-1} \sum_{s=k}^{n} A_{s-k}^{-\alpha-1} A_{n-s}^{\beta-1} \varepsilon_{s}.$$

В случае $-1 < \mathrm{Re}\beta < 0$, $\alpha \geqslant 0$ условие (8) выводится непосредственно из условия[6] (D).

Употребляя формулу (1) из [1] вместо условия (8) из условий (A'), (D) и (I) выводим следующее соотношение:

$$Y_{k}{}^{i} = |\Delta^{i}\varepsilon_{k}| \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{A_{n-k-i}^{i+\beta-\alpha-1}}{A^{\beta+1}{}_{n}} \right| = O(\varphi_{k}k^{-\alpha-1}), \; (i = 0, 1, \ldots, \alpha). \tag{9}$$

Достаточность. Для доказательства соотношения (9) рассматриваем сначала случай, когда $0 < \mathrm{Re}\beta < \alpha$. Тогда для всех[7] $i = 0, \ldots, \alpha - b - 1$ из условия (D) вытекает

$$Y_{k}{}^{i} = O(\varphi_{k}k^{\mathrm{Re}\beta-\alpha}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-k-i+1)^{i+\mathrm{Re}\beta-\alpha-1}}{(n+1)^{\mathrm{Re}\beta+1}} = O(\varphi_{k}k^{-\alpha-1}).$$

Для всех $i = \alpha - b, \ldots, \alpha$ при $\mathrm{Re}\beta \neq b$ по формуле (7) из [1] и по лемме 4 из условий (A) и (I) следует

$$Y_{k}{}^{i} = O(\varphi_{k}k^{-i}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^{i+\mathrm{Re}\beta-\alpha-1}}{A_{n}^{\mathrm{Re}\beta+1}} = O(\varphi_{k}k^{-\alpha-1}). \tag{10}$$

Пусть $\mathrm{Re}\beta > \alpha$. Тогда для всех $i = 0, 1, \ldots, \alpha$ по лемме 4 из условий (A') и (I) аналогично, как при соотношении (10), следует выполнение соотношения (9).

Необходимость. Аналогично тому, как в [14], стр. 29 или в [2], стр. 279, можно доказать, что

*Числа $\varepsilon_n$ являются множителями суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, C^{\beta})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$kA^{\alpha}{}_{k} \sum_{s=k}^{\infty} A_{s-k}^{-\alpha-1} \frac{A_{n-s}^{\beta}}{A^{\beta}{}_{n}} \frac{\varepsilon_{s}}{s} = O(\varphi_{k}), \; (n \geqslant k). \tag{11}$$

Положив $k = n$ в условии (11), получаем необходимость

---

[6] Если $\alpha$ — мнимое, то условие (D) равносильно условию

$$\varepsilon_{n} = O(\varphi_{n}n^{\mathrm{Re}\beta-\mathrm{Re}\alpha}).$$

[7] Здесь и всюду в дальнейшем $[\mathrm{Re}\,\beta] = b$.

условия [8] (D). Положив $a=0$ в условии (11) и, переходя в нем к переделу при $n\to\infty$ и учитывая включение $\varphi$-$|C^0|\subset\varphi$-$|C^\alpha|$, получаем необходимость условия (A'). Отсюда, так как последовательность $\{\varphi_n\}$ не возрастает, в свою очередь вытекает условие (A). В силу условия (A), аналогично тому, как в [2], получаем необходимость условия (I).

Для произвольных комплексных $\alpha$ и $\beta$ имеет место

**Теорема 1а.** *Для того, чтобы числа $\varepsilon_n$ были множителями суммируемости типа ($\varphi$-$|C^\alpha|$, $C^\beta$) или ($\varphi$-$|C^\alpha|$, $|C^\beta|$), при* $\operatorname{Re}\alpha>0$ *и* $-1<\operatorname{Re}\beta<0$, *необходимо и достаточно выполнение условия* (D).

Доказательство аналогичное случаю, когда $\alpha=0, 1, \ldots$ и $-1<\operatorname{Re}\beta<0$.

При $\alpha=0$, $\varphi_n=1$, $-1<\beta<0$ и $\varepsilon_n=\dfrac{1}{A^{-\beta}_n}$ из теоремы I получаем результат Суноути (см. [16], стр. 122).

## § 4. Множители суммируемости типа ($\varphi$-$C^\alpha$, $C^\beta$)

**Теорема 2.** *Для того, чтобы числа $\varepsilon_n$ были множителями суммируемости типа ($\varphi$-$C^\alpha$, $C^\beta$), в случае* $0\leqslant\operatorname{Re}\beta\leqslant a$ *при* $\operatorname{Re}\beta\neq b$ *или* $\operatorname{Re}\beta=b$ *с* $\operatorname{Im}\beta=0$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (B), (D) *и*

$$C^\beta\text{ — суммируемость ряда } \sum(\bar{\Delta}^{\alpha+1}A^\alpha{}_n\varphi_n{}^{-1})\,\varepsilon_n, \tag{Г}$$

*а при* $\operatorname{Re}\beta=b$ *с* $\operatorname{Im}\beta\neq0$ — *условий* (D), (B), (Г) *и*

$$\sum_{k=s}^{n}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{b}\frac{(k+1)^{\alpha-b}\,|\Delta^{\alpha-b}\varepsilon_k|}{\varphi_k\,(n-k+1)}=O(1), \tag{Δ}$$

*и в случае* $\operatorname{Re}\beta>\alpha$ — *условий* (A'), (B) *и* (Г).

Доказательство. Аналогично тому, как на стр. 54 статьи [1] или на стр. 163 статьи [5], можно доказать, что

*Числа $\varepsilon_n$ являются множителями суммируемости типа* ($\varphi$-$C^\alpha$, $C^\beta$) тогда и только тогда, когда выполнены условия [9]

$$\lim a_{nk}=a_k, \tag{12}$$

$$\lim\sum_{k=0}^{n}a_{nk}=a, \tag{13}$$

$$\sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|=O(1), \tag{14}$$

*где*

[8] Если $\alpha$ — мнимое с $\operatorname{Re}\alpha\geqslant0$, то непосредственно получаем необходимость условий (D).

[9] Под $\lim S_n$ мы понимаем $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

$$A^{\beta}_n\, a_{nk} = A^{\alpha}_k \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{n} A_{s-k}^{-\alpha-2} A^{\beta}_{n-s} \varepsilon_s. \tag{15}$$

При $\alpha > -1$ и $\mathrm{Re}\beta \geqslant 0$ условие (12) выполнено и

$$a_k = A^{\alpha}_k \varphi_k^{-1} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k.$$

Условие[10] (Г) равносильно условию (13).

Достаточность. Остается доказать выполнение условия (14). Матрицу $(a_{nk})$ можем представить аналогично, как в [6], на стр. 273, в виде

$$A^{\beta}_n\, a_{nk} = A^{\alpha}_k \varphi_k^{-1} \sum_{i=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{i} A_{n-k-i}^{i+\beta-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_k. \tag{16}$$

Следовательно, нам остается доказать выполнение условия

$$\mathfrak{X}_n{}^i = \sum_{k=0}^{n} A^{\alpha}_k \varphi_k^{-1} \left| \frac{A_{n+k-i}^{i+\beta-\alpha-1}}{A^{\beta}_n} \right| |\Delta^i \varepsilon_k| = O(1) \tag{17}$$

при $i = 0, 1, \ldots, \alpha+1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $0 \leqslant \mathrm{Re}\beta \leqslant \alpha$. Тогда при $\mathrm{Re}\beta < \alpha$ для всех $i = 0, 1, \ldots, \alpha - b - 1$ из условия (D) непосредственно следует

$$\mathfrak{X}_n{}^i = O(1) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k-i+1)^{\alpha+1-\mathrm{Re}\beta-i}} = O(1). \tag{18}$$

При $\mathrm{Re}\beta = b \leqslant \alpha$ и $\mathrm{Im}\beta \neq 0$ из условия ($\Delta$) вытекает:

$$\mathfrak{X}_n{}^{\alpha-b} = O(1) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^b \frac{(k+1)^{\alpha-b} |\Delta^{\alpha-b} \varepsilon_k|}{\varphi_k (n-k+1)} = O(1).$$

При $\mathrm{Re}\,\beta \neq b$ и $\mathrm{Re}\,\beta \leqslant \alpha$, по лемме 3, из условий (A) и (B) непосредственно получаем

$$\mathfrak{X}_n{}^{\alpha-b} = o\,(n^{-\mathrm{Re}\beta}) \sum_{k=0}^{n-\alpha-b} A^b_k A_{n-k-\alpha+b}^{\mathrm{Re}\beta-b-1} = o(1).$$

Наконец, для всех $i = \alpha - b + 1, \ldots, \alpha + 1$ имеем

$$A^{\alpha}_k \left| \frac{A_{n-k-i}^{i+\beta-\alpha-1}}{A^{\beta}_n} \right| = O(1)\ (k+1)^{i-1},$$

откуда и по лемме 1, из условий (A) и (B), следует выполнение условия (14).

Пусть теперь $\mathrm{Re}\beta > \alpha$. Тогда для $i = 0$, в силу условия (A′), и для всех $i = 1, 2, \ldots, \alpha$, по лемме 3, в силу условий (A) и (B) имеем:

---

[10] Если $\varphi_n = 1$ или $\varphi_n = \dfrac{A^{\alpha}_n}{A^{\alpha+p}_n} \sim (n+1)^{-p}$, $p \geqslant 0$, то условие (Г) выполнено. Если $\varepsilon_n$ множители сходимости, то условие (Г) автоматически выполняется для любых невозрастающих последовательностей $\{\varphi_n\}$.

$$\mathfrak{X}_n^i = o(n^{-\mathrm{Re}\beta}) \sum_{k=0}^{n} A^{\alpha-i}{}_k A_{n-k}^{i+\mathrm{Re}\beta-\alpha-1} = o(1). \tag{19}$$

Если же $i = \alpha + 1$, то условие (17) равносильно условию (B).

Необходимость условия (D) вытекает из условия (14), если положить в нем $k = n$. В силу включения $\varphi\text{-}|C^\alpha| \subset \varphi\text{-}C^\alpha$, из теоремы 1 вытекает необходимость условия (A′) при произвольных $\alpha$ и $\beta$. Учитывая, что последовательность $\{\varphi_n\}$ не возрастает, получаем условие (A). Из условий (12) и (14), в силу необходимости условия (A), следует необходимость условия (B).

Из равенства (16) имеем:

$$\binom{\alpha+1}{\alpha-b} A^\alpha{}_k \varphi_k^{-1} \frac{A_{n-k-\alpha-b}^{\beta-b-1}}{A^\beta{}_n} \Delta^{\alpha-b}\varepsilon_k =$$

$$= a_{nk} - \sum_{i=0}^{\alpha-b-1} \binom{\alpha+1}{i} A^\alpha{}_k \frac{A_{n-k-i}^{i+\beta-\alpha+1}}{A^\beta{}_n} \Delta^i\varepsilon_k -$$

$$- \sum_{i=\alpha-b+1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{i} A^\alpha{}_k \varphi_k^{-1} \frac{A_{n-k-i}^{i+\beta-\alpha+1}}{A^\beta{}_n} \Delta^i\varepsilon_k. \tag{20}$$

Учитывая условие (14), соотношения (18) и то, что для всех $i = \alpha - b + 1, \ldots, \alpha + 1$ условие (12) выполнено, из условий (A), (B) и (D) вытекает необходимость условия $(\Delta)$.

## § 5. Множители суммируемости типа $(\varphi\text{-}C^\alpha{}_0,\ C^\beta)$

**Теорема 3.** *Для того, чтобы числа* $\varepsilon_n$ *были множителями суммируемости типа* $(\varphi\text{-}C^\alpha{}_0,\ C^\beta)$, *в случае* $0 \leqslant \mathrm{Re}\,\beta \leqslant \alpha$ *с* $\mathrm{Re}\,\beta \neq b$ *или* $\mathrm{Re}\,\beta = b$ *и* $\mathrm{Im}\,\beta = 0$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (B) *и*

$$\varepsilon_n = o(\varphi_n n^{\mathrm{Re}\beta-\alpha}), \tag{H}$$

*а при* $\mathrm{Re}\,\beta = b$ *с* $\mathrm{Im}\,\beta \neq 0$ — (B), (H) *и*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^b \frac{(k+1)^{\alpha-b}|\Delta^{\alpha-b}\varepsilon_k|}{\varphi_k(n-k+1)} = o(1), \tag{П}$$

*в случае же* $\mathrm{Re}\,\beta > \alpha$ *достаточно выполнение*[11] *условий* (B) *и*

$$\varepsilon_n = o(\varphi_n). \tag{H′}$$

Достаточность. Аналогично тому, как в [1], стр. 58, можно доказать, что

*Числа* $\varepsilon_n$ *являются множителями суммируемости типа*

[11] При $\varphi_n = 1$ условия (H′) и (B) необходимы и достаточны.

$(\varphi\text{-}C^{\alpha}{}_{O},\ C^{\beta})$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (12), (14) *и*

$$\lim \sum_{k=0}^{n} |a_{nk} - a_k| = 0. \tag{21}$$

По теореме 2 условие (12) выполнено. В силу условий (А), (В), (Н) и (П), условие (14) также выполнено.

Остается показать выполнение условия (21). Для доказательства теоремы можем представить условие (21) в виде

$$\lim \sum_{k=0}^{n} A^{\alpha}{}_{k}\varphi_{k}^{-1} \left| \frac{A^{i+\beta-\alpha-1}_{n-k-i}}{A^{\beta}{}_{n}} \Delta^{i}\varepsilon_{k} - \Delta^{\alpha+1-i}1 \cdot \Delta^{i}\varepsilon_{k} \right| = 0 \tag{22}$$

при $i = 0, 1, \ldots, \alpha + 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $0 \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant \alpha$. Тогда при $\operatorname{Re}\beta < \alpha$ для всех $i = 0, \ldots, \alpha - b - 1$, из условия (Н) непосредственно следует

$$\lim \mathfrak{X}_{n}{}^{i} = 0. \tag{23}$$

При $\operatorname{Re}\beta = b \leqslant \alpha$, $\operatorname{Im}\beta \neq 0$ из условия (П), аналогично теореме 2, вытекает выполнение соотношения (22). При $\operatorname{Re}\beta \neq b$ и $\operatorname{Re}\beta \leqslant \alpha$ для $i = \alpha - b$ по лемме 3, из условий (А) и (В) непосредственно вытекает выполнение соотношений (22). Наконец, для всех $i = \alpha - b + 1, \ldots, \alpha$ по лемме 3 из условий (А) и (В), при использовании соотношения (19), вытекает выполнение соотношений (22).

Пусть теперь $\operatorname{Re}\beta < \alpha$. Для $i = 0$, в силу условия (Н′), и для всех $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ по лемме 3 из условий (А) и (В) аналогично тому, как при соотношении (19), следует выполнение соотношений (22). В случае $i = \alpha + 1$ из условий (А) и (В) вытекает выполнение соотношений (22).

Н е о б х о д и м о с т ь. В силу включения $\varphi\text{-}C^{\alpha} \subset \varphi\text{-}C^{\alpha}{}_{O}$, из теоремы 2 следует необходимость условий (А) и (В). При $k = n$ в условии (15) и в силу того, что из условий (12) и (14) следует необходимость условия

$$a_k = o(1),$$

непосредственно получаем необходимость условия (Н). Используя соотношения (21), имеем

$$\binom{\alpha+1}{\alpha-b} A^{\alpha}{}_{k}\varphi_{k}^{-1} \left| \frac{A^{\beta-b-1}_{n-k-\alpha+b}}{A^{\beta}{}_{n}} \right| |\Delta^{\alpha-b}\varepsilon_{k}| \leqslant |a_{nk} - a_k| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\alpha-b-1} \binom{\alpha+1}{i} A^{\alpha}{}_{k}\varphi_{k}^{-1} \left| \frac{A^{i+\beta-\alpha-1}_{n-k-i}}{A^{\beta}{}_{n}} \right| |\Delta^{i}\varepsilon_{k}| +$$

$$+ \sum_{i=\alpha-b+1}^{\alpha} \binom{\alpha+1}{i} A^{\alpha}{}_{k}\varphi_{k}^{-1} \left| \frac{A^{\beta-b-1}_{n-k-i}}{A^{\beta}{}_{n}} \right| |\Delta^{i}\varepsilon_{k}| +$$

$$+ A^{\alpha}{}_k \varphi_k^{-1} \left| \frac{A^{\beta}_{n-k-\alpha-1}}{A^{\beta}{}_n} \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k - \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k \right|.$$

Учитывая условия (21), соотношения (23), (19) и то, что при $i = \alpha + 1$ соотношение (22) выполнено, получаем необходимость условий (П).

Для вещественных $\alpha$ и $\beta$ имеют место следующие теоремы, где $\varphi$-$C^{\alpha}{}_o$ означает $\varphi$-$C^{\alpha}$-суммируемость к нулю.

**Теорема 1а.** *Для того, чтобы числа $\varepsilon_n$ были множителями*[12] *суммируемости типа ($\varphi$-$C^{\alpha}{}_o$, $C^{\beta}$), при $\alpha$, $\beta \geqslant 0$, необходимо и достаточно выполнение условий* (A′), (B) *и* (D).

**Теорема 2а.** *Для того, чтобы числа $\varepsilon_n$ были множителями суммируемости типа ($\varphi$-$C^{\alpha}{}_O$, $C^{\beta}$), при $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, необходимо и достаточно выполнение условий* (B) *и* (H), *а в случае $\beta > \alpha$ достаточно выполнение*[13] *условий* (B) *и* (H′).

Эти теоремы доказываются аналогично тому, как при $\varphi_n = 1$ (см. [1], стр. 54—59).

## § 6. Множители суммируемости типа ($\varphi$-$C^{\alpha+1}$, $|C^{\beta}|$) или ($\varphi$-$C^{\alpha+1}{}_O$, $|C^{\beta}|$)

**Теорема 4.** *Для того, чтобы числа $\varepsilon_n$ были множителями суммируемости типа ($\varphi$-$C^{\alpha+1}$, $|C^{\beta}|$) или ($\varphi$-$C^{\alpha+1}{}_O$, $|C^{\beta}|$), при $\alpha \geqslant -1$, $\operatorname{Re}\beta > 0$ с $\operatorname{Re}\beta \neq 1, 2, \ldots$ или $\beta > -1$ вещественное, необходимо и достаточно выполнение условий* (B) *и*

$$\sum (n+1)^{\alpha - \operatorname{Re}\beta} \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| < \infty, \qquad \text{(M)}$$

$$\sum (n+1)^{-1} \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| < \infty. \qquad \text{(M′)}$$

Доказательство. Аналогично тому, как в [14], стр. 60 или [2], стр. 280, можно доказать, что

*Числа $\varepsilon_n$ являются множителями суммируемости типа ($\varphi$-$C^{\alpha+1}$, $|C^{\beta}|$) или ($\varphi$-$C^{\alpha+1}{}_O$, $|C^{\beta}|$) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \bar{a}_{nk} \right| = O(1), \qquad (24)$$

*где $N$ — всевозможные конечные подмножества последовательности неотрицательных целых чисел и*

$$nA^{\beta}{}_n \bar{a}_{nk} = A_k^{\alpha+1} \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{n} A_{s-k}^{-\alpha-2} A_{n-s}^{\beta-1} \varepsilon_s.$$

---

[12] В теореме 2а предполагаем, что последовательность (2) сходится к нулю. Тогда должны быть выполнены только условия (12) и (14).

[13] При $\varphi_n = 1$ условия (H′) и (B) необходимые и достаточные.

Очевидно, соотношение (24) вытекает из того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A^{\alpha+1}{}_k| \varphi_k^{-1} \sum_{n=k}^{\infty} \Big| \sum_{s=k}^{n} A_{n-s}^{-\alpha-2} \frac{A_{n-s}^{\beta-1}}{nA^{\beta}_n} \varepsilon_s \Big| < \infty. \tag{25}$$

Достаточность. Для доказательства теоремы 4, вместо соотношения (25), можно вывести из условий (B), (M) и (M') следующее соотношение:

$$Z_k{}^i = \sum_{k=1}^{\infty} A^{\alpha+1}{}_k \varphi_k{}^{-1} |\Delta^i \varepsilon_k| \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{A_{n-k-i}^{i+\beta-\alpha-2}}{A^{\beta+1}{}_n} \right| < \infty \tag{26}$$

при $i=0, 1, \ldots, \alpha+1$.

Рассмотрим случай, когда $0 < \mathrm{Re}\beta < \alpha+1$. Тогда для всех $i=0, 1, \ldots, \alpha-b$ из условия (M) следует:

$$Z_k{}^i = O(1) \sum A^{\alpha+1}{}_k \varphi_k{}^{-1} |\Delta^i \varepsilon_k| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-k-i+1)^{i+\mathrm{Re}\beta-\alpha-2}}{(n+1)^{\mathrm{Re}\beta+1}} =$$

$$= O(1) \sum (k+1)^{\alpha-\mathrm{Re}\beta} \varphi_k{}^{-1} |\Delta^i \varepsilon_k| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k-i+1)^{\alpha+2-i-\mathrm{Re}\beta}} =$$

$$= O(1) \sum (k+1)^{\alpha-\mathrm{Re}\beta} \varphi_k{}^{-1} \sum_{s=k}^{\infty} \left| A_{s-k}^{-i-1} \right| |\varepsilon_s| =$$

$$= O(1) \sum (s+1)^{\alpha-\mathrm{Re}\beta} \varphi_s{}^{-1} |\varepsilon_s| < \infty.$$

При $\mathrm{Re}\beta \neq b$ для всех $i = \alpha - b + 1, \ldots, \alpha+1$, в силу леммы 1, из условий (A) и (B), применяя формулу (7) из [1], имеем

$$Z_k{}^i = O(1) \sum A^{\alpha+1}{}_k \varphi_k{}^{-1} |\Delta^i \varepsilon_k| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^{i+\mathrm{Re}\beta-\alpha-2}}{A_n^{\mathrm{Re}\beta+1}} = \tag{27}$$

$$= O(1) \sum (k+1)^{i-1} \varphi_k{}^{-1} |\Delta^i \varepsilon_k| < \infty.$$

Пусть $\mathrm{Re}\beta > \alpha+1$. Для $i=0$ из условия (M') и для всех $i=1, 2, \ldots, \alpha+1$, из условий (A) и (B) аналогично тому, как при соотношении (27), следует выполнение соотношения (26).

В случае, когда $\alpha=-1$, из условия (M') при использовании формулу (7) из [1] непосредственно вытекает выполнение соотношения (25).

Необходимость условия (M) непосредственно вытекает из условия (24), положив в нем $n=k$, что допустимо по теореме 1 статьи [15]. Необходимость условий (M') и (B) получаем аналогично, как в [2], стр. 280. Условие (A) вытекает из условий (B) и (M').

Для произвольных комплексных чисел $\alpha$ и $\beta$ имеет место

**Теорема 4a.** *Для того, чтобы числа $\varepsilon_n$ были множителями суммируемости типа $(\varphi\text{-}C^{\alpha+1}, |C^{\beta}|)$ или $(\varphi\text{-}C^{\alpha+1}{}_0, |C^{\beta}|)$ при*

$\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ и $-1 < \mathrm{Re}\,\beta < 0$, *необходимо и достаточно выполнение условия*[14]

$$\sum (n+1)^{\mathrm{Re}(\alpha-\beta)} \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| < \infty. \qquad (\overline{\mathrm{M}})$$

Достаточность. Из условия $(\overline{\mathrm{M}})$ вытекает:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A^{\alpha+1}{}_k| \varphi_k^{-1} \sum_{n=k}^{\infty} \Big| \sum_{s=k}^{n} A_{s-k}^{-\alpha-2} \frac{A_{n-s}^{\beta-1}}{A^{\beta-1}{}_n} \varepsilon_s \Big| =$$

$$= O(1) \sum A^{\mathrm{Re}\alpha+1}{}_k \varphi_k^{-1} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{s=k}^{n} \frac{|\varepsilon_s| (n-s+1)^{\mathrm{Re}\beta-1}}{(n+1)^{\mathrm{Re}\beta+1} (s-k+1)^{\mathrm{Re}\alpha+2}} =$$

$$= O(1) \sum A^{\mathrm{Re}\alpha+1}{}_k \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{\infty} \frac{|\varepsilon_s|}{(s-k+1)^{\mathrm{Re}\alpha+2} (s+1)^{\mathrm{Re}\beta+1}} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{(n-s+1)^{1-\mathrm{Re}\beta}} =$$

$$= O(1) \sum (s+1)^{\mathrm{Re}(\alpha-\beta)} \varphi_s^{-1} |\varepsilon_s| \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{(s-k+1)^{1-\mathrm{Re}\beta}} =$$

$$= O(1) \sum (s+1)^{\mathrm{Re}(\alpha-\beta)} \varphi_s^{-1} |\varepsilon_s| < \infty.$$

Необходимость условия $(\overline{\mathrm{M}})$ получаем, как необходимость условия $(M)$ в теореме 4.

## § 7. О некоторых конкретных множителях суммируемости

**Теорема 5.** *Если*[15] $\varepsilon_n = x^n$, $\varphi_n \sim (n+1)^{-p}$ ($p \geqslant 0$ и $|x| \neq 0, 1$), *то числа* $\varepsilon_n$ *являются множителями суммируемости для всех рассмотренных нами выше типов тогда и только тогда, если выполнено условие*[16]

$$|x| < 1. \qquad (28)$$

Доказательство. Из условия (28) непосредственно следует выполнение условий (A'), (B), (D), (I), (M), (H), (H') и (M'). В случае $\varphi_n \sim (n+1)^{-p}$, $p \geqslant 0$ условие (Г) тоже выполнено. В силу условий (28) имеем

$$(1-x)^{\alpha-b} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{b} \frac{(k+1)^{\alpha-b+p} |x|^k}{(n-n+1)^{b+1-\mathrm{Re}\beta}} =$$

$$= O(1) \sum (k+1)^{\alpha-b+p} |x|^k < \infty. \qquad (29)$$

---

[14] При $\alpha \geqslant -1$ и $-1 < \mathrm{Re}\,\beta < 0$, необходимо и достаточно выполнение условия $(M)$.

[15] Число $x = 0$ всегда множитель суммируемости, а при $x = 1$ получаем тот же самый ряд.

[16] Для множителей суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, C^{\beta})$ и $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|)$ — условие

$$|x| \leqslant 1.$$

Из сходимости ряда (29) следует выполнение условий ($\Delta$) и ($\Pi$). Аналогично доказываются следующие теоремы.

**Теорема 6.** *Если* $\varepsilon_n = x^n$ *и* $\varphi_n = a^n$ $(0 < a \leqslant 1, \ x \neq 0, 1)$, *то числа* $\varepsilon_n$ *являются множителями суммируемости для всех вышеназванных типов*[17] *тогда и только тогда, если выполнено условие*[18]

$$|x| < a.$$

**Теорема 7.** *Если* $\varepsilon_n = (n+1)^{-s}$ *и* $\varphi_n = (n+1)^{-t}$ $(s, t \neq 0)$, *то числа* $\varepsilon_n$ *являются множителями суммируемости типа* $(\varphi\text{-}C^{\alpha}, C^{\beta})$ *тогда и только тогда, если выполнены условия* $\operatorname{Re} s - t \geqslant a - b$ *и* $\operatorname{Re} s - t > 1$; *типа* $(\varphi\text{-}C^{\alpha}{}_{0}, C^{\beta})$ *— если* $\operatorname{Re} s - t > a - b$ *и* $\operatorname{Re} s - t > 1$; *типов* $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, C^{\beta})$ *и* $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|)$ *— если* $\operatorname{Re} s - t \geqslant 0$ *и* $\operatorname{Re} s - t \geqslant a - b$ *и типов* $(\varphi\text{-}C^{\alpha+1}, |C^{\beta}|)$ *и* $(\varphi\text{-}C_0{}^{\alpha+1}, |C^{\beta}|)$ *— если* $\operatorname{Re} s - t > 0$ *и* $\operatorname{Re} s - t > a + 1 - b$.

В заключение отметим, что все приведенные в настоящей статье теоремы легко обобщаются на двойные ряды.

## Литература


1. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, **9**, 47—68.
2. Барон С., Паллум С., Петерсон М., О двух теоремах Чжоу и их обобщении на двойные ряды. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1962, **11**, 277—287.
3. Барон С., О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 165—181.
4. Волков И. И., К вопросу суммирования расходящихся рядов методом ($C$, $a$). Тр. Московск. ин-та мех. и электр. сельск. х-ва, 1959, **4**, № 1, 137—146.
5. Волков И. И., О множителях суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка. Успехи матем. наук, 1962, **17**, № 1, 161—168.
6. Волков И. И., О множителях суммируемости для методов Чезаро. Докл. Моск. с.-х. акад., 1963, **81**, 269—275.
7. Жак И. Е., Тиман М. Ф., О суммировании двойных рядов. Матем. сб., 1954, **35** (77), 21—56.
8. Andersen, A. F., Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode. Kopenhagen, 1921.
9. Andersen, A. F., On the extensions within the theory of Cesàro summability of a classical convergence theorem of Dedekind. Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, 1—52.
10. Bosanquet, L. S., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1945, **20**, 39—48.
11. Bosanquet, L. S., Chow, H. C., Some remarks on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 73—82.


---

[17] Предполагается, что множители суммируемости типа $(\varphi\text{-}C^{\alpha}, C^{\beta})$ рассматриваются при $a = 0$, $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$ при $\varphi_n = a^n$ или $a$, $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$ при $\varphi_n = 1$.

[18] Для множителей суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, C^{\beta})$ и $\varphi\text{-}|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|)$, при $a = 0$ выполнено условие $|x| \leqslant a$.

12. Chow, H. C., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 459—476.
13. Dikshit, G. D., On the absolute summability factors of infinite series. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1959, **A 25**, 191—200.
14. Hahn, H., Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. Math. und Phys., 1922, **32**, 3—88.
15. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 33—36.
16. Sunouchi, G., On the absolute summability of Fourier series. J. Math. Soc. Japan, (2), 1949,. **1**, 122—129.

Поступило
20 II 1965

## KOMPLEKSSET JÄRKU SUMMEERUVUSTEGURID CESÀRO MENETLUSE KORRAL

**M. Abel**

Resümee

Olgu $\{\varphi_n\}$ mittekasvav positiivsete arvude jada, $\alpha$ mistahes täisarv ja $\beta$ mistahes kompleksarv.

Rida (1) nimetatakse $\varphi$-$C^{\alpha}$-summeeruvaks (ehk $\varphi$-$C^{\alpha}$-tõkestatuks), kui jada (2) koondub (on tõkestatud) ning $\varphi$-$|C^{\alpha}|$-summeeruvaks, kui rida (3) absoluutselt koondub.

Kompleksarve $\varepsilon_n$ nimetatakse ($\varphi$-$C^{\alpha}$, $B$) tüüpi (ehk ($\varphi$-$C^{\alpha}_{O}$, $B$) tüüpi) summeeruvusteguriteks, kui suvalise $\varphi$-$C^{\alpha}$-summeeruva (vastavalt $\varphi$-$C^{\alpha}$-tõkestatud) rea (1) korral, rida

$$\Sigma\, \varepsilon_n u_n$$

on $B$-summeeruv, kus $B = C^{\beta}$, $|C^{\beta}|$.

Analoogiliselt defineeritakse ($\varphi$-$|C^{\alpha}|$, $B$) tüüpi summeeruvustegurid.

Töös [6] vaatles Volkov ($\varphi$-$C^{\alpha}$, $C^{\beta}$) tüüpi reaalseid summeeruvustegureid, kus $\varphi_n = 1$, $\alpha = 0, 1, \ldots$ ja $\mathrm{Re}\beta = \alpha$.

Käesolevas artiklis (teoreem 2) üldistatakse Volkovi teoreem juhule, kui $\alpha = 0, 1, \ldots$, $\mathrm{Re}\beta \geqslant 0$. Samuti vaadeldakse järgmisi summeeruvustegurite tüüpe: ($\varphi$-$C^{\alpha}_{O}$, $C^{\beta}$), kui $\alpha$, $\mathrm{Re}\beta \geqslant 0$ (teoreem 3); ($\varphi$-$|C^{\alpha}|$, $|C^{\beta}|$) ja ($\varphi$-$|C^{\alpha}|$, $|C^{\beta}|$), kui $\alpha \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\beta > -1$, $\mathrm{Re}\beta \neq 0, 1, 2, \ldots$ (teoreem 1) ja mistahes $\mathrm{Re}\alpha \geqslant 0$, $-1 < \mathrm{Re}\beta < 0$ korral (teoreem 1a) ning ($\varphi$-$C^{\alpha+1}_{O}$, $|C^{\beta}|$) ja ($\varphi$-$C^{\alpha+1}$, $|C^{\beta}|$), kui $\alpha \geqslant -1$, $\mathrm{Re}\beta > 0$, $\mathrm{Re}\beta \neq 1, 2, 3, \ldots$ (teoreem 4) ja mistahes $\mathrm{Re}\alpha > -1$, $-1 < \mathrm{Re}\beta < 0$ korral (teoreem 4a).

Eraldi vaadeldakse ($\varphi$-$C^{\alpha}$, $C^{\beta}$) tüüpi summeeruvustegureid mistahes reaalarvude $\alpha$, $\beta \geqslant 0$ korral (teoreem 2a) ja ($\varphi$-$C^{\alpha}_{O}$, $C^{\beta}$) mistahes reaalarvude $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ korral (teoreem 3a).

Teoreemides 5—7 vaadeldakse näiteid kõigi nimetatud tüüpi summeeruvustegurite kohta.

# COMPLEX ORDER SUMMABILITY FACTORS FOR CESARO'S SUMMATION METHOD

**M. Abel**

Summary

Let $\{\varphi_n\}$ be the non-increasing sequence of positive numbers, $\alpha$ — any integer and $\beta$ — any complex number.

The series (1) is said to be $\varphi$-$C^\alpha$-summable (or to be $\varphi$-$C^\alpha$-bounded), if the sequence (2) is convergent accordingly is bounded) and $\varphi$-$|C^\alpha|$-summable, if series (3) is absolutely convergent.

The complex numbers $\varepsilon_n$ are said to be the summability factors of $(\varphi\text{-}C^\alpha, B)$ type (or the summability factors of $(\varphi\text{-}C^\alpha_O, B)$ type), if for any $\varphi$-$C^\alpha$-summable (accordingly, for any $\varphi$-$C^\alpha$-bounded) series (1), series

$$\Sigma\, \varepsilon_n u_n$$

is $B$-summable, where $B = C^\beta$, $|C^\beta|$.

The summability factors of $(\varphi\text{-}|C^\alpha|, B)$ types, are defined analogically.

In paper [6] Volkov considered the real summability factors of $(\varphi\text{-}C^\alpha, C^\beta)$ type, when $\varphi_n = 1$, $\alpha = 0, 1, \ldots$ and $\operatorname{Re}\beta = \alpha$.

In the present paper (theorem 2) Volkov's theorem is generalized to the case, if $\alpha = 0, 1, \ldots$, $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$. In this paper the following types of summability factors are also considered: $(\varphi\text{-}C^\alpha, C^\beta)$ — if $\alpha, \operatorname{Re}\beta \geqslant 0$ (theorem 3); $(\varphi\text{-}|C^\alpha|, C^\beta)$ and $(\varphi\text{-}|C^\alpha|, |C^\beta|)$ — if $\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\beta > -1$, $\operatorname{Re}\beta \neq 0, 1, 2, \ldots$ (theorem 1) and for any $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, $-1 < \operatorname{Re}\beta < 0$ (theorem 1a); $(\varphi\text{-}C^{\alpha+1}, |C^\beta|)$ and $(\varphi\text{-}C^{\alpha+1}, |C^\beta|)$ — if $\alpha \geqslant -1$, $\operatorname{Re}\beta > -1$, $\operatorname{Re}\beta \neq 0, 1, 2, \ldots$ (theorem 4) and for any $\operatorname{Re}\alpha > -1$, $-1 < \operatorname{Re}\beta < \alpha$ (theorem 4a).

The summability factors of $(\varphi\text{-}C^a, C^\beta)$ type, for any real number $\alpha, \beta \geqslant 0$ (theorem 2a) and the summability factors of $(\varphi\text{-}C^\alpha, C^\beta)$ type for any real number $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ (theorem 3a) are considered separately.

The examples for every above-mentioned type of summability factors are considered in theorems 5—7.

# О ЛОКАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

**С. Барон**

Кафедра математического анализа

Пусть $f(t)$ — вещественная $2\pi$-периодическая функция, интегрируемая по Лебегу. Пусть[1]

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=\sum A_n(t) \tag{1}$$

является рядом Фурье функции $f(t)$.

Как известно (см., например, [11], стр. 67 и 94), сходимость ряда (1) в точке $t=x$ и его суммируемость любым регулярным треугольным методом зависят только от поведения функции $f(t)$ в окрестности точки $t=x$, т. е. сходимость и суммируемость ряда Фурье (1) является локальным свойством функции $f(t)$. Однако уже абсолютная сходимость ряда (1), как это следует из теоремы Лузина—Данжуа ([1], стр. 173), не является локальным свойством. Многие математики изучали вопрос о том, является ли локальным свойством функции $f(t)$ абсолютная суммируемость ряда Фурье (1) или более общего ряда

$$\sum A_n(t)\lambda_n \tag{2}$$

тем или иным матричным методом. Так, Бозанкет ([13], стр. 519) показал, что $|C,\alpha|$-суммируемость ряда (1) при $\alpha>1$ является локальным свойством функции $f(t)$, а Бозанкет и Кестельман [14] доказали, что $|C,1|$-суммируемость ряда Фурье не является локальным свойством. То же самое доказали Идзуми [16] и Моханти [22] для метода логарифмических средних. При некоторых конкретных $\lambda_n$ Бхатт [12] исследовал, является ли локальным свойством абсолютная суммируемость ряда (2) методом логарифмических средних, Моханти [22] и Мацумото [20] — некоторыми методами взвешенных средних Рисса, а Лал [19] — методом гармонических средних.

В настоящей статье при помощи теорем о множителях суммируемости находим условия, когда абсолютная суммируемость

[1] Если пределы суммирования у знака суммы не обозначены, то суммирование происходит по возможному индексу от 0 до $\infty$.

ряда (2) заданным матричным методом $A=(a_{nk})$, удовлетворяющим некоторым условиям, является или не является локальным свойством (впрочем, можем включить $\lambda_n$ в матрицу $A$, тогда получаемые теоремы будут относиться к абсолютной суммируемости ряда (1) методом $(a_{nk}\lambda_k)$). Попутно дадим и некоторые новые теоремы о множителях абсолютной суммируемости числовых рядов и последовательностей.

## § 1. Множители абсолютной суммируемости для рядов

Обозначим через $P=(R, p_n)$ метод взвешенных средних Рисса, через $\bar{A}=(\bar{a}_{nk})$ — любой треугольный метод суммирования в виде преобразования ряда в ряд, а через $A=(a_{nk})$ — тот же метод в виде преобразования ряда в последовательность. Тогда $\bar{a}_{nk}=a_{nk}-a_{n-1,k}$ при $n>k$ и $\bar{a}_{kk}=a_{kk}$.

Здесь найдем необходимые и достаточные условия для комплексных чисел $\varepsilon_n$, чтобы из $P$-суммируемости (или $P$-ограниченности) ряда

$$\sum u_n \tag{3}$$

всегда следовала $|A|$-суммируемость ряда

$$\sum \varepsilon_n u_n. \tag{4}$$

Эта задача сводится к нахождению необходимых и достаточных условий для того, чтобы из сходимости (или ограниченности) последовательности (см. [5], стр. 193)

$$U'_n=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{P_{k-1}}{P_n}\right)u_k, \tag{5}$$

где комплексные числа $P_n\neq 0$, $P_{-1}=0$, всегда следовала абсолютная сходимость ряда

$$\sum u''_n$$

с

$$u''_n=\sum_{\nu=0}^{n}\bar{a}_{n\nu}\varepsilon_\nu u_\nu. \tag{6}$$

Предполагая (здесь и всюду в дальнейшем), что метод $P$ нормален, т. е. что $p_k=P_k-P_{k-1}\neq 0$, при помощи обратной матрицы метода $P$ (см. [5], стр. 217) из (5) и (6) получаем

$$u''_n=\sum_{k=0}^{n}c_{nk}U'_k, \tag{7}$$

где [2]

$$c_{nk}=P_k\Delta\frac{\Delta(\bar{a}_{nk}\varepsilon_k)}{p_k}.$$

---

[2] Всюду обозначаем $\Delta s_{nk}=s_{nk}-s_{n,k+1}$.

Тем самым решение задачи сводится к исследованию матричного преобразования (7) последовательности в ряд. Преобразование (7) должно удовлетворять известным условиям Пейеримхоффа ([23], теорема 6; [24], условие (4)) для преобразования $c \to l$ (совпадающим с условиями для $m \to l$), которые в нашем случае непосредственно дают следующий результат.

**Лемма 1.** *Для того, чтобы из P-суммируемости (или P-ограниченности) ряда* (3) *всегда следовала* $|A|$*-суммируемость ряда* (4), *необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности* $d_n = O(1)$ *было*

$$\sum_k \left| \sum_{n=k}^{\infty} c_{nk} d_n \right| < \infty. \tag{8}$$

*Кроме того, необходимо выполнение условия*

$$\sum |c_{kk}| < \infty. \tag{9}$$

Условие (8) леммы 1 неэффективно в том смысле, что его практически трудно проверять. Поэтому, накладывая ограничения на методы $P$ и $A$, при помощи леммы 1 найдем другие, более эффективные условия для рассматриваемых множителей суммируемости.

**Теорема 1.** *Пусть метод P удовлетворяет условиям* [3]

$$P_k = O(P_{k+1}), \tag{10}$$

$$\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}} = O\left(\frac{p_k}{P_k}\right), \tag{11}$$

*а метод A нормален и удовлетворяет условиям*

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{a}_{nk}| = O(1), \tag{12}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \bar{a}_{nk} = 1, \tag{13}$$

$$a_{k+1,\,k+1} = O(a_{kk}), \tag{14}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\Delta \bar{a}_{nk}| = O(a_{kk}). \tag{15}$$

*Для того, чтобы из P-суммируемости (или P-ограниченности) ряда* (3) *всегда следовала* $|A|$*-суммируемость ряда* (4), *необходимо и достаточно выполнение условий*

---

[3] Условие (10) выполнено, например, когда $p_k > 0$ или вообще, если $P$ сохраняет сходимость или абсолютную сходимость ([5]; леммы I и II). Условие (11) необходимо и достаточно, чтобы сохраняющий абсолютную сходимость регулярный метод $P$ был транслятивен слева ([4], стр. 181). Метод $A$ называется нормальным, если $a_{nn} \neq 0$ и $a_{nk} = 0$ для $k > n$. Выполнение условий (12) и (13) необходимо и достаточно для того, чтобы метод $A$ сохранял соответственно абсолютную сходимость и сумму каждого абсолютно сходящегося ряда ([18], теорема 1). Условие (14) выполнено, если $A$ абсолютно транслятивен слева ([4], стр. 180, условие $\delta_{k+1,\,k} = O(1)$).

$$\sum \left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty, \tag{16}$$

$$\sum \left| P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} a_{kk} \right| < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Необходимость условия (16) получим, применяя (13), из условия (8) леммы 1 при $d_n = 1$. Условие (17) является условием (9) леммы 1.

Достаточность. Покажем, что из условий теоремы 1 следует условие

$$\sum_k \sum_{n=k}^{\infty} |c_{nk}| < \infty,$$

обеспечивающее выполнение условия (8) леммы 1. Для этого воспользуемся тождеством (см. [5], формула (59))

$$c_{nk} = P_k \left[ \Delta \left( \bar{a}_{n,\,k+1} \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right) + \Delta \left( \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta \bar{a}_{nk} \right) \right],$$

откуда

$$c_{nk} = P_k \left[ \bar{a}_{n,\,k+2} \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} + \Delta \left( \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta \bar{a}_{nk} \right) + \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \Delta \bar{a}_{n,\,k+1} \right].$$

Теперь, из (16) и (12) вытекает

$$\sum_k \left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| \sum_{n=k}^{\infty} |\bar{a}_{n,\,k+2}| < \infty;$$

из (15), (10) и (17) выводим

$$\sum_k |P_k| \sum_{n=k}^{\infty} \left| \Delta \left( \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta \bar{a}_{nk} \right) \right| = O(1) \sum (|g_k| + |g_{k+1}|) < \infty,$$

где

$$g_k = P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} a_{kk};$$

наконец, из (15), (14), (11) и (17) заключаем

$$\sum_k \left| P_k \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta \bar{a}_{n,\,k+1}| = O(1) \sum (|g_k| + |g_{k+1}|) < \infty.$$

Учитывая, что метод $(R, 2^n)$ равносилен обыкновенной сходимости (см. [10], теорема 15), из теоремы 1 при $p_n = 2^n$ получаем

**Следствие 1.** *Пусть метод $A$ удовлетворяет условиям* (12), (14) *и* (15). *Для того, чтобы из сходимости (или ограниченности) ряда* (3) *всегда следовала $|A|$-суммируемость ряда* (4), *достаточно (а, если имеет место условие* (13), *и необходимо) выполнение условий*

$$\sum |\Delta \varepsilon_n| < \infty, \tag{18}$$

$$\sum |\varepsilon_n a_{nn}| < \infty. \tag{19}$$

Если $A = \left(R, \frac{1}{n+1}\right)$ (метод логарифмических средних), то из следствия 1 при $\varepsilon_n = \mu_n \ln(n+1)$, где $\mu_n$ — выпуклая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sum (n+1)^{-1}\mu_n < \infty, \tag{20}$$

вытекает основная теорема статьи Бхатт ([12], стр. 70—73).

Условию (15) теоремы 1 удовлетворяет метод $Q = (R, q_n)$, сохраняющий абсолютную сходимость ([7], стр. 166 и 161). Условиям теоремы 1 удовлетворяет и метод гармонических средних $\left(WN, \frac{1}{n+1}\right)$, ибо $a_{nk} > 0$ и, обозначив $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}$, для него при $n \geqslant k+1$ получаем $\Delta\bar{a}_{nk} = \frac{1}{(n+1-k)H_n} - \frac{1}{(n-k)H_{n-1}} < 0$. Но, например, метод Чезаро $(C, \alpha)$ удовлетворяет условию (15) лишь при $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1$ и при $\alpha = 0$ (см. [7], стр. 167). Поэтому в следующих параграфах приведем и другие теоремы о множителях абсолютной суммируемости.

## § 2. Множители абсолютной суммируемости для последовательностей

Найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы из $P$-суммируемости (или $P$-ограниченности) последовательности

$$\{nu_n\} \tag{21}$$

с $u_0 = 0$ всегда следовала $|A|$-суммируемость ряда (4).

Ответ на этот вопрос получим из теоремы 11а статьи [9], если в ней $U_k$ заменить на $ku_k$ и $\varepsilon_k$ на $\frac{\varepsilon_k}{k}$. Следовательно, имеет место

**Теорема 2.** *Пусть*[3] *метод $P$ сохраняет сходимость, а метод $A$ удовлетворяет условиям* (12) *и* (13), *причем*

$$|A| \supset |P|.$$

*Для того, чтобы из $P$-суммируемости (или $P$-ограниченности) последовательности* (21) *всегда следовала $|A|$-суммируемость ряда* (4), *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{kp_k} \right| < \infty, \tag{22}$$

$$\sum \frac{|\varepsilon_k|}{k+1} < \infty. \tag{23}$$

Так как следствие 1 неприменимо, например, для метода $(C, \alpha)$ при $\operatorname{Re}\alpha > 1$, то будем применять

**Следствие 2.** *Если*

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k = O(n),$$

*и имеет место включение*

$$|A| \supset |C,\ 1|, \tag{24}$$

*то для* $|A|$*-суммируемости ряда* (4) *достаточно (а если имеет место условие* (13), *и необходимо) выполнение условий* (18) *и* (23).

Доказательство следует из теоремы 2, положив в ней $P = (C,\ 1)$, так как из условия (24) вытекает (12), а тождество

$$k\,\Delta\frac{\varepsilon_k}{k} = \Delta\varepsilon_k + \frac{\varepsilon_{k+1}}{k+1}$$

показывает равносильность условий (23) и (18) условиям (23) и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta\frac{\varepsilon_k}{k}\right| < \infty$$

(последнее является условием (22) при $p_k = 1$).

Замечание. Аналогично из теоремы 11б статьи [9] можем вывести основную теорему статьи Лал ([19], теорема 2).

Отметим, что условия (18) и (23) не вытекают одно из другого, о чем свидетельствуют примеры с

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\ln(n+2)} \text{ и } \varepsilon_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & \text{при } n = 2k, \\ 0 & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$$

## § 3. Множители абсолютной сходимости для рядов

Для получения условий, когда абсолютная суммируемость ряда (2) не является локальным свойством, главную роль играет следующая теорема Кангро ([6], теорема 3), где

$$(\eta_{nk}) = (a_{nk})^{-1}, \quad \eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}, \quad D_n = \sup_k |a_{k+n,\,k+n}\,\eta_{k+n,\,k}|.$$

**Теорема 3.** *Пусть метод A удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nD_n < \infty. \tag{25}$$

*Для того, чтобы из* $|A|$*-суммируемости ряда* (3) *всегда следовала абсолютная сходимость ряда* (4), *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum |\eta_n\varepsilon_n| < \infty,$$
$$\varepsilon_n = O(a_{nn}).$$

Условию (25) удовлетворяет ряд классических методов суммирования. Однако, как сейчас покажем, метод $\left(WN, \frac{1}{n+1}\right)$ не удовлетворяет условию (25). Действительно, так как здесь $\eta_{nk} = H_k d_{n-k}$, где (ср. [21], стр. 176)

$$\sum d_n x^n = \frac{1}{\Sigma H_n x^n} = \frac{1}{\Sigma x^n \cdot \Sigma \frac{1}{n+1} x^n} = -\frac{x(1-x)}{\ln(1-x)} =$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{z+1} dz = \int_0^1 \sum A_n^{-z-2} x^n dz,$$

то

$$d_n = \int_0^1 A_n^{-z-2} dz, \qquad \eta_{nk} = H_k \int_0^1 A_{n-k}^{-z-2} dz, \qquad D_n = |d_n|,$$

откуда по доказанному в статье Я. Габовича [3], $\sum nD_n = +\infty$.

Поэтому нужна

**Теорема 4.** *Для того, чтобы из* $\left|WN, \frac{1}{n+1}\right|$*-суммируемости ряда* (3) *всегда следовала абсолютная сходимость ряда* (4), *достаточно выполнение условия*

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\omega_n \ln n}\right), \tag{26}$$

*где* $\omega_n$ *всегда монотонно возрастает и*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_n}\, n \ln n} < \infty.$$

Доказательство. Пусть $A = \left(WN, \frac{1}{n+1}\right)$. Обозначив

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_{nk} u_k,$$

получим

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} \eta_{ni}\right) u'_k.$$

Отсюда видно, что условие (ср. [18], стр. 11)

$$x_k = \sum_{n=k}^{\infty} \left|\varepsilon_n \sum_{i=k}^{n} \eta_{ni}\right| = \sum_{n=k}^{\infty} \left|\varepsilon_n \sum_{i=k}^{n} H_i d_{n-i}\right| = O(1)$$

обеспечивает абсолютную сходимость ряда (4) для любого $\left|WN, \frac{1}{n+1}\right|$-суммируемого ряда (3). Однако, поскольку

$$\sum_{i=k}^{n} H_i A_{n-i}^{-z-2} = H_k A_{n-k}^{-z-1} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s+1} A_{n-s}^{-z-1}$$

и $H_n \sim \ln(n+1)$, то из условия (26) выводим

$$x_k = O(H_k) \sum_{n=k}^{\infty} |\varepsilon_n| \int_0^1 (n+1-k)^{-z-1} dz +$$

$$+ O(1) \sum_{n=k}^{\infty} |\varepsilon_n| \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s+1} \frac{1}{(n+1-s)\ln(n+1-s)} =$$

$$= O(1) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\omega_n (n+1-k)\ln(n+2-k)} +$$

$$+ O(1) \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{s+1} \sum_n |\varepsilon_{n+s}| \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)} =$$

$$= O(1) \sum_n \frac{1}{\omega_{n+k}(n+1)\ln(n+2)} +$$

$$+ O(1) \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_s}(s+1)\ln(s+2)} \sum_n \frac{1}{\sqrt{\omega_n}(n+1)\ln(n+2)} = O(1).$$

## § 4. Основные теоремы

Будем говорить, что $|A|$-суммируемость ряда (2) *является локальным свойством функции* $f(t)$, если $|A|$-суммируемость ряда (2) в точке $t=x$ зависит лишь от поведения функции $f(t)$ в произвольно малой окрестности точки $t=x$.

**Теорема 5.** *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условиям* (12), (14) *и* (15). *Если выполнены условия*

$$\sum |\Delta\lambda_n| < \infty, \tag{27}$$

$$\sum |\lambda_n a_{nn}| < \infty, \tag{28}$$

*то* $|A|$*-суммируемость ряда* (2) *является локальным свойством.*

Доказательство. Как известно (см., например, [1], стр. 110), частичные суммы $S_n(t)$ ряда (1) в точке $t=x$ выражаются формулой

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) \frac{\sin nt}{t} dt + s_n,$$

где $\delta > 0$ произвольно, а $s_n = s_n(x)$ равномерно стремится к нулю. Далее, $|A|$-суммируемость ряда (2) в точке $t=x$ означает абсолютную сходимость ряда

$$\sum \gamma_n(x) \tag{29}$$

с

$$\gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{nk} \lambda_k A_k(x).$$

При помощи преобразования Абеля получаем

$$\gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta(\overline{a}_{nk}\lambda_k) \cdot S_k(x) = \alpha_n(x) + \beta_n(x),$$

где

$$\alpha_n(x)=\int_{-\delta}^{\delta} f(t+x)\,K_n(t)\,dt, \tag{30}$$

$$\beta_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\Delta(\overline{a}_{nk}\lambda_k)\cdot s_k(x),$$

$$K_n(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\Delta(\overline{a}_{nk}\lambda_k)\cdot\frac{\sin kt}{t}.$$

Обозначая $s_n-s_{n-1}=u_n$, $s_{-1}=0$, находим, что

$$\beta_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\lambda_k u_k,$$

и на основании следствия 1 при выполнении условий (18) и (19) с $\varepsilon_n=\lambda_n$, т. е. условий (27) и (28), будет $\sum|\beta_n(x)|<\infty$. Следовательно, вопрос об абсолютной сходимости ряда (29) сводится только к абсолютной сходимости ряда $\sum\alpha_n(x)$. Последняя, однако, как видно из (30), зависит лишь от значений функции $f(t)$ в произвольно малом промежутке $(x-\delta,\ x+\delta)$.

Для методов $A$, не удовлетворяющих условию (15), нам нужна

**Лемма 2.** *Если*[4] $a_0=0$ *и функция*

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(u)\,du,$$

*где*

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\{f(x+u)+f(x-u)\},$$

*есть функция ограниченной вариации в промежутке* $(0,\pi)$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} kA_k(t)=O(n). \tag{31}$$

Доказательство см. [25], лемма 9.

**Теорема 6.** *Пусть метод $A$ удовлетворяет условию* (24). *Если выполнены условия* (27) *и*

$$\sum\frac{|\lambda_n|}{n+1}<\infty, \tag{32}$$

*то $|A|$-суммируемость ряда* (2) *является локальным свойством.*

Доказательство. Так как неопределенный интеграл есть абсолютно непрерывная функция, то функция $\varphi_1(t)$ имеет ограниченную вариацию в промежутке $(\delta,\pi)$, $\delta>0$. Следовательно, по лемме 2 условие (31) имеет место, если $\varphi_1(t)$ имеет ограниченную вариацию в произвольно малом промежутке $(0,\delta)$, и, значит, выполнение условия (31) зависит лишь от значений $f(t)$ в промежутке $(x-\delta,\ x+\delta)$. По следствию 2 при выполнении условий (27) и (32) абсолютная сходимость ряда

[4] Условие $a_0=0$ не является ограничением общности, и поэтому в применениях леммы 2 мы его опускаем.

(29) также зависит только от значений $f(t)$ в том же промежутке $(x-\delta, x+\delta)$.

**Лемма 3.** *Пусть $f_n(t)$ — последовательность измеримых функций в промежутке $(\alpha, \beta)$, $\beta-\alpha \leqslant \infty$. Для того, чтобы при любой $g(t) \in L(\alpha, \beta)$ функции $f_n(t) g(t) \in L(\alpha, \beta)$ и*

$$\sum \left| \int_\alpha^\beta f_n(t) g(t) dt \right| < \infty,$$

*необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum |f_n(t)| = O(1)$$

*почти всюду в $(\alpha, \beta)$.*

Доказательство см. [14], стр. 91.

Теперь можем найти условия, когда $|A|$-суммируемость ряда (2) не является локальным свойством. Будем говорить, что $|A|$-суммируемость ряда (2) *не является локальным свойством функции* $f(t)$, если существуют промежуток $(\alpha, \beta)$, где $x < \alpha < \beta < x + 2\pi$, и функция, равная $f(t)$ в $(\alpha, \beta)$ и равная нулю в $(x, \alpha) \cup (\beta, x+2\pi)$, для которой ряд (2) не является $|A|$-суммируемым в точке $t = x$ (см. [14, 16, 22, 20]).

**Теорема 7.** *Пусть метод $A$ удовлетворяет условиям* (25) *и*

$$\sum |\eta_n \alpha_{nn}| < \infty. \tag{33}$$

*Если*

$$\sum |\lambda_n \alpha_{nn}| = \infty, \tag{34}$$

*то $|A|$-суммируемость ряда* (2) *не является локальным свойством функции $f(t)$.*

Доказательство. Предположим от противного, что для любой функции $f(t)$, интегрируемой в $(\alpha, \beta)$ и равной нулю в $(x, \alpha) \cup (\beta, x+2\pi)$, ряд (2) является $|A|$-суммируемым при $t = x$. По теореме 3 (если в ней положить $\varepsilon_n = \alpha_{nn}$), ввиду (33),

$$\sum |A_n(x) \lambda_n \alpha_{nn}| < \infty.$$

Далее, так как для любой $2\pi$-периодической функции $f(t) \in L$

$$A_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^{x+2\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt,$$

то в нашем случае

$$\sum \left| \lambda_n \alpha_{nn} \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos nt \, dt \right| < \infty.$$

Следовательно, по лемме 3 с $g(t) = \varphi(t)$, почти всюду в $(\alpha, \beta)$ должно быть

$$\sum |\lambda_n \alpha_{nn} \cos nt| = O(1). \tag{35}$$

С другой стороны, по теореме Салема ([1], стр. 766), ввиду (34), если даже $\lambda_n \alpha_{nn} = O(1)$, почти всюду в $(\alpha, \beta)$ имеем

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k \alpha_{kk} \cos kt| \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n |\lambda_k \alpha_{kk}|,$$

и, следовательно, почти всюду в промежутке $(\alpha, \beta)$ имеем

$$\sum |\lambda_n a_{nn} \cos nt| = \infty,$$

что противоречит условию (35). Это противоречие показывает, что $|A|$-суммируемость ряда (2) не является локальным свойством.

## § 5. Некоторые следствия из основных теорем

1. Положим в теоремах 5 и 7 метод $A = P$. В этом случае условия (10) и (15) следуют из (12), т. е. из условия

$$P_{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \right| = O(1). \tag{36}$$

Далее, так как $\eta_n = \delta_{n0}$, то условие (33) выполнено. Условие (25) вытекает из условий (10) и (11), ибо (см. [5], стр. 217)

$$D_0 = 1,\ D_1 = \sup \left| \frac{p_{k+1}}{P_{k+1}} \frac{P_k}{p_k} + \frac{P_k}{P_{k+1}} \right|,$$

$$D_2 = \sup \left| \frac{P_k}{p_{k+1}} \frac{p_{k+2}}{P_{k+2}} \right|,\ D_n = 0 \text{ при } n > 2.$$

В итоге справедлива

**Теорема 8.** *Пусть метод $P$ с $p_n \neq 0$ удовлетворяет условиям (11) и (36). Тогда $|P|$-суммируемость ряда (2) является локальным свойством функции $f(t)$ при выполнении условий (27) и*

$$\sum |P_n^{-1} p_n \lambda_n| < \infty$$

*и не является локальным свойством при выполнении условия*

$$\sum |P_n^{-1} p_n \lambda_n| = \infty.$$

Из теоремы 8 получаем соответственно результаты Моханти ([22], стр. 70) и Мацумото ([20], стр. 114), что $\left| R, \frac{1}{n+1} \right|$-суммируемость ряда (2) при $\lambda_n = \ln^{-1}(n+1)$ и $\lambda_n = \ln^{-1} \ln(n+1)$ является локальным свойством.

Если в теореме 8 для $n \geqslant 1$ положить соответственно $P_n = \exp(n-1)^{\Delta}$ и $\lambda_n = n^{-\Delta} \ln^{-1-\varepsilon}(n+1)$ при $0 < \Delta \leqslant 1$; $P_n = \exp \ln^{\Delta}(n-1)$ и $\lambda_n = \ln^{-\Delta-\varepsilon}(n+1)$ при $\Delta > 0$; $P_n = \exp \ln^{\Delta} \ln(n-1)$ и $\lambda_n = \ln^{-\Delta-\varepsilon} \ln(n+1)$ при $\Delta > 0$; то получим результаты Мацумото [20], что $|P|$-суммируемость ряда (2) не является локальным свойством при $\varepsilon = 0$ и является локальным свойством при $\varepsilon > 0$.

Если в теореме 8 положить $P_n = H_n$ и $\lambda_n = \mu_n \ln(n+1)$, где $\mu_n$ — выпуклая последовательность, удовлетворяющая условию (20), то получим результат Бхатт [12], что $\left|R, \frac{1}{n+1}\right|$-суммируемость ряда (2) является локальным свойством.

При $\lambda_n = 1$ и $p_n > 0$ из теоремы 8 вытекает (см. [8], стр. 34)

**Следствие 3.** *Ни при каком регулярном и слева трансляционном*[3] *методе $P$ с $p_n > 0$ и $\lim P_n^{-1} p_n = 0$, $|P|$-суммируемость ряда Фурье* (1) *не является локальным свойством функции $f(t)$.*

Частный случай следствия 3 при $p_n = 1$ доказан в статье Бозанкет и Кестельмана [14], а также Фоа [15], Рандельсом [26] и др., при $P_n = H_n$ — Идзуми [16] и Моханти [22], а при $P_n = \ln \ldots \ln H_n$ — Моханти [22].

**2.** Применим теперь доказанные основные теоремы к методу Чезаро $(C, \alpha)$. Теорему 6 применяем, когда $\operatorname{Re}\alpha > 1$, ибо тогда[5] $|C, \alpha| \supset |C, 1|$. Далее, ввиду того, что $D_n = |A_n^{-\alpha-2}|$, условие (25) выполняется при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ и при $\alpha = 0$, а так как $\eta_n = A_n^{-1}$, то условие (33) всегда выполнено. В силу сказанного, из теорем 5, 6 и 7 заключаем справедливость следующего результата.

**Теорема 9.** *Пусть $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$. Если выполняются условия* (27) *и*

$$\sum (n+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} |\lambda_n| < \infty \quad \textit{при} \ \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1,$$

$$\sum (n+1)^{-1} |\lambda_n| < \infty \quad \textit{при} \ \operatorname{Re}\alpha \geqslant 1,$$

*то $|C, \alpha|$-суммируемость ряда* (2) *является локальным свойством. Если же выполняется условие*

$$\sum (n+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} |\lambda_n| = \infty,$$

*то $|C, \alpha|$-суммируемость ряда* (2) *не является локальным свойством функции $f(t)$.*

Частный случай теоремы 9 при $\alpha = 0$ и $\lambda_n = n^{-1} \ln^{-1}(n+1)$ (для $n \geqslant 1$) дан Мацумото ([20], стр. 114), а при $\alpha = 1$ и $\lambda_n = \ln^{-1}(n+1)$ — Моханти ([22], стр. 70).

Из теоремы 9 при $\lambda_n = 1$ непосредственно следует, что $|C, \alpha|$-суммируемость ряда (1) для $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1$ не является локальным свойством. Юркат и Пейеримхофф ([17], теорема 7) доказали, что $|C, \alpha|$-суммируемость ряда (1) для вещественных $\alpha \leqslant 1$ не является локальным свойством в смысле Винера (ср. [1], стр. 638; [16], теорема 3).

При $\alpha > 1$ из теоремы 9 не вытекает результата Бозанкет [13]. Однако, пользуясь им, дадим следующее обобщение его для комплексных $\alpha$.

---

[5] Доказательство включения $|C^\beta| \supset |C^\alpha|$ при $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha > -1$ получаем, например, из условия (3) статьи [2], положив в нем $\varepsilon_n = 1$ и считая $\alpha$ и $\beta$ комплексными числами, ибо $|A_n^\sigma| \sim \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\sigma + 1)}{|\Gamma(\sigma+1)|} A_n^{\operatorname{Re}\sigma}$ для $\operatorname{Re}\sigma > -1$.

**Теорема 9а.** *Если* $\operatorname{Re}\alpha > 1$, *то* $|C, \alpha|$*-суммируемость ряда* (1) *является локальным свойством.*

Доказательство. Как показал Бозанкет ([13], стр. 519), ряд (1) с $a_0 = 0$ является $|C, \beta|$-суммируемым в точке $t = x$ при $\beta > 1$, если $\varphi_1(t)$ есть функция ограниченной вариации в промежутке $(0, \pi)$. Следовательно, взяв здесь $1 < \beta < \operatorname{Re}\alpha$, находим, что ряд (1) также[5] $|C, \alpha|$-суммируем в точке $t = x$, а так как $\varphi_1(t)$ абсолютно непрерывна в промежутке $(\delta, \pi)$, $\delta > 0$, то $|C, \alpha|$-суммируемость ряда (1) в точке $t = x$ имеет место, если $\varphi_1(t)$ есть функция ограниченной вариации в промежутке $(0, \delta)$.

3. Рассмотрим теперь случай $A = \left(WN, \frac{1}{n+1}\right)$. Из теорем 5 и 7, заменив в доказательстве теоремы 7 теорему 3 на теорему 4, заключаем следующий результат.

**Теорема 10.** *Если выполняются условия* (27) *и*

$$\sum \frac{|\lambda_n|}{\ln(n+2)} < \infty,$$

*то* $\left|WN, \frac{1}{n+1}\right|$*-суммируемость ряда* (2) *является локальным свойством функции* $f(t)$. *Если же выполняется условие*

$$\sum \frac{|\lambda_n|}{\omega_n \ln(n+2)} = \infty,$$

*то* $\left|WN, \frac{1}{n+1}\right|$*-суммируемость ряда* (2) *не является локальным свойством.*

Из теоремы 10 при $\lambda_n = \frac{1}{n}\mu_n \ln(n+1)$, где $\mu_n$ — выпуклая последовательность, удовлетворяющая условию (20), получаем результат Лал ([19], стр. 312), ибо по формуле конечных приращений

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\lambda_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \mu_n \Delta \frac{\ln(n+1)}{n} + \Delta\mu_n \cdot \frac{\ln(n+2)}{n+1} \right] =$$
$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_n}{n} + \Delta\mu_n \right) < \infty.$$

## Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, **9**, 47—68.
3. Габович Я., Оценка некоторых интегралов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1965, **42**, 127—130.
4. Кангро Г., О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 150—190.
5. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.

6. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.
7. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 155—169.
8. Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 1. Москва, 1956.
9. Тюрнпу Х., Некоторые типы множителей суммируемости для метода Рисса второго порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 253—263.
10. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
11. Харди Г. Х., Рогозинский В. В., Ряды Фурье. Москва, 1959.
12. Bhatt, S. N., An aspect of local property of $|R, \log n, 1|$ summability of the factored Fourier series. Proc. Nat. Inst. Sci. India, **1960, A 26**, 69—73.
13. Bosanquet, L. S., The absolute Cesàro summability of a Fourier series. Proc. London Math. Soc., (2), 1936, **41**, 517—528.
14. Bosanquet, L. S., Kestelman, H., The absolute convergence of series of integrals. Proc. London Math. Soc., (2), 1939, **45**, 88—97.
15. Foà, A., Il fenomeno di Riemann per la somma $|C, \alpha|$ di una serie di Fourier con $0 < \alpha \leqslant 1$. Rend. Ist. Lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e. natur., (3), 1938, **71**, 359—366.
16. Izumi, S., Notes on Fourier Analysis (VIII): Local properties of Fourier series. Tōhoku Math. J., (2), 1950, **1**, 136—143.
17. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. II. Math. Z., 1956, **64**, 151—158.
18. Knopp, K., Lorentz, G. G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math., 1949, **2**, 10—16.
19. Lal, S. N., On the absolute harmonic summability of the factored Fourier series. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, 311—319.
20. Matsumoto, K., Local property of the summability $|R, \lambda_n, 1|$. Tôhoku Math. J., (2), 1956, **8**, 114—124.
21. Mc Fadden, L., Absolute Nörlund summability. Duke Math. J., 1942, **9**, 168—207.
22. Mohanty, R., On the summability $|R, \log w, 1|$ of a Fourier series. J. London Math. Soc., 1950, **25**, 67—72.
23. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 139—156.
24. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 33—36.
25. Prasad, B. N., Bhatt, S. N., The summability factors of a Fourier series. Duke Math. J., 1957, **24**, 103—117.
26. Randels, W. C., On the absolute summability of Fourier series. II. Bull. Amer. Math. Soc., 1940, **46**, 86—88.

Поступило
9 XI 1964

## FOURIER' RIDADE ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE LOKAALSUSE OMADUSEST

S. Baron

### Resümee

Olgu $f(t)$ Lebesgue mõttes integreeruv $2\pi$-perioodiline funktsioon ning (1) olgu funktsiooni $f(t)$ Fourier' rida.

Artiklis leitakse tingimused, millal rea (1) või üldisema rea (2) ($\lambda_n$ on kompleksarvude jada) absoluutne summeeruvus antud punktis maatriksmenetlusega $A = (a_{nk})$ on või ei ole funktsiooni $f(t)$ lokaalne omadus (teoreemid 4,5 ja 6).

Saadud teoreemidest, kui $A$ on Rieszi kaalutud keskmiste menetluse erijuhud, Cesàro menetlus $(C, \alpha)$ järguga $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, harmooniliste keskmiste menetlus, saame Izumi, Mohanty, Matsumoto, Bhatti, Bosanquet-Kestelmanni, Lali jt. tulemusi.

## LOCAL PROPERTY OF ABSOLUTE SUMMABILITY OF A FOURIER SERIES

S. Baron

Summary

Let $f(t)$ be an integrable function in the Lebesgue sense, periodic with period $2\pi$, and the Fourier series of $f(t)$ is given by (1).

In this paper we find conditions when the absolute summability by matrix means $A = (a_{nk})$ of the series (1) or more general series (2) in a given point (where $\lambda_n$ is a complex number) is or is not a local property of the function $f(t)$ (theorems 5, 6 and 7).

For example, we extract from the article three theorems.

**Theorem 8.** *Let the method $P = (R, p_n)$ of the weighted arithmetic means with $p_n \neq 0$ be absolutely conservative and satisfy the conditions* (11). *Then $|P|$-summability of the series* (2) *is a local property of $f(t)$ if the condition* (27) *is satisfied and*

$$\Sigma\, |P_n^{-1} p_n \lambda_n| < \infty,$$

*and is not a local property if*

$$\Sigma\, |P_n^{-1} p_n \lambda_n| = \infty.$$

**Theorem 9.** *Let be* $\operatorname{Re} \alpha > 0$ *or* $\alpha = 0$. *If* (27) *is fulfilled and*

$$\Sigma\, (n+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} |\lambda_n| < \infty \text{ when } \operatorname{Re} \alpha \leqslant 1, \quad \Sigma\, (n+1)^{-1} |\lambda_n| < \infty \text{ when } \operatorname{Re} \alpha \geqslant 1,$$

*then Cesàro's $|C, \alpha|$-summability of the series* (2) *is a local property of the function $f(t)$; and is not a local property if*

$$\Sigma\, (n+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} |\lambda_n| = \infty.$$

**Theorem 10.** *If* (27) *is fulfilled and*

$$\sum \frac{|\lambda_n|}{\ln (n+2)} < \infty,$$

*then absolute harmonic summability of the series* (2) *is a local property of the function $f(t)$; and is not a local property if*

$$\sum \frac{|\lambda_n|}{\omega_n \ln (n+2)} = \infty,$$

*where $\omega_n$ is monoton increasing and*

$$\sum \frac{1}{\sqrt{\omega_n}\,(n+1) \ln (n+2)} < \infty.$$

From the theorem 8 there follow the results of Izumi [16], Mohanty [22], Matsumoto [20], Bhatt [12] and Bosanquet—Kestelmann [14]. From the theorem 10 there follows the result of Lal [19]. From the theorem 9 there follows that $|C, \alpha|$-summability of Fourier series (1) is not a local property when $0 < \operatorname{Re} \alpha \leqslant 1$.

# ВАРИАЦИОННОЕ СВОЙСТВО ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

**О. Чекмарев**

Ленинградский механический институт

Рассмотрим пространство с мерой $(\Omega, S, \mu)$ (см. [2], стр. 77), образованное множеством $\Omega$ элементов $x$, $\sigma$-алгеброй $S$ подмножеств $\Omega$ и мерой $\mu$, определенной на $\sigma$-алгебре $S$. Меру считаем счетно-аддитивной на $S$, неотрицательной и равной нулю для пустого множества. Пусть множество $Q$ таково, что $Q \subset S$, $\mu(Q) = \mu_0 \leqslant \mu(\Omega)$, $\mu_0 < +\infty$.

Пусть на $(\Omega, S, \mu)$ задана измеримая функция $F(x)$, принимающая значения из заданного множества вещественных чисел $E$, такая, что существует и конечен интеграл Лебега—Стильтьеса по мере $\mu$ от этой функции, взятый по всему $\Omega$: $\int\limits_{\Omega} F(x)\,d\mu < +\infty$ (см. [1], стр. 42; [2], стр. 80).

Обозначим через $\varkappa(c)$, $\lambda(c)$, $\varkappa'(c)$, $\tau(c)$, $\Theta(a)$, $\Theta'(a)$ $(a > 0)$ множества таких элементов $x$, что $F(x) \geqslant c$ для $\varkappa(c)$, $F(x) > c$ для $\lambda(c)$, $F(x) \leqslant c$ для $\varkappa'(c)$, $F(x) = c$ для $\tau(c)$, $|F(x)| \geqslant a$ для $\Theta(a)$, $|F(x)| < a$ для $\Theta'(a)$.

**Лемма 1.** *Множества $\varkappa(c)$, $\lambda(c)$, $\varkappa'(c)$, $\tau(c)$, $\Theta(a)$, $\Theta'(a)$ измеримы.*

Доказательство. Множества $\varkappa(c)$, $\lambda(c)$, $\varkappa'(c)$, $\tau(c)$ суть прообразы борелевских подмножеств множества $E$ при отображении $F$, следовательно, они измеримы (см. [1], стр. 43; [2], стр. 82). Множества $\Theta(a)$ и $\Theta'(a)$ измеримы вследствие равенств: $\Theta(a) = \varkappa(a) + \varkappa'(-a)$ и $\Theta'(a) = \Omega - \Theta(a)$.

Обозначим $\mu[\varkappa(c)] = m(c)$; $\mu[\lambda(c)] = n(c)$. Использовав конечность интеграла $\int\limits_{\Omega} |F(x)|\,d\mu$ (см. [1], стр. 57), получим следующую оценку: $\mu[\Theta(a)] \leqslant \frac{1}{a} \int\limits_{\Omega} |F(x)|\,d\mu < +\infty$ (см. [2] стр. 57).

Если $\mu(\Omega) < +\infty$, то $\mu[\Theta'(a)] = \mu(\Omega) - \mu[\Theta(a)] < +\infty$. Если же $\mu(\Omega) = +\infty$, то $\mu[\Theta'(a)] = +\infty$. Потребуем в этом случае существования множества $A$ такого, что $A \subset S$, $A \subset \varkappa(0)$,

$\mu_0 \leqslant \mu(A) < +\infty$. Обозначим через $\Omega'$: а) множество $\Omega$, если $\mu(\Omega) < +\infty$; б) множество $A$, если $\mu(\Omega) = +\infty$; тогда $\Omega' \subset \Omega, \mu(\Omega') < +\infty$. Дальше $x \in \Omega'$, $x \bar{\in} \Omega - \Omega'$.

Обозначим $E'$ — образ $\Omega'$ при отображении $F$, $E' \subset E$. Представим $E'$ в виде счетной суммы интервалов $c'_i < F < c'_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и отдельных точек $c''_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, причем $c''_i \bar{\in} (c'_i, c'_{i+1})$. Левый или правый концы интервала $(c'_i, c'_{i+1})$ могут быть бесконечными. Пусть $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ таковы, что $\mu(\tau_i) > 0$, здесь и в дальнейшем $\tau_i = \tau(c_i)$, и для $c \neq c_i$ $\mu[\tau(c)] = 0$. Таких $c_i$ не может быть более счетного множества, так как $\mu(\Omega') < +\infty$.

Если $m(c^*_1) = \mu_0$, то обозначим $\varkappa(c^*_1) = Q^*_1$. Если $n(c^*_2) = \mu_0$, то обозначим $\lambda(c^*_2) = Q^*_2$.

Объединив последовательности $c'_i$ и $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, снова получим последовательность, которую обозначим $D_1, D_2, \ldots$

**Лемма 2.** *Пусть $n(D_k) > \mu_0 > m(D_l)$, причем $D_k$ и $D_l$ — соседние, то есть $D_i \bar{\in} (D_k, D_l)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть также $a < c < b$; $a, b, c \in (D_k, D_l)$: тогда найдется $c^*_3$ такое, что $c^*_3 \in (D_k, D_l)$, $m(c^*_3) = \mu_0$.*

Доказательство. Функция $m(c)$ непрерывна для $c \in (D_k, D_l)$, так как $m(a) - m(b) = \mu[\varkappa(a) - \varkappa(b)] \to \mu[\tau(c)] = 0$ при $a, b \to c$. Кроме того, $\lim\limits_{c \to D_k+} m(c) = \lim\limits_{c \to D_k+} n(c) = n(D_k)$; $\lim\limits_{c \to D_l-} m(c) = m(D_l)$. Поэтому функция $m(c)$ примет значение $\mu_0$ в некоторой точке $c^*_3$, $c^*_3 \in (D_k, D_l)$. Обозначим $\varkappa(c^*_3) = Q^*_3$.

Пусть $n(c_i) < \mu_0 < m(c_i)$. Тогда $0 < \mu_0 - n(c_i) < \mu(\tau_i)$. Потребуем в этом случае существования множества $T_i$ такого, что $T_i \subset S$, $T_i \subset \tau_i$, $\mu(T_i) = \mu_0 - n(c_i)$.

Обозначим $\lambda(c_i) + T_i = Q^*_4$. Тогда $\mu(Q^*_4) = \mu_0$. Обозначим также в этом случае $c_i = c^*_4$.

Каждое из $Q^*_1$, $Q^*_2$, $Q^*_3$, $Q^*_4$ обозначим $Q^*$ и аналогично $c^*_1$, $c^*_2$, $c^*_3$, $c^*_4$ — $c^*$. Тогда $Q^*$ таково, что $\mu(Q^*) = \mu_0$; $F(x) \geqslant c^*$ при $x \in Q^*$.

**Лемма 3.** *Функция $F(x)$ интегрируема по любому множеству $B$, $B \subset S$, то есть $\int\limits_B F(x) d\mu$ существует и конечен.*

Доказательство вытекает из измеримости $F(x)$ и интегрируемости по $\Omega$ (см. [1], стр. 56).

**Теорема.** *Если выполнены все условия, сформулированные выше, то справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{Q^*} F(x) d\mu \geqslant \int\limits_{Q} F(x) d\mu.$$

Доказательство. Обозначим: $P = Q^* \cap Q$, $R^* = Q^* - P$, $R = Q - P$. Тогда $\mu(R^*) = \mu(R) = \mu_0 - \mu(P)$. Поэтому

$$\int_{Q^*} F(x)\,d\mu - \int_{Q} F(x)\,d\mu = \int_{R^*} F(x)\,d\mu - \int_{R} F(x)\,d\mu \geqslant$$
$$\geqslant \int_{R^*} c^* d\mu - \int_{R} F(x)\,d\mu = \int_{R} c^* d\mu - \int_{R} F(x)\,d\mu =$$
$$= \int_{R} [c^* - F(x)]\,d\mu \geqslant 0,$$

так как $x \bar{\in} Q^*$ при $x \in R$.

Обозначим через $\omega$ множество такое, что $\omega \subset S$, $\mu(\omega) = 0$. $\omega$ не влияет ни на $\int_{Q^*} F(x)\,d\mu$, ни на $\mu(Q^*)$. Поэтому $Q^*$ определено с точностью до $\omega$. Множество $T_i$, а следовательно и $Q^*{}_4$ (и $Q^*$), также определены не всегда однозначно.

Задача на минимум решается аналогично. Функция $f(x) = -F(x)$ удовлетворяет условию теоремы, и для нее будет выполнено неравенство, обратное неравенству теоремы, и будет иметь место минимум.

Примеры. Будем писать $W$: $\{V(x)\}$, если $W$ — множество элементов $x$, для которых выполнено условие $V(x)$.

1. Пусть $(x, y)$ — точки на плоскости ($x$ и $y$ — вещественные числа), $\Omega$ — полуплоскость $\{x \geqslant 0\}$, а мера множества $B \subset S$ совпадает с его площадью. Функция $F$ всюду, кроме множества меры нуль, равна $\exp(-x^2/a^2 - y^2/b^2)$. Условия теоремы выполнены, и мы получаем $Q^*$: $\{\exp(-x^2/a^2 - y^2/b^2) \geqslant \exp(-c)\} = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant c\}$. Постоянная $c$ определяется из условия $\mu = \mu_0$. Следовательно, $\frac{1}{2}\pi abc = \mu_0$, $c = 2\mu_0/\pi ab$.

2. Пусть имеем данные предыдущего примера. Изменим значения $F(x, y)$ на множестве $\Phi$: $\{\exp(-1) \geqslant \exp(-x^2/a^2 - y^2/b^2) \geqslant \exp(-4)\}$, положив $F(x, y) = \exp(-2)$, $(x, y) \in \Phi$. Здесь можно взять множество $\lambda[\exp(-1)] + T(-1)$: $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant c\}$. По-прежнему получаем $\frac{1}{2}\pi abc = \mu_0$, $c = 2\mu_0/\pi ab$.

3. Пусть $\Omega$ — полуплоскость $\{x \geqslant 0\}$. $F(x,y) = H - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $(x,y) \in B$; $B: \{H \geqslant F > 0\}$ и $F(x,y) = 0$ при $(x,y) \bar{\in} B$. Здесь $\mu(\Omega) = +\infty$. Пусть $\mu_0 = 2\pi H^2$. Ясно, что существует множество $A$ такое, что $A \subset S$, $\mu_0 \leqslant \mu(A) < +\infty$, например, $A: \{x^2 + y^2 \leqslant 6H^2\}$; $\mu(A) = 3\pi H^2 > \mu_0$. В качестве множества $\lambda(0) + T(0)$ возьмём $Q^*: \{x^2 + y^2 \leqslant C\}$. Тогда $\frac{1}{2}\pi C^2 = 2\pi H^2$ и $C = 2H$.

4. Пусть, как и раньше, $\Omega$ — полуплоскость $\{x \geqslant 0\}$. $F(x,y) = \exp(-x^2)$, а мера $\mu$ имеет плотность $\exp(-y^2)$. Тогда $Q^*: \{0 \leqslant x \leqslant c\}$, $\mu(Q^*) = \int_0^c dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\,dy = c\sqrt{\pi} = \mu_0$, $c = \mu_0/\sqrt{\pi}$.

В заключение отметим, что эта задача была предложена автору И. П. Подольным для случая плоскости и гладкой подынтегральной функции, за что приношу ему благодарность.

## Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, в. II. Москва, 1960.
2. Халмош П., Теория меры. Москва, 1953.

Поступило
7 V 1965

## MÕÕTUVATE FUNKTSIOONIDE NIVOOPINDADE VARIATSIOONOMADUS

O. Chekmarev

Resümee

Töös on lahendatud ülesanne sellise etteantud mõõduga hulga leidmise kohta, et mõõtuva funktsiooni Lebesgue-Stieltjes'i integraal, mis on võetud sellel hulgal, oleks mitte väiksem kui samast funktsioonist integraal, mis on võetud mistahes teisel sama mõõduga hulgal. Samuti on näidatud, et ülesanne miinimumi kohta lahendub analoogiliselt.

## EINE VARIATIONSEIGENSCHAFT DER NIVEAUFLÄCHEN DER MEßBAREN FUNKTIONEN

O. Chekmarev

Zusammenfassung

In der Arbeit ist die Aufgabe gelöst, eine solche meßbare Menge $Q^*$ von vorausgebenem Maß $\mu_0$ zu finden, daß das über diese Menge genommene Lebesgue — Stiltjes-Integral von meßbarer Funktion $F$ nicht minder wäre, als dieses über beliebige andere Mengen $Q$ von demselben Maß $\mu_0$ genommene Integral von derselben Funktion $F$. Die Aufgabe wird von der durch die Niveaufläche begrenzte Menge oder ihrem Teil gelöst. Die durch die Niveaufläche begrenzte Menge besteht aus solchen Punkten, für die der Wert der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion $F$ nicht minder ist als eine Konstante $c$. Auch wird auf die Fälle hingewiesen, in denen die Konstante $c$ durch das Maß $\mu_0$ der gesuchten Menge $Q^*$ eindeutig bestimmt wird. Es ist auch bewiesen, daß die Minimum-Aufgabe gleichartig gelöst wird.

# ОБ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

**Т. Сырмус**

Кафедра математического анализа

## § 1. Введение

Задачу, в которой разыскивается асимптотическая информация для некоторого функционального преобразования функции с известной асимптотической информацией, называют абелевой асимптотической задачей. Решения таких задач, сформулированных в виде теорем, принято называть *абелевыми теоремами.*

В частности, известно [2], что

*Если*

$$f(x) = s + o(1) \qquad (x \to \infty), \tag{1.1}$$

*то*

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) \int_0^1 f(x\tau)\, d\tau = s + o(1) \qquad (x \to \infty). \tag{1.2}$$

В этой теореме известная асимптотическая информация о функции дана равенством (1.1), а доказываемая асимптотическая оценка функционального преобразования вместе с этим преобразованием даны равенством (1.2). Общая формулировка абелевых теорем следующая.

*Если*

$$f(x) = o(\varphi(x)) \qquad (x \to x_0), \tag{1.3}$$

*то*

$$F[f(x)] = o(\psi(x)) \qquad (x \to x_0). \tag{1.4}$$

Здесь $F$ — некоторый функциональный оператор.

Приходится, однако, решать и задачи, обратные абелевой асимптотической задаче. При этом обратные задачи без дополнительных условий в общем случае не решимы. Если же на функцию $f(x)$ можно наложить такое дополнительное условие, при котором окажется справедливым обращение абелевой теоремы, то это условие называют тауберовым условием, а полученное обращение абелевой теоремы — *тауберовой теоремой.* В некоторых случаях удается получить обращение абелевых теорем и без тауберовых условий. Тогда говорят о так называемых *мерсеровых теоремах.*

В § 3 настоящей работы рассматриваются мерсеровы теоремы, являющиеся обращением некоторых специальных абелевых теорем. При этом исходят из асимптотических равенств, аналогичных равенству (1.2). Обозначения, основные понятия и теоремы приведены в § 2. О практическом применении доказанных теорем речь идет в § 4.

## § 2. Обозначения и основные понятия

*Методом суммирования Хаусдорфа* называется матричный метод, данный в виде преобразования последовательности в последовательность равенством

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k, \tag{2.1}$$

где последовательность $\{\mu_k\}$ называется *последовательностью Хаусдорфа*. Если имеется такая функция $\varphi(\tau)$ с конечным изменением на отрезке [0, 1], что [1]

$$\mu_k = \int_0^1 \tau^k d\varphi(\tau), \tag{2.2}$$

то последовательность $\{\mu_k\}$ называют *последовательностью моментов*. Последовательность моментов $\{\mu_k\}$ называется регулярной последовательностью моментов, если

$$\varphi(0) = \varphi(0+) = 0 \text{ и } \varphi(1) = 1. \tag{2.3}$$

Для того, чтобы метод Хаусдорфа сохранял сходимость, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\mu_k\}$ была последовательностью моментов. Для регулярности метода Хаусдорфа необходимо и достаточно, чтобы $\{\mu_k\}$ была регулярной последовательностью моментов. Эти утверждения доказаны Хаусдорфом в работе [3] (см. также [10], гл. XI).

В настоящей работе рассматриваются методы Хаусдорфа, сохраняющие сходимость. В этом случае элементы последовательности $\{\mu_k\}$ являются моментами, и преобразование (2.1) можно, ввиду формулы (2.2), привести к виду

$$t_n = \int_0^1 \{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} s_k \} d\varphi(\tau). \tag{2.4}$$

Метод Хаусдорфа, определенный равенством (2.4), обозначим через $[H, \varphi(\tau)]$. Если $\lim\limits_{n} t_n = t$, то число $t$ назовем $[H, \varphi(\tau)]$-суммой последовательности $\{s_n\}$, а саму последовательность — $[H, \varphi(\tau)]$-суммируемой. Класс $[H, \varphi(\tau)]$-суммируемых последовательностей обозначим символом $[H, \varphi(\tau)]^*$.

---

[1] Везде, где пределы изменения индексов не указаны, они пробегают все целочисленные значения от 0 до $+\infty$.

Рассмотрим два метода $[H, \varphi(\tau)]$ и $[H, \psi(\tau)]$. Пусть метод $[H, \varphi(\tau)]$ суммирует по меньшей мере все те же последовательности, что и метод $[H, \psi(\tau)]$. В этом случае говорят, что метод $[H, \varphi(\tau)]$ не слабее метода $[H, \psi(\tau)]$, и пишут $[H, \varphi(\tau)]^* \supseteq \supseteq [H, \psi(\tau)]^*$. Через $[H, \varphi(\tau)] \sim [H, \psi(\tau)]$ обозначим эквивалентность рассматриваемых методов. Последнее означает одновременное выполнение условий:

$$[H, \varphi(\tau)]^* \supseteq [H, \psi(\tau)]^* \text{ и } [H, \psi(\tau)]^* \subseteq [H, \varphi(\tau)]^*.$$

Линейный метод преобразования функции в функцию, аналогичный методу (2.4), изучен Рогозинским [7]. Здесь *хаусдорфовым методом суммирования функций* называется линейный метод, данный в виде преобразования функции в функцию равенством

$$t(x) = \int_0^1 s(x\tau)\, d\varphi(\tau) \qquad (x > 0), \tag{2.5}$$

где $\varphi(\tau)$ — функция с конечным изменением на отрезке [0, 1], а $s(x)$ — функция, *измеримая в смысле Бореля и ограниченная в любом конечном интервале* $(0, \mathfrak{X})$. Перечисленные условия для функции $s(x)$ в формулировках наших теорем, как правило, опускаются. Введенный метод называют функциональным методом Хаусдорфа и обозначают через $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]$. Если существует $\lim\limits_{x\to\infty} t(x) = t$, то число $t$ называют $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]$-суммой функции $s(x)$ и говорят, что эта функция $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]$-суммируема к числу $t$. Понятия сохранения сходимости и регулярности функционального метода Хаусдорфа аналогичны соответствующим понятиям методов преобразования последовательностей. Рогозинский [7] показал, что всякий функциональный метод Хаусдорфа сохраняет сходимость, а необходимыми и достаточными условиями его регулярности являются условия (2.3).

Отметим, что 1) линейная комбинация двух функциональных методов Хаусдорфа — функциональный метод Хаусдорфа; 2) линейная комбинация двух регулярных функциональных методов Хаусродфа — регулярный метод, если сумма коэффициентов линейной комбинации равна единице.

Понятия $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]^*$, $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]^* \supseteq [\mathfrak{H}, \psi(\tau)]^*$ и $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)] \sim \sim [\mathfrak{H}, \psi(\tau)]$ определяем аналогично случаю методов Хаусдорфа для последовательностей.

Наконец, через $H^k$, $C^k$ и $E$ обозначим методы Гелдера, Чезаро и единичный метод преобразования последовательностей. Соответствующие функциональные[2] методы обозначим через $\mathfrak{H}^k$,

[2] Функциональные методы $\mathfrak{H}^k$, $\mathfrak{C}^k$ и $\mathfrak{E}$ — методы $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]$, где, соответственно, $\varphi(\tau) = \int\limits_0^\tau h'_k(r)\,dr$ при $h'_k(r) = \frac{1}{\Gamma(k)} \ln\left(\frac{1}{r}\right)^{k-1}$, $\varphi(\tau) = -(1-\tau)^k$ и $\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant \tau < 1, \\ 1 & \text{при } \tau = 1. \end{cases}$

$\mathfrak{C}^k$ и $\mathfrak{C}$. Пусть далее $c$ — множество сходящихся последовательностей, и $\mathfrak{C}$ — множество сходящихся в процессе $x \to \infty$ функций.

## § 3. Мерсеровы теоремы для функций

В этом параграфе мы докажем теоремы, решающие некоторые специальные обратные абелевы задачи. Полученные здесь теоремы назовем мерсеровыми теоремами для функций. В их доказательствах воспользуемся некоторыми теоремами типа Мерсера, являющимися обобщениями следующей теоремы.

**Теорема А.** *Если* $a > 0$ *и*

$$a s_n + (1-a)\frac{\sum_{k=0}^{n-1} s_k}{n} = s + o(1) \qquad (n \to \infty),$$

*то*

$$s_n = s + o(1) \qquad (n \to \infty).$$

Приведенная теорема доказана Мерсером [4] в 1907 г.

Если в теореме А среднее арифметическое последовательности $\{s_n\}$ заменить некоторым другим матричным преобразованием этой последовательности, то получим обобщения или аналоги теоремы А. Ввиду многочисленности нужных нам теорем типа Мерсера мы их приводить не будем, ограничиваясь ссылкой на литературу.

При выводе теорем мы будем опираться на следующую важную теорему Рогозинского [7].

**Теорема В.** *Если уничтожается не более как конечное число моментов метода* $[H, \psi(\tau)]$, *то из соотношения* $[H, \varphi(\tau)]^* \supseteq [H, \psi(\tau)]^*$ *вытекает соотношение* $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]^* \supseteq [\mathfrak{H}, \psi(\tau)]^*$.

В нижеследующей теореме через $\mathfrak{H}^k\{s(x)\}$ и $\mathfrak{C}^k\{s(x)\}$ обозначим результат преобразования функции $s(x)$ соответственно методами $\mathfrak{H}^k$ и $\mathfrak{C}^k$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathfrak{A}^k$ *— один из методов* $\mathfrak{C}^k$ *или* $\mathfrak{H}^k$ $(k = 2, 3, \ldots)$ *и* $t(x) = \mathfrak{A}^k\{s(x)\}$. *Существует постоянная* $\alpha(\mathfrak{A}^k) \in (0, \frac{1}{2})$ *такая, что из равенства*

$$a s(x) + (1-a) t(x) = s + o(1) \qquad (x \to \infty) \tag{3.1}$$

*при* $a > \alpha(\mathfrak{A}^k)$ *вытекает равенство*

$$s(x) = s + o(1) \qquad (x \to \infty). \tag{3.2}$$

Замечание. Последовательности $\{\alpha(\mathfrak{A}^k)\}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ возрастают, неотрицательны и сходятся к числу $\frac{1}{2}$ (см. [6]). Справедливы следующие асимптотические представления при $k \to \infty$:

$$\alpha'_k = \alpha(\mathfrak{C}^k) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{48}\frac{\pi^4}{\ln^2 k}, \qquad \alpha''_k = \alpha(\mathfrak{H}^k) = \frac{\cos^k \frac{\pi}{k}}{1 + \cos^k \frac{\pi}{k}} \sim \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8k}.$$

Доказательство теоремы проведено для метода $\mathfrak{C}^k$, так как для метода $\mathfrak{H}^k$ оно аналогично. Преобразование функции $s(x)$ в асимптотическом равенстве (3.1) определено методом $a\mathfrak{E} + (1-a)\mathfrak{C}^k = \mathfrak{T}_1$. В этой комбинации методы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{C}^k$ являются регулярными функциональными методами Хаусдорфа (см. [7]), а сумма коэффициентов $a$ и $1-a$ равна в рассматриваемой линейной комбинации 1. Поэтому метод $\mathfrak{T}_1$, ввиду сказанного в § 2, — регулярный функциональный метод Хаусдорфа. Соответствующим обыкновенным методом Хаусдорфа для метода $\mathfrak{T}_1$ является $T_1 = aE + (1-a)C^k$, последовательность моментов которого есть $\mu_n = a + (1-a)\dfrac{1}{\binom{n+k}{k}}$. Но тогда для любых значений $n$ будет $\mu_n \neq 0$. Так как имеет место теорема типа Мерсера для метода $C^k$ (см. [6], теорема 3 A), то соотношение $aE + (1-a)C^k \sim E$ выполняется для $a > a'_k$. Определение постоянной $a'_k$ дано в теореме 3 A из [6]. Полученное нами соотношение означает, в частности, что $T_1^* \subseteq c$ при $a > a'_k$. Из теоремы B следует теперь, что для этих же значений $a$ справедливо соотношение $\mathfrak{T}_1^* \subseteq \mathfrak{C}$. Равенство 3.2 очевидно ввиду регулярности метода $\mathfrak{T}_1$. Теорема доказана.

Если в доказательстве теоремы 1 воспользоваться вместо теоремы типа Мерсера из [6] соответствующей теоремой типа Мерсера из работы [8], то получится

**Теорема 2.** *Если* $a > 0$, $0 < k < 1$ *и справедливо равенство* (3.1), *где* $t(x) = \mathfrak{H}^k\{s(x)\}$, *то справедливо равенство* (3.2).

Для методов Хаусдорфа докажем нижеследующие теоремы 3, 4 и 5.

**Теорема 3.** *Если* $a > \frac{1}{2}$ *и метод* $[H, \varphi(\tau)]$, *соответствующий методу* $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]$, *вполне регулярен, то из равенства* (3.1), *где* $t(x) = \int\limits_0^1 s(\tau x)\,d\varphi(\tau)$, *вытекает равенство* (3.2).

Доказательство. Прежде всего учтем, что имеется соответствующая теорема типа Мерсера для последовательностей (см. [1]). Далее заметим, что моменты метода $aE + (1-a)[H, \varphi(\tau)]$, соответствующего методу $a\mathfrak{E} + (1-a)[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]$, суть $a + (1-a)\mu_n$, где $\{\mu_n\}$ — последовательность моментов метода $[H, \varphi(\tau)]$. Так как метод $[H, \varphi(\tau)]$ вполне регулярен, то он регулярен и положителен (см. [10], теорема 10). Следовательно, $\{\mu_n\}$ — абсолютно монотонная последовательность и $\mu_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Это, в свою очередь, означает, что не более как конечное число моментов $a + (1-a)\mu_n$ может обратиться в нуль. В остальном доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Далее, приведем две обобщенные Мерсеровы теоремы, нужные нам при выводе их функциональных аналогов.

**Теорема C.** *Пусть $\varphi(\tau)$ — функция с конечным изменением без сингулярной составляющей на отрезке* $[0, 1]$ *и* $\varphi(0+) = \varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. *Для того, чтобы из* $[H, \varphi(\tau)]$*-суммируемости последовательности* $\{s_k\}$ *вытекала сходимость этой последовательности, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\inf_{\operatorname{Re}\omega \geqslant 0} \left| \int_0^1 \tau^{\omega}\, d\varphi(\tau) \right| > 0. \tag{3.3}$$

**Теорема D.** *Пусть* $\{\mu_k\}$ *— абсолютно монотонная последовательность Хаусдорфа, причем* $\mu_k = \int_0^1 \tau^k d\varphi(\tau)$. *Для того, чтобы имело место соотношение* $[H, \varphi(\tau)]^* \subseteq c$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\inf_k \mu_k > 0$.

Первая из приведенных теорем доказана Питтом и Питергаусом [5], вторая — Сырмус [9].

Для метода Хаусдорфа, однако, справедлива обратная абелева теорема в более общем виде, чем предыдущие. Именно в этом случае можно будет отказаться от введения в теорему линейной комбинации вида (3.1). Итак, справедлива

**Теорема 4.** *Если метод* $[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]$, *в котором функция* $\varphi(\tau)$ *монотонно возрастает, удовлетворяет условию*

$$\inf_n \int_0^1 \tau^n d\varphi(\tau) > 0, \tag{3.4}$$

*то выполняется соотношение*

$$[\mathfrak{H}, \varphi(\tau)]^* \subseteq \mathfrak{C}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Так как при условиях теоремы имеют место как теорема D, так и соотношение $c \subseteq [H, \varphi(\tau)]^*$, то $[H, \varphi(\tau)] \sim E$. Поэтому

$$[H, \varphi(\tau)]^* \subseteq c. \tag{3.6}$$

Отметим далее, что для моментов метода $[H, \varphi(\tau)]$ справедливы неравенства

$$\mu_n = \int_0^1 \tau^n d\varphi(\tau) \neq 0. \tag{3.7}$$

Последнее гарантируется условием (3.4). Ввиду условий (3.6), (3.7) и теоремы B, теперь справедливо соотношение (3.5), что и требовалось доказать.

На основании теоремы C аналогично доказывается

**Теорема 5.** *Если регулярный метод* $[H, \varphi(\tau)]$, *в котором* $\varphi(\tau)$ *— функция с конечным изменением, не имеющая сингулярной составляющей на отрезке* $[0, 1]$, *удовлетворяет условию* (3.3), *то из равенства*

$$\int_0^1 s(x\tau)\, d\varphi(\tau) = s + o(1) \qquad (x \to \infty)$$

*вытекает равенство* $s(x) = s + o(1) \qquad (x \to \infty)$.

## § 4. Применение доказанных теорем

Для применения теоремы 1 учтем сноску 2 на стр. 127 и перепишем равенство (3.1) конкретно для метода Чезаро $\mathfrak{C}^k$ $(k=2, 3, \ldots)$. При этом проведем под знаком интеграла замену переменных по правилу $x\tau = y$, вследствие чего преобразованная функция $t(x)$ выразится по формуле

$$t(x) = \frac{k}{x^k} \int\limits_0^x s(y)\,(x-y)^{k-1} dy.$$

Наконец, обозначив $\lambda = \frac{a-1}{a}$ и $\sigma = \frac{s}{a}$, запишем асимптотическое уравнение (3.1) в виде

$$s(x) - \lambda \frac{k}{x^k} \int\limits_0^x s(y)\,(x-y)^{k-1} dy = \sigma + o(1) \quad (x \to \infty). \quad (4.1)$$

Таким образом, мы имеем дело с уравнением Вольтерра, заданным асимптотически. Теорема 1 дает нам, следовательно, асимптотическую информацию о решении уравнения Вольтерра (4.1). Так, нам известно, что для любого $\lambda \in \left(1 - \frac{1}{a'_k},\ 1\right)$ будет

$$s(x) = \frac{\sigma}{1-\lambda} + o(1) \qquad (x \to \infty). \quad (4.2)$$

Уравнение (3.1) для метода Гельдера $\mathfrak{H}^k$ $(k=2, 3, \ldots)$ приводится аналогично к виду

$$s(x) - \lambda \frac{1}{x\Gamma(k)} \int\limits_0^x s(y) \left(\ln \frac{x}{y}\right)^{k-1} dy = \sigma + o(1) \qquad (x \to \infty). \quad (4.3)$$

Из этого равенства на основании теоремы 1 следует, что в случае $\lambda \in \left(1 - \frac{1}{a''_k},\ 1\right)$ решение $s(x)$ удовлетворяет условию (4.2).

Учитывая теорему 2, замечаем, что асимптотическое равенство (4.2) вытекает из равенства (4.3), в котором рассматривается метод $\mathfrak{H}^k$ при $0 < k < 1$ и $\lambda \in (-\infty, 1)$.

Если теоремы 1 и 2 решают конкретные асимптотические уравнения Вольтерра (4.1) и (4.3), то теорема 3 дает решение целому классу асимптотически заданных уравнений Вольтерра.

Чтобы убедиться в сказанном, проведем в интеграле $t(x) = \int\limits_0^1 s(x\tau)\,d\varphi(\tau)$ равенства (3.1) замену переменных по прежнему правилу, т. е. взяв $\tau x = y$, а для $\lambda$ и $\sigma$ сохраним обозначения, введенные выше. Ввиду теоремы 3 из условия

$$s(x)-\lambda\int_0^x s(y)\,d\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\sigma+o(1)\qquad(x\to\infty)$$

следует теперь оценка вида (4.2) для всех $\lambda\in(-1,\ 1)$. Здесь функция $\varphi(\tau)$, образующая ядро $K(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ уравнения Вольтерра, принадлежит к классу таких функций, для которых момент метода $[\mathfrak{H},\ \varphi(\tau)$ вполне регулярен[3]. К этому классу относится, например, класс функций монотонно возрастающих и имеющих ограниченную производную на отрезке [0, 1].

Если в теореме 4 потребовать дополнительно выполнения условий (2.3), то наша теорема даст решение следующему классу асимптотически заданных интегральных уравнений:

$$\int_0^x s(y)\,d\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=s+o(1)\qquad(x\to\infty).$$

О решении $s(x)$ этого уравнения знаем теперь, что $s(x)=s+o(1)$ $(x\to\infty)$. Аналогичную задачу решает теорема 5.

## Литература


1. Basu, S. K., On the total relative strength of some Hausdorff methods equivalent to identity. Amer. J. Math., 1954, **76**, 389—398.
2. Fuchs, W. H. J., Rogosinsky, W. W., A note on Mercer's theorem. J. London Math. Soc., 1942, **17**, 204—210.
3. Hausdorff, F., Summationsmethoden und Momentfolgen I. Math. Z., 1929, **9**, 74—109.
4. Mercer, J., On the limit of real variants. Proc. London Math. Soc., 1907, **5**, 206—224.
5. Pitt, H. R., Peterhouse, Ph. D., Mercerian theorems. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1938, **34**, 510—520.
6. Polniakovski, Z., Polynomial Hausdorff transformations. I. Mercerian theorems. Ann. polon. Math., 1958, **5**, 1—24.
7. Rogosinsky, W. W., On Haudsorff's methogs of summability II. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1942, **38**, 344—362.
8. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1961, **102**, 169—184.
9. Сырмус Т., Об обобщенной теореме Мерсера. Изв. АН. Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 99—106.
10. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.



Поступило
5 X 1964


---

[3] Говорят, что момент $\mu_n=\int_0^1\tau^n d\varphi(\tau)$ метода $[H,\ \varphi(\tau)]$ вполне регулярен, если метод $[H,\ \varphi(\tau)]$ вполне регулярен.

## ÜHEST ASÜMPTOOTILISEST ÜLESANDEST

T. Sõrmus

Resümee

Olgu $F$ mingi funktsionaaloperaator. Teoreemid, milles asümptootilisest võrdusest (1.4) järeldub võrdus (1.3) ilma lisatingimusteta $f$ kohta, kannavad Merceri tüüpi teoreemide nimetust. Artiklis tuletatakse mõned konkreetsed Merceri tüüpi teoreemid (vt. teoreemid 1—5), mille rakendusena vaadeldakse teatavate Volterra tüüpi integraalvõrrandite lahendamist.

## ZU EINER ASYMPTOTISCHEN AUFGABE

T. Sõrmus

Zusammenfassung

Es sei $F$ eine Funktionaltransformation. Die Sätze, in denen aus der asymptotischen Gleichung (1.4) ohne Hinzunahme der Konvergenzbedingung (Taubersche Bedingung) die Gleichung (1.3) folgt, sind als Mercersche Sätze bekannt. Im vorliegenden Aufsatz werden einige konkrete Mercersche Sätze bewiesen (s. Sätze 1—5). Außerdem werden einige konkrete Volterrasche Integralgleichungen gelöst, wozu die im Aufsatz bewiesenen Sätze benutzt werden.

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

**П. Нуума**

Кафедра алгебры и геометрии

Одним из труднейших вопросов современной квантовой теории поля в ее традиционной формулировке является то обстоятельство, что подлежащие измерению физические величины выражаются расходящимися интегралами. До сих пор сущность этих трудностей не выяснена. Неизвестно, играют ли здесь роль какие-то неучтенные в теории физические факторы или же расходимость интегралов обусловлена недостатками математической теории. В связи с вышесказанным является небезынтересным строгое математическое исследование встречающихся в теории расходящихся интегралов.

В квантовой теории полей выработан целый ряд методов (см., например, [4, 5]) выделения из расходящихся интегралов конечных частей, которые экспериментально описывают измеряемые величины. Это своеобразные методы «суммирования» расходящихся интегралов. Оказывается, однако, что с точки зрения математической теории расходящихся рядов и интегралов эти методы «суммирования» не выдерживают критики. Расходимость интегралов в квантовой теории поля требует более корректного математического анализа.

В настоящей статье предлагается новый метод суммирования расходящихся рядов, с помощью которого можно суммировать расходящиеся ряды такого типа, как они встречаются в квантовой электродинамике. Этот метод обобщается также на случай расходящихся интегралов, причем указывается, как он может быть использован для суммирования расходящихся интегралов такого типа, какие встречаются в квантовой электродинамике.

## § 1. Не вполне регулярный метод суммирования рядов

Рассмотрим метод суммирования типа последовательность в последовательность $\{t_n\} = A\{s_n\}$, где

$$A=\begin{Vmatrix} \frac{b_1}{1} & 1-b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{b_2}{2} & \frac{b_2}{2} & 1-b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{b_3}{3} & \frac{b_3}{3} & \frac{b_3}{3} & 1-b_3 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{b_n}{n} & \frac{b_n}{n} & \frac{b_n}{n} & \ldots & \frac{b_n}{n} & 1-b_n & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

Здесь $b_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ конкретно не фиксированы, причем $b_n=O(1)$. В частном случае, если $b_n=1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, получим уже известный метод средних арифметических.

Определенный выше метод $A$ является регулярным (см., например, [3], теорема 2). Если в методе $A$ взять $b_n \leqslant 1$ $(n=1,2,3, \ldots)$, то этот метод треуголен и положителен, из чего следует, что метод $A$ также вполне регулярен (см., например, [4], теорема 10).

Положим теперь $b_n>1$ $(n=1,2,3, \ldots)$, тогда имеем опять регулярный треугольный метод, но уже не вполне регулярный (см., например, [3], теорема (10). Ввиду того, что величины $b_n>1$ конкретно не фиксированы, можем их выбрать такими, чтобы расходящийся к бесконечности ряд был суммируемым к произвольно заданному конечному числу.

Пример. Возьмем ряд

$$\sum 1=1+1+1+\ldots$$

и определим величины $b_n$ $(n=1,2,3, \ldots)$ так, чтобы метод $A$ суммировал его к сумме 1.

Действительно, так как здесь $s_n=n$ $(n=1,2,3, \ldots)$, то

$$t_n=\frac{b_n}{n}\cdot 1+\frac{b_n}{n}\cdot 2+\ldots+\frac{b_n}{n}\cdot n+(1-b_n)(n+1)=$$
$$=\frac{1+n}{2}(2-b_n),$$

откуда $\frac{1+n}{2}(2+b_n)=1+\alpha_n$, где $\alpha_n=o(1)$, из чего следует

$$b_n=\frac{2n-2\alpha_n}{n+1}, \quad n=1,2,3, \ldots$$

В частном случае, если $\alpha_n=0$ $(n=1,2,3, \ldots)$, получаем метод

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

(см. [3], стр. 76). Этот метод является регулярным, но не вполне регулярным.

## § 2. Интегральный аналог метода суммирования рядов

Для получения интегрального аналога метода А заметим, что метод средних арифметических и метод А определяются соответственно преобразованиями

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1},$$

$$t_n' = \frac{b_n(s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n)}{n+1} + (1 - b_n) s_{n+1},$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

Соответствующее средним арифметическим интегральное преобразование будет следующим:

$$t(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t)\,dt = \frac{1}{x} \int_0^x (x - t) a(t)\,dt,$$

где

$$s(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^\infty A(x, t) a(t)\,dt; \quad A(x, t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Если $\lim\limits_{x \to \infty} t(x) = s$, то будем говорить, что интеграл $\int_0^\infty a(x)\,dx$ суммируем методом $(C, 1)$ к числу $s$, и писать

$$\int_0^\infty a(x)\,dx = s(C, 1).$$

Перенесем теперь матричный метод $A$ по аналогии на интегралы. Находим

$$t'(x) = \frac{b(x)}{x} \int_0^x s(t)\,dt + [1 - b(x)] \int_0^x a(t)\,dt =$$

$$= \frac{b(x)}{x} \int_0^x (x - t) a(t)\,dt + [1 - b(x)] \int_0^x a(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \left( \frac{(x - t) b(x)}{x} + [1 - b(x)] \right) a(t)\,dt = \frac{1}{x} \int_0^x [x - b(x) t]\, a(t)\,dt,$$

откуда

$$t'(x)=\int_0^x\left[1-\frac{b(x)}{x}t\right]a(t)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^x[x-b(x)t]\,a(t)\,dt.$$

Полученный метод обозначим через $B$. Если $\lim\limits_{x\to\infty}t'(x)=s$, то будем говорить, что интеграл $\int\limits_0^\infty a(x)\,dx$ суммируем методом $B$ к числу $s$, и писать

$$\int_0^\infty a(x)\,dx=s(B).$$

Метод арифметических средних является частным случаем метода $B$ при $b(x)=1$.

Пример. Найдем $b(x)$ так, чтобы $\int\limits_0^x x\,dx=1(B)$.

Для этого должно быть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x[x-b(x)t]\,t\,dt=1.$$

Так как

$$\frac{1}{x}\int_0^x[x-b(x)t]\,t\,dt=\frac{x^2}{2}\left[1-\frac{2}{3}b(x)\right],$$

то получаем

$$\frac{x^2}{2}\left[1-\frac{2}{3}b(x)\right]=1+o(1).$$

Отсюда, в частности, при $o(1)=0$ имеем

$$b(x)=\frac{3x^2-6}{2x^2}.$$

Покажем, что метод $B$ является регулярным. Для этого воспользуемся следующей теоремой Тёплица (см., например, [3], теорема 6). Для того, чтобы интегральное преобразование

$$t(x)=\int_0^\infty c(x,t)\,s(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}\int_0^x c(x,t)\,s(t)\,dt$$

для каждой ограниченной $s(t)$ было регулярным, достаточно, чтобы были выполнены условия:

1° $\int\limits_0^\infty |c(x,t)|\,dt<M$, где $M$ не зависит от $x$;

2° $\int\limits_0^T |c(x,t)|\,dt\to 0$, $(x\to\infty)$, для каждого конечного $T$;

3° $\int\limits_0^\infty c(x,t)\,dt\to 1$, $(x\to\infty)$.

Найдем ядро $c(x,t)$ метода $B$. Для этого нам нужно понятие функций[1] $\delta(t-x)$. Последняя определяется следующим образом: она равна нулю во всех точках, кроме особой точки $t=x$, где обращается в бесконечность, притом так, чтобы интеграл от этой функции по всему промежутку оставался конечным и равнялся единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-x)\,dt = 1.$$

Учитывая, что $\delta$-функция во всех точках, кроме особой, равна нулю, мы можем последнее равенство написать для интервала $(a,b)$, где $a<b$, в виде

$$\int_a^b \delta(t-x)\,dt = \begin{cases} 1, & \text{если } a<x<b, \\ 0, & \text{если } x<a \text{ или } x>b. \end{cases}$$

Точно так же для непрерывной в рассматриваемой области функции $f(x)$ легко получить соотношение:

$$\int_a^b f(t)\,\delta(t-x)\,dt = \begin{cases} f(x), & \text{если } a<x<b, \\ 0\;\;, & \text{если } x<a \text{ или } x>b, \end{cases}$$

(см., например, [2]). Предельные случаи $x=a$ или $x=b$ требуют дополнительного исследования и зависят от конкретной конструкции $\delta$-функции.

Используя $\delta$-функцию, можем соотношение $[1-b(x)]\int_0^x a(t)\,dt$ написать в следующем виде:

$$[1-b(x)]\int_0^x a(t)\,dt = [1-b(x)]\int_0^\infty A(x,t)\,a(t)\,dt =$$
$$= \int_0^\infty [1-b(t)]\,s(t)\,\delta(t-x)\,dt,$$

где

$$s(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^\infty A(x,t)\,a(t)\,dt$$

и

$$A(x,t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant x \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Таким образом, получим

$$\frac{b(x)}{x}\int_0^x s(t)\,dt + [1-b(x)]\int_0^x a(t)\,dt =$$
$$= \int_0^x \left(\frac{b(x)}{x} + [1-b(t)]\,\delta(t-x)\right) s(t)\,dt.$$

Следовательно,

---

[1] Математическое определение $\delta$-функций см., например, в [1].

$$c(x,t)=\begin{cases} \frac{b(x)}{x}+[1-b(t)]\,\delta(t-x), & t\leqslant x,\\ 0, & t>x. \end{cases}$$

Теперь проверим условия теоремы Тёплица.

Условие 1°, ввиду

$$\int_0^\infty |c(x,t)|\,dt=\int_0^x \left|\frac{b(x)}{x}+[1-b(t)]\,\delta(t-x)\right| dt\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{b(x)}{x}x\right|+|1-b(x)|\leqslant 1+2b(x),$$

выполняется, если $b(x)=O(1)$.

Условие $b(x)=O(1)$ влечет за собой и выполнение условия 2°, ибо

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^T |c(x,t)|\,dt=\lim_{x\to\infty}\int_0^T\left|\frac{b(x)}{x}+[1-b(t)]\,\delta(t-x)\right|dt=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{b(x)}{x}\right|T=0,$$

потому что $\int_0^T[1-b(t)]\,\delta(t-x)\,dt=0$ при $x\overline{\in}(0,T)$.

Условие 3° также выполнено ввиду того, что

$$\int_0^\infty c(x,t)\,dt=\int_0^\infty\left(\frac{b(x)}{x}+[1-b(t)]\,\delta(t-x)\right)dt=$$

$$=b(x)+1-b(x)=1.$$

Пример. Известно, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Применим метод $B$ для вычисления этого интеграла. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x[x-b(x)t]\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctan}x-\frac{b(x)}{2x}\ln(1+x^2)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}b(x)\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}b(x)\frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

В ближайшем будущем автор предполагает опубликовать статью, в которой будет дано обобщение рассмотренного здесь метода $B$ на случай конечного числа расходящихся интегралов.

## Литература


1. Гельфанд И. М., Шилов Е. Е., Обобщенные функции и действия над ними. Москва, 1958.
2. Иваненко Д., Соколов А., Классическая теория поля. Москва, 1951.
3. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
4. Pauli, W., Villars, F., On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory. Rev. Mod. Phys., 1949, 21, 434—444.
5. Schwinger, J., Quantum Electrodynamics III. The Electromagnetic Properties of the Electron-Radiative Corrections to Scattering. Phys. Rev., 1949, 76, 790—817.



Поступило
24 II 1965


## ÜHEST INTEGRAALIDE SUMMEERIMISMENETLUSEST


**P. Nuuma**



Resümee

Töös konstrueeritakse mittetäielik regulaarne maatriksmenetlus hajuvate ridade summeerimiseks ja kantakse see menetlus üle hajuvatele integraalidele. Näidatakse samuti, et saadud menetlusest erijuhuna järeldub menetlus $(C, 1)$.


## ÜBER EIN SUMMIERUNGSVERFAHREN FÜR INTEGRALE


**P. Nuuma**



Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel wird ein unvollständiges reguläres Summierungsverfahren für divergente Reihen konstruiert, welches auf in der Physik vorkommende divergente Integrale übertragen wird. Dieses Verfahren enthält das $(C, 1)$-Verfahren.

# НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА — ПЕТРОВА

**Г. Вайникко**

Кафедра математического анализа

Основная цель настоящей заметки — показать, что установленные в [3] достаточные условия устойчивости метода Галеркина — Петрова являются также необходимыми.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H$ уравнение

$$u + Tu = f, \qquad (1)$$

где $T$ — линейный вполне непрерывный оператор. Пусть это уравнение имеет единственное решение $u_0$. Зададимся двумя полными координатными последовательностями[1] $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ и решим уравнение (1) методом Галеркина — Петрова: приближенное решение

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \varphi_k$$

определим из условий

$$(u_n + Tu_n - f,\ \psi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

которые приводят к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (\varphi_k + T\varphi_k,\ \psi_i)\, a_k^{(n)} = (f,\ \psi_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Ниже мы без всяких оговорок будем считать выполненным необходимое и достаточное условие сходимости метода Галеркина — Петрова (см. [1, 2]). А именно, обозначив через $E$ тождественный оператор, через $H_n$ и $H_n'$ подпространства с базисами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ соответственно, а через $P_n$ оператор ортогонального проектирования в подпространство $H_n'$, предположим, что при всех достаточно больших $n$ для любого $v_n \in (E + T) H_n$ имеет место неравенство

$$\|P_n v_n\| \geqslant \tau \|v_n\| \quad (\tau > 0), \qquad (3)$$

---

[1] Как обычно, предполагается, что элементы координатной последовательности, взятые в любом конечном наборе, линейно независимы.

где[2] $\tau$ — постоянная, не зависящая от $n$ и $v_n$. Из этого условия следует, что при достаточно больших $n$ (при $n \geqslant n_0$) система уравнений (2) разрешима единственным образом, и $\|u_n - u_0\| \to 0$ при $n \to \infty$, каков бы ни был свободный член $f \in H$, причем

$$\|u_n\| \leqslant \sigma \|u_0\|, \tag{4}$$

где $\sigma$ — постоянная, не зависящая от $n$ и $f \in H$.

Для установления необходимых условий устойчивости метода Галеркина—Петрова мы должны весьма четко определить понятие устойчивости. Допустим, что при составлении системы уравнений (2) скалярные произведения вычислены с некоторой погрешностью, в результате чего мы вместо системы (2) решаем «неточную» систему

$$\sum_{k=1}^{n} [(\varphi_k + T\varphi_k, \ \psi_i) + \gamma_{ik}]\, a_k^{(n)\prime} = (f, \psi_i) + \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2'}$$

и получаем «неточное» приближение $u_n' = \sum_{k=1} a_k^{(n)\prime} \varphi_k$. Обозначим через $\Gamma_n$ матрицу погрешностей $(\gamma_{ik})$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ и через $\delta^{(n)}$ столбец погрешностей $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$.

Метод Галеркина—Петрова будем называть *устойчивым*, если найдутся такие постоянные $p$, $q$ и $\varrho > 0$, не зависящие от $n$ и свободного члена $f \in H$ уравнения (1), что для всех достаточно больших $n$ $(n \geqslant n_0)$ при $\|\Gamma_n\| \leqslant \varrho$ система уравнений (2′) разрешима, и

$$\|u_n - u_n'\| \leqslant p \|u_0\| \, \|\Gamma_n\| + q \|\delta^{(n)}\|.$$

Здесь и ниже под нормами векторов и матриц понимаются их нормы как элементов и операторов в пространстве $R_n$.

Напомним также понятие сильной минимальности последовательности $\{\varphi_i\}$. Известно, что наименьшие собственные значения $\lambda_1^{(n)}$ $n$-ых вырезов матрицы Грама

$$\Phi_n = (\varphi_i, \varphi_k) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

положительны и образуют невозрастающую последовательность. Значит, существует неотрицательный предел $\lambda_1 = \lim \lambda_1^{(n)}$. Если $\lambda_1 > 0$, т. е. если собственные значения матриц $\Phi_n$ ограничены снизу независящим от $n$ положительным числом $\lambda_1$, то последовательность $\{\varphi_i\}$ называется *сильно минимальной*.

Ортонормируем последовательности $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$:

$$x_i = \sum_{k=1}^{i} c_{ik} \varphi_k \quad (c_{ii} \neq 0), \qquad (x_i, x_j) = (y_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$
$$y_i = \sum_{k=1}^{i} d_{ik} \psi_k \quad (d_{ii} \neq 0),$$

---

[2] Т. е. последовательности $\{(E + T)\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ удовлетворяют условию (А) Н. И. Польского [1, 2]. Отметим, что это равносильно тому, что условию (А) удовлетворяют последовательности $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$.

Введем в рассмотрение треугольные матрицы

$C_n=(c_{ik})$, $D_n=(d_{ik})$ $(i, k=1, 2, \ldots, n;$ $c_{ik}=d_{ik}=0$ при $i<k)$.

**Лемма.** *Если последовательность $\{\varphi_i\}$ сильно минимальна, то нормы $\|C_n\|$ $(n=1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности. Если, наоборот, последовательность $\{\varphi_i\}$ не является сильно минимальной, то нормы $\|C_n\|$ $(n=1, 2, \ldots)$ возрастают неограниченно и монотонно.*

Аналогичное утверждение справедливо для последовательности $\{\psi_i\}$ и норм $\|D_n\|$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Доказательство. При $i, j\leqslant n$ условие $(x_i, x_j)=\delta_{ij}$ записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} \sum_{l=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_l)\overline{c_{jl}}\leqslant\delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

т. е. $C_n\Phi_nC_n^*=I_n$, где $C_n^*=(\overline{c_{ki}})$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ — сопряженная к $C_n$ матрица, а $I_n$ — единичная матрица. Отсюда $\Phi_n^{-1}=C_n^*C_n$, и, следовательно, $\|C_n\|=\sqrt{\|\Phi_n^{-1}\|}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}}$. Теперь утверждения леммы следуют из определения сильной минимальности.

Достаточность следующей теоремы установлена в [3]. Мы устанавливаем необходимость и одновременно упрощаем доказательство достаточности.

**Теорема.** *Для устойчивости метода Галеркина—Петрова необходимо и достаточно, чтобы координатные последовательности $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ были сильно минимальными.*

Доказательство. Обозначим через $C_n'$ матрицу, получаемую транспонированием матрицы $C_n$, а через $\overline{D_n}$ матрицу, получаемую из $D_n$ заменой его элементов комплексно-сопряженными. Введем, далее, обозначения:

$$A_n=(\varphi_k+T\varphi_k, \psi_i)_{i,k=1}^{n}, \qquad f^{(n)}=((f, \psi_1), (f, \psi_2), \ldots, (f, \psi_n)),$$
$$a^{(n)}=(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}), \qquad a^{(n)\prime}=(a_1^{(n)\prime}, a_2^{(n)\prime}, \ldots, a_n^{(n)\prime}),$$
$$b^{(n)}=(C_n')^{-1}a^{(n)}=(b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots, b_n^{(n)}),$$
$$b^{(n)\prime}=(C_n')^{-1}a^{(n)\prime}=(b_1^{(n)\prime}, b_2^{(n)\prime}, \ldots, b_n^{(n)\prime}).$$

Для элементов $u_n$ и $u_n-u_n'$ получаем выражения:

$$u_n=\sum_{i=1}^{n} b_i^{(n)}x_i, \quad u_n-u_n'=\sum_{i=1}^{n} (b_i^{(n)}-b_i^{(n)\prime})x_i. \tag{5}$$

Действительно, имеем $a^{(n)}=C_n'b^{(n)}$ и

$$u_n=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)}\varphi_k=\sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} c_{ik}b_i^{(n)})\varphi_k=\sum_{i=1}^{n} b_i^{(n)} \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k=\sum_{i=1}^{n} b_i^{(n)}x_i.$$

Справедливость второго из равенств (5) проверяется аналогично.

Системы уравнений (2) и (2′) запишутся в виде

$$A_n a^{(n)} = f^{(n)}, \quad (A_n + \Gamma_n) a^{(n)\prime} = f^{(n)} + \delta^{(n)},$$

или в виде

$$\bar{D}_n A_n C_n' b^{(n)} = \bar{D}_n f^{(n)}, \quad (\bar{D}_n A_n C_n' + \bar{D}_n \Gamma_n C_n') b^{(n)\prime} = \bar{D}_n (f^{(n)} + \delta^{(n)}),$$

откуда

$$(\bar{D}_n A_n C_n' + \bar{D}_n \Gamma_n C_n')\,(b^{(n)} - b^{(n)\prime}) = \bar{D}_n \Gamma_n C_n' b^{(n)} - \bar{D}_n \delta^{(n)}. \quad (6)$$

Покажем, что при $n \geqslant n_0$ для любого вектора $c^{(n)} \in R_n$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{M} \|c^{(n)}\| \leqslant \|\bar{D}_n A_n C_n' c^{(n)}\| \leqslant (1 + \|T\|) \|c^{(n)}\|, \quad (7)$$

где $M = \frac{\|(E+T)^{-1}\|}{\tau}$, а $\tau$ — постоянная, введенная условием (3).

Действительно, $\bar{D}_n A_n C_n' = (x_k + T x_k,\ y_i)_{i,k=1}^{n}$ и, принимая во внимание ортонормированность последовательности $\{y_i\}$,

$$\|\bar{D}_n A_n C_n' c^{(n)}\| = [\sum_{i=1}^{n} | \sum_{k=1}^{n} (x_k + T x_k,\ y_i)\, c_k^{(n)}|^2]^{1/2} =$$

$$= [\sum_{i=1}^{n} | ((E+T) \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k,\ y_i)|^2]^{1/2} = \|P_n (E+T) \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k\|.$$

Ввиду ортонормированности последовательности $\{x_k\}$,

$$\|P_n(E+T) \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k\| \leqslant (1 + \|T\|) \|\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k\| = (1 + \|T\|)\|c^{(n)}\|.$$

С помощью условия (3) получаем так же просто и обратное неравенство

$$\|P_n(E+T) \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k\| \geqslant \tau \|(E+T) \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\tau}{\|(E+T)^{-1}\|} \|\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k\| = \frac{1}{M} \|c^{(n)}\|,$$

что завершает доказательство соотношений (7).

Достаточность. Пусть координатные последовательности $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ сильно минимальны. По лемме

$$\|C_n'\| = \|C_n\| \leqslant c = \text{const}, \quad \|\bar{D}_n\| = \|D_n\| \leqslant d = \text{const}$$
$$(n = 1, 2, \ldots),$$

и при $\|\Gamma_n\| \leqslant \frac{1}{2Mcd} = \varrho$ имеем $\|\bar{D}_n \Gamma_n C_n'\| \leqslant \frac{1}{2M}$. Так как, с другой стороны, из (7) вытекает, что $\|(\bar{D}_n A_n C_n')^{-1}\| \leqslant M$, то по известной теореме матрица $\bar{D}_n A_n C_n' + \bar{D}_n \Gamma_n C_n'$ обратима (и, следовательно, определитель системы (2′) отличен от нуля), причем

$$\|(\bar{D}_n A_n C_n' + \bar{D}_n \Gamma_n C_n')^{-1}\| \leqslant 2M \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Теперь из (6) с помощью (5) находим, что

$$\|u_n - u_n'\| = \|b^{(n)} - b^{(n)\prime}\| \leqslant 2M(cd\|u_n\| \, \|\Gamma_n\| + d\|\delta^{(n)}\|).$$

Это неравенство с учетом соотношения (4) и устанавливает устойчивость метода Галеркина—Петрова.

Необходимость. Допустим сначала, что сильно минимальной не является координатная последовательность $\{\psi_i\}$. Положив $\Gamma_n = 0$, из (6) получаем, что

$$b^{(n)} - b^{(n)\prime} = -(\bar{D}_n A_n C_n')^{-1} \bar{D}_n \delta^{(n)},$$

откуда, в силу (7),

$$\|b^{(n)} - b^{(n)\prime}\| \geqslant \frac{1}{1 + \|T\|} \|\bar{D}_n \delta^{(n)}\|.$$

По лемме последовательность $\|D_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ неограниченно возрастает. Выберем $\delta^{(n)}$ так, чтобы $\|\bar{D}_n \delta^{(n)}\| = \|\bar{D}_n\| \, \|\delta^{(n)}\|$. Тогда

$$\|u_n - u_n'\| = \|b^{(n)} - b^{(n)\prime}\| \geqslant \frac{\|D_n\|}{1 + \|T\|} \|\delta^{(n)}\|, \qquad \|D_n\| \to \infty,$$

т. е. метод Галеркина—Петрова неустойчив. Подчеркиваем, что неустойчивость обнаружена при любом $f \in H$.

Несколько менее удобно доказывать необходимость сильной минимальности последовательности $\{\varphi_i\}$. Допустим, что она не является сильно минимальной. Ниже мы укажем такую последовательность матриц погрешностей $\Gamma_n$ ($\|\Gamma_n\| \to 0$ при $n \to \infty$) и такую последовательность свободных членов $f_n$ уравнения (1) (или, что то же самое, такую последовательность решений $u_0$), что для соответствующих приближений $u_n$ и $u_n'$

$$\|u_n - u_n'\| \geqslant \alpha \|u_0\| \, \|C_n\| \, \|\Gamma_n\| \qquad (\alpha = \text{const}, \ \alpha > 0). \tag{8}$$

Ввиду леммы $\|C_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$, и неустойчивость метода Галеркина—Петрова будет этим установлена.

Если решение уравнения (1) имеет вид $u_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(n)} x_k$, то оно совпадает с приближенным решением $u_n$. Положим $u_0 = u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{b}_k^{(n)} x_k$, где $\tilde{b}^{(n)}$ — нормированный вектор, такой, что $\|C_n' \tilde{b}^{(n)}\| = \|C_n\|$. Матрица $\Gamma_n$ пусть сопоставляет вектору $\tilde{a}^{(n)} =$

$=C_n'\tilde{b}^{(n)}$ вектор $(1, 0, \ldots, 0)$. Матрица $\Gamma_n$ будет однозначно заданной, если мы, кроме того, потребуем, чтобы она любому вектору, ортогональному к $\tilde{a}^{(n)}$, сопоставляла нулевой вектор; и тогда будем иметь

$$\|\Gamma_n\| = \frac{1}{\|C_n\|}. \tag{9}$$

Мы не ограничиваем общности, предполагая, что последовательность $\{\psi_i\}$ сильно минимальна, так как в противном случае неустойчивость метода Галеркина—Петрова уже установлена. По лемме $\|\bar{D}_n\| \leqslant d = \text{const}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и, ввиду (9), $\|\bar{D}_n\Gamma_n C_n'\| \leqslant d$. Стало быть, при $n \geqslant n_0$ из (7) вытекает, что

$$\|\bar{D}_n A_n C_n' + \bar{D}_n \Gamma_n C_n'\| \leqslant 1 + \|T\| + d.$$

Положив в (6) $\delta^{(n)} = 0$, находим, что

$$\|\tilde{b}^{(n)} - \tilde{b}^{(n)\prime}\| \geqslant \frac{1}{1 + \|T\| + \mathrm{d}} \|\bar{D}_n \Gamma_n C_n' \tilde{b}^{(n)}\|.$$

По построению $\bar{D}_n \Gamma_n C_n' \tilde{b}^{(n)} = (d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{n1})$ и $\|u_0\| = 1$. Значит, $\|\bar{D}_n \Gamma_n C_n' \tilde{b}^{(n)}\| \geqslant |d_{11}| \, \|u_0\|$, и, учитывая (9),

$$\|u_n - u_n'\| = \|\tilde{b}^{(n)} - \tilde{b}^{(n)\prime}\| \geqslant \frac{|d_{11}| \, \|u_0\|}{1 + \|T\| + \mathrm{d}} = \frac{|d_{11}| \, \|C_n\| \, \|u_0\|}{1 + \|T\| + \mathrm{d}} \|\Gamma_n\|.$$

Мы пришли к последовательности неравенств типа (8), и доказательство теоремы завершено.

Отметим, что координатные последовательности $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ в некоторой степени разным образом влияют на устойчивость или неустойчивость метода. Выше мы видели, что когда последовательность $\{\psi_i\}$ не является сильно минимальной, неустойчивость метода Галеркина—Петрова обнаруживается при любом свободном члене $f \in H$ уравнения (1). Не всегда так обстоит дело в случае, когда сильно минимальной не является последовательность $\{\varphi_i\}$; здесь неустойчивость метода обнаруживается лишь в смысле вышеприведенного определения устойчивости рассмотрением всех свободных членов $f \in H$. В подтверждение этого факта приведем следующий простой пример.

Пусть $T = 0$, $\varphi_k = \frac{x_k}{k}$, $\psi_k = k x_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $\{x_k\}$ — ортонормированная последовательность. Равенство (6) запишем в виде

$$(I_n + \Gamma_n) C_n (b^{(n)} - b^{(n)\prime}) = \Gamma_n C_n b^{(n)} - \delta^{(n)},$$

откуда

$$b^{(n)} - b^{(n)\prime} = C_n^{-1} (I_n + \Gamma_n)^{-1} (\Gamma_n C_n b^{(n)} - \delta^{(n)}).$$

В качестве $C_n$ имеем диагональную матрицу с диагональными элементами $1, 2, \ldots, n$, и при $\|\Gamma_n\| < 1$ находим, что

$$\|u_n - u_n'\| = \|b^{(n)} - b^{(n)\prime}\| \leqslant \frac{1}{1-\|\Gamma_n'\|}\left(\|C_n b^{(n)}\|\,\|\Gamma_n\| + \|\delta^{(n)}\|\right).$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(f, x_k)|^2 k^2 < \infty$, то, как легко видеть, нормы $\|C_n b^{(n)}\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности. Итак, при всех $f \in H$, удовлетворяющих указанному условию, приближение $u_n$ ведет себя устойчиво, несмотря на то, что координатная последовательность $\{\varphi_k\}$ не является сильно минимальной.

Автор искренне благодарен С. Г. Михлину за постановку вопроса.

## Литература


1. Польский Н. И., О сходимости некоторых приближенных методов анализа. Укр. матем. ж., 1955, 7, № 1, 56—70.
2. Польский Н. И., Проекционные методы в прикладной математике. Докл. АН СССР, 1962, **143**, 787—790.
3. Яскова Г. Н., Яковлев М. Н., Некоторые условия устойчивости метода Петрова—Галеркина. Тр. матем. ин-та, 1962, **66**, 182—189.


Поступило
8 VII 1964

## TARVILIKUD JA PIISAVAD TINGIMUSED GALJORKIN-PETROVI MEETODI STABIILSUSEKS

G. Vainikko

Resümee

Töös [3] on antud piisavad tingimused Galjorkin-Petrovi meetodi stabiilsuseks. Käesolevas artiklis näidatakse, et need tingimused on teatavas mõttes ka tarvilikud.

## NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR STABILITY OF GALERKIN—PETROV'S METHOD

G. Vainikko

Summary

Sufficient conditions for stability of Galerkin—Petrov's method are given in [3]. In the present paper it is proved that these conditions are also necessary in a certain sense.

# К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

**Г. Вайникко**

Кафедра математического анализа

В настоящей заметке даётся общий вид правильного в смысле Н. И. Польского [2] оператора.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ уравнение

$$Lu = f, \tag{1}$$

где $L$ — линейный ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный оператор $L^{-1}$ (ниже это предположение будет считаться всюду выполненным, не оговаривая этого особо). Уравнение (1) решим методом Бубнова—Галеркина: зададимся проекционно полной [1] в $H$ последовательностью конечномерных подпространств $\{H_n\}$ и определим приближенное решение $u_n \in H_n$ из условия

$$E_n L u_n = E_n f, \tag{2}$$

где $E_n$ — оператор ортогонального проектирования в подпространство[1] $H_n$. Известно [2], что уравнение (2) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\tau_n \equiv \min_{u \in H_n} \frac{\| E_n L u \|}{\| L u \|} > 0;$$

для того, чтобы при любом $f \in H$ последовательность приближенных решений $\{u_n\}$ стремилась к точному решению уравнения (1), необходимо и достаточно [2], чтобы выполнялось условие (условие (А) Н. И. Польского):

$$\tau \equiv \liminf_{n \to \infty} \tau_n > 0. \tag{3}$$

Если (3) выполняется при любой проекционно полной последовательности $\{H_n\}$, то оператор $L$ называется *правильным*. Дру-

[1] Проекционная полнота последовательности $\{H_n\}$ означает, что $E_n u \to u$ при $n \to \infty$, каков бы ни был элемент $u \in H$.

гими словами, оператор $L$ правильный, если метод Бубнова—Галеркина для уравнения (1) приводит к сходящемуся процессу, какова бы ни была проекционно полная последовательность $\{H_n\}$.

Некоторые признаки правильности оператора $L$ установлены в [1, 2]. Отметим наиболее общую теорему [1]: *если существует число $\delta > 0$, такое, что для любой слабо сходящейся к нулю нормированной последовательности $\{v_n\}$ выполняется условие $\liminf\limits_{n\to\infty} |(Lv_n, v_n)| \geqslant \delta$, то оператор $L$ правильный.*

В силу этого признака правильным будет, например, оператор $L = E + S + T$, где $E$ — тождественный оператор, $S$ — оператор с нормой $\|S\| < 1$, а $T$ — вполне непрерывный оператор. Действительно, из условия $v_n \dashrightarrow 0$ ($\|v_n\| = 1$) и вполне-непрерывности оператора $T$ следует, что $\|Tv_n\| \to 0$, поэтому $\liminf\limits_{n\to\infty} |(Lv_n, v_n)| \geqslant 1 - \|S\| > 0$.

Можно было ожидать, что класс правильных операторов значительно шире класса операторов указанного вида. Оказывается, однако, что это не так.

**Теорема 1.** *Оператор $L$ правильный тогда и только тогда, когда существуют постоянная $a \neq 0$, оператор $S$ с нормой $\|S\| < 1$ и вполне непрерывный оператор $T$ такие, что*

$$aL = E + S + T. \tag{4}$$

Доказательство достаточности имеется в проведенных выше рассмотрениях (легко построить и прямое доказательство, не использующее результата [1]). Доказательство необходимости получаем как непосредственное следствие из устанавливаемых ниже теорем 2 и 3.

**Теорема 2.** *Пусть не существует постоянной $a$, оператора $S$ с нормой $\|S\| < 1$ и вполне непрерывного оператора $T$, таких, чтобы имело место представление* (4). *Тогда найдется слабо сходящаяся к нулю нормированная последовательность $\{v_n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} (Lv_n, v_n) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую проекционно полную в $H$ последовательность конечномерных подпространств $\{H_n\}$, а также последовательность подпространств $\{H^{(n)}\}$, где $H^{(n)} = H \ominus H_n$ — ортогональное дополнение к $H_n$. Операторы $E_n$ и $E^{(n)} = E - E_n$ будут операторами ортогонального проектирования в подпространства $H_n$ и $H^{(n)}$ соответственно.

Если при некоторых $n$ и $a$ было бы $\|(aL - E)E^{(n)}\| < 1$, то, представив оператор $L$ в виде

$$aL = E + (aL - E)E^{(n)} + (aL - E)E_n,$$

мы пришли бы к противоречию с условиями теоремы: норма оператора $S = (\alpha L - E)E^{(n)}$ меньше единицы, а оператор $T = (\alpha L - E)E_n$ вполне непрерывен как конечномерный оператор. Значит, при всех $n$ и $\alpha$ имеем $\|(\alpha L - E)E^{(n)}\| \geqslant 1$, и существует такой элемент $u = u(n, \alpha)$, что

$$\|(\alpha L - E)E^{(n)}u\|^2 \geqslant \left(1 - \frac{|\alpha|^2}{\|L^{-1}\|^2}\right)\|u\|^2.$$

Поскольку $\|u\| \geqslant \|E^{(n)}u\|$, то мы можем считать, что $u \in H^{(n)}$. Считая, кроме того, что $\|u\| = 1$, усилим наше неравенство следующим образом:

$$\|\alpha Lu - u\|^2 \geqslant 1 - |\alpha|^2\|Lu\|^2 \qquad (u \in H^{(n)},\ \|u\| = 1). \tag{5}$$

Дальнейшие рассуждения несколько расходятся в случаях вещественного и комплексного пространства $H$. Мы здесь останавливаемся только на более сложном случае, когда пространство $H$ комплексное.

Введем в рассмотрение множество численных значений $\Omega_n$ оператора $L$ (оператора $E^{(n)}L$) в пространстве $H^{(n)}$, т. е. множество комплексных чисел, которые принимает форма $(Lu, u) = (E^{(n)}Lu, u)$ на единичной сфере $\|u\| = 1$ пространства $H^{(n)}$. Известно [3], что множество численных значений — выпуклое множество. Выпуклым будет тогда и замыкание $[\Omega_n]$.

Мы утверждаем, что на любой прямой, проходящей через нуль комплексной плоскости, находится хотя бы одна точка множества $[\Omega_n]$. Допустим противное, что на некоторой прямой $\operatorname{Im} z - \xi \operatorname{Re} z = 0$ (здесь $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ — комплексная переменная, $\xi$ — вещественное число) нет точек множества $[\Omega_n]$. Тогда, ввиду выпуклости $[\Omega_n]$, это множество расположится в одну сторону (выше или ниже) от указанной прямой на некотором положительном расстоянии. Покажем, что это противоречит неравенству (5).

Действительно, положив $\operatorname{Re} \alpha = \xi \operatorname{Im} \alpha$, запишем неравенство (5) в виде

$$\operatorname{Im} \alpha[(1 + \xi^2)\|Lu\|^2 \operatorname{Im} \alpha + \operatorname{Im}(Lu, u) - \xi \operatorname{Re}(Lu, u)] \geqslant 0. \tag{5'}$$

Значит, при $\operatorname{Im} \alpha > 0$ должно быть

$$\operatorname{Im}(Lu, u) - \xi \operatorname{Re}(Lu, u) \geqslant -(1 + \xi^2)\|Lu\|^2 \operatorname{Im} \alpha \geqslant \\ \geqslant -(1 + \xi^2)\|L\|^2 \operatorname{Im} \alpha.$$

Здесь $(Lu, u) \in \Omega_n$ (см. (5)); устремив $\operatorname{Im} \alpha$ к нулю, видим, что множество $[\Omega_n]$ может располагаться только выше прямой $\operatorname{Im} z - \xi \operatorname{Re} z = 0$. Но, с другой стороны, при $\operatorname{Im} \alpha < 0$ из (5') вытекает, что

$$\operatorname{Im}(Lu, u) - \xi \operatorname{Re}(Lu, u) \leqslant (1 + \xi^2)\frac{1}{\|L^{-1}\|^2}(-\operatorname{Im} \alpha),$$

а это при малых по абсолютной величине $\operatorname{Im} \alpha$ противоречит условию, что $[\Omega_n]$ располагается выше прямой $\operatorname{Im} z - \xi \operatorname{Re} z = 0$ на положительном расстоянии от этой прямой. Аналогично приводит к противоречию допущение, что точек множества $[\Omega_n]$, нет на прямой $\operatorname{Re} z = 0$: в (5) нужно положить $\operatorname{Im} \alpha = 0$.

Итак, наше промежуточное утверждение доказано: на любой прямой, проходящей через нуль комплексной плоскости, имеется хотя бы одна точка множества $[\Omega_n]$. Отсюда с помощью элементарных соображений, использующих выпуклость множества $[\Omega_n]$, заключаем, что и сам нуль комплексной плоскости принадлежит $[\Omega_n]$. Это позволяет при каждом $n$ выбрать нормированный элемент $v_n \in H^{(n)}$ так, чтобы $|(Lv_n, v_n)| < \frac{1}{n}$, и тогда для последовательности $\{v_n\}$ имеем $(Lv_n, v_n) \to 0$. Далее, вследствие проекционной полноты последовательности подпространства $\{H_n\}$, для любого $u \in H$ имеем $|(u, v_n)| = |(u, E^{(n)}v_n)| = |(E^{(n)}u, v_n)| \leqslant \|E^{(n)}u\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $v_n \dashrightarrow 0$. Таким образом, последовательность $\{v_n\}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы. Теорема 2 доказана.

Следующая теорема является обращением сформулированной выше теоремы работы [1].

**Теорема 3.** *Если существует слабо сходящаяся к нулю нормированная последовательность* $\{v_n\}$, *такая, что* $\lim (Lv_n, v_n) = 0$, *то* $L$ *не является правильным оператором.*

Доказательство. Элементы $v_n$ и $Lv_n$ при достаточно большом $n$ линейно независимые. Действительно, из условий $Lv_n - \gamma_n v_n = 0$ и $(Lv_n, v_n) \to 0$ (где $\|v_n\| = 1$) следует, что $\gamma_n \to 0$, а это противоречит ограниченности оператора $L^{-1}$. Ортонормальным базисом двумерного подпространства, натянутого на элементы $v_n$ и $Lv_n$, будут, например, элементы $v_n$ и $w_n$, где

$$w_n = \frac{Lv_n - (Lv_n, v_n)v_n}{\|Lv_n - (Lv_n, v_n)v_n\|}.$$

Из допущения $v_n \dashrightarrow 0$ вытекает также, что $w_n \dashrightarrow 0$: для любого $u \in H$ имеем

$$|(u, w_n)| \leqslant \frac{|(u, Lv_n)| + |(Lv_n, v_n)|\,|(u, v_n)|}{\|Lv_n\| - |(Lv_n, v_n)|} \to 0,$$

так как $(u, v_n) \to 0$, $(u, Lv_n) = (L^*u, v_n) \to 0$, $\|Lv_n\| \geqslant \frac{1}{\|L^{-1}\|}$ и $(Lv_n, v_n) \to 0$.

Обозначим через $H'_n$ ортогональное дополнение к указанному двумерному подпространству, а через $E'_n$ — оператор ортогонального проектирования в подпространство $H'_n$. Ввиду соотношений $v_n \dashrightarrow 0$, $w_n \dashrightarrow 0$ для любого $u \in H$ имеем

$$E'_n u = u - (u, v_n)v_n - (u, w_n)w_n \to u,$$

т. е. последовательность подространтсв $\{H'_n\}$ проекционно полная. Выберем теперь конечномерные подпространства $H''_n \subset H'_n$ так, чтобы последовательность $\{H''_n\}$ сохранила проекционную полноту (возможность такого выбора легко доказывается). Обозначим, наконец, через $H_n$ линейную оболочку элемента $v_n$ с подпространством $H''_n$. Очевидно, что последовательность конечномерных подпространств $\{H_n\}$ остается проекционно полной.

Покажем, что для построенной последовательности $\{H_n\}$ не удовлетворяется условие (3). По построению элементы $v_n \in H_n$ и $Lv_n$ ортогональны к $H''_n \subset H_n$, поэтому $E_nLv_n = (Lv_n, v_n)v_n$ и

$$\tau_n \equiv \min_{u \in H_n} \frac{\|E_nLu\|}{\|Lu\|} \leqslant \frac{\|E_nLv_n\|}{\|Lv_n\|} = \frac{|(Lv_n, v_n)|}{\|Lv_n\|} \leqslant \|L^{-1}\| \, |(Lv_n, v_n)|.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$, т. е. условие (3) не выполняется. Оператор $L$, таким образом, не является правильным, и теорема 3 доказана.

Вместе с тем завершено доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 вытекает, что два оператора $L_1$ и $L_2$ образуют правильную пару [2] тогда и только тогда, когда для оператора $L_2^*L_1$ имеет место представление

$$aL_2^*L_1 = E + S + T,$$

где $a = \text{const}$, $\|S\| < 1$, $T$ — вполне непрерывный оператор, а $L_2^*$ — оператор, сопряженный к $L_2$.

## Литература


1. Медведев В. А., О сходимости метода Бубнова—Галеркина. Прикл. матем. и механ., 1963, 27, 1148—1151.
2. Польский Н. И., Проекционные методы в прикладной математике. Докл. АН СССР, 1962, 143, 787—790.
3. Stone, M. H., Linear Transformations in Hilbert Space and their Application to Analysis. New York, 1932.



Поступило
26 II 1965


## GALJORKINI MEETODI KOONDUMISEST


G. Vainikko



Resümee

Olgu $L$ ja $L^{-1}$ lineaarsed tõkestatud operaatorid Hilberti ruumis $H$. Öeldakse, et operaator $L$ on korrapärane [2], kui Galjorkini meetod (2) võrrandi (1) jaoks koondub iga täieliku koordinaatjada (või, üldisemalt, iga projektsiooniliselt täieliku [2] lõplikudimensionaalsete alamruumide jada $\{H_n\}$)

korral. Käesolevas artiklis näidatakse, et $L$ on korrapärane siis ja ainult siis, kui ta on esitatav kujul (4), kus $\alpha = \text{const}$, $E$ on ühikoperaator, $S$ on operaator normiga $\|S\| < 1$ ja $T$ on täielikult pidev operaator.

## ABOUT CONVERGENCE OF GALERKIN'S METHOD

G. Vainikko

Summary

Let $L$ and $L^{-1}$ be linear bounded operators in Hilbert space $H$. Operator $L$ is said to be regular [2] if Galerkin's method (2) for equation (1) converges in case of any complete coordinate sequence (or more generally, in case of any projectively complete [2] sequence of finite-dimensional subspaces $\{H_n\}$). It is shown in the present paper that operator $L$ is regular if and only if $L$ is representable in form (4) where $\alpha = \text{const}$, $E$ is unity operator, $S$ is an operator with norm $\|S\| < 1$ and $T$ is a completely continuous operator.

# О РЕШЕНИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

**Э. Тамме**

Кафедра вычислительной математики

Применение метода конечных разностей для решения интегро-дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов исследовано, например, в [3]. В настоящей заметке рассматривается приближенное решение интегро-дифференциального уравнения эллиптического типа

$$L[u(P)] \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \frac{\partial^2 u(P)}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i(P) \frac{\partial^2 u(P)}{\partial x_i} - c(P) u(P) =$$

$$= F[P,\ u(P),\ \int_D K(P,\ Q) u(Q) dQ] \tag{1}$$

с граничным условием

$$u(P)|_C = \varphi(P), \tag{2}$$

где $D$ — конечная открытая область $n$-мерного эвклидова пространства и $C$ — его граница, а $P = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и $Q = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ — точки этого пространства.

Замкнутую область $D \cup C$ покрываем прямоугольной сеткой с шагом $h_i > 0$ в направлении оси $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Соседними к точке $P = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ сетки назовем точки

$$P_i = (x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i + h_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n) \text{ и}$$

и

$$P'_i = (x_1,\ \ldots, x_{i-1},\ x_i - h_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Внутренними точками сетки назовем такие точки сетки из области $D \cup C$, у которых все $2n$ соседних точек находятся в этой области. Остальные точки сетки из $D \cup C$ назовем граничными. Совокупности внутренних и граничных точек сетки обозначим соответственно через $D_h$ и $C_h$.

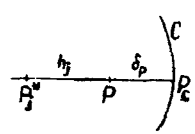
Во внутренних точках сетки $(P \in D_h)$ запишем конечно-разностное уравнение

$$L_h[U(P)] \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\frac{U(P_i)-2U(P)+U(P_i')}{h_i^2}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(P)\frac{U(P_i)-U(P_i')}{2h_i}-c(P)U(P)=$$
$$=F[P,\ U(P),\sum_{Q\in D_h\cup C_h} A(Q)K(P,\ Q)U(Q)], \tag{3}$$

полученное из уравнения (1) путем замены частных производных соответствующими конечными разностями, а интеграла — конечной суммой. В граничных точках сетки ($P \in C_h$) используем линейную интерполяцию в направлении оси $x_j$:

$$U(P)=\frac{1}{h_j+\delta_P}[\delta_P U(P_j^*)+h_j\varphi(P_C)], \tag{4}$$

причем $j$ выбираем так, чтобы расстояние $\delta_P$ до ближайшей к $P$ в направлении оси $x_j$ точки $P_C$ границы $C$ удовлетворяла неравенством $0 \leqslant \delta_P < h_j$, а $P_j^*$ была соседней к $P$ (в направлении той же оси) точкой сетки, т. е. $P_j^* = P_j$ или $P_j^* = P'_j$.




Приближенное решение задачи (1, 2) найдем из системы (3, 4) алгебраических уравнений. Рассмотрим, в каких предположениях для решения системы (3, 4) применим итерационный процесс

$$\left.\begin{aligned} &L_h[U_{m+1}(P)] = F[P,\ U_m(P),\ \sum_Q A(Q)K(P,Q)U_m(Q)],\ P\in D_h,\\ &U_{m+1}(P)-\frac{1}{h_j+\delta_p}[\delta_P U_{m+1}(P_j^*)+h_j\varphi(P_C)]=0, \qquad P\in C_h, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, являющийся аналогом процесса, рассмотренного в [1], гл. 9, § 9, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем следующие предположения:

1° функция $F(P,\ u,\ v)$ в связной области, содержащей точки $(P,\ u(P),\ \int K(P,\ Q)u(Q)dQ)$, соответствующие решению $u(P)$ задачи (1,2) и его приближениям $U_m(P)$, удовлетворяет условию Липшица по $u$ и $v$:

$$|F(P,\ u,\ v)-F(P,\ u^*,\ v^*)| \leqslant M|u-u^*|+N|v-v^*| \quad (P\in D\cup C)$$

2° $$\max_{P\in D_h}\sum_Q |A(Q)K(P,\ Q)| \leqslant \alpha;$$

3° система

$$\left.\begin{aligned} -L_h[v(P)] &= f(P), \qquad P\in D_h,\\ v(P)-\frac{\delta_P}{h_j+\delta_P}v(P_j^*) &= 0, \qquad P\in C_h \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

имеет единственное решение $v(P)$, причем

$$\max_{P\in D_h\cup C_h} |v(P)| \leqslant \gamma \max_{P\in D_h} |f(P)|.$$

Из соотношений (5) получим

$$L_h[U_{m+1}(P) - U_m(P)] = F[P, U_m(P), \sum_Q A(Q)K(P, Q)U_m(Q)] -$$

$$- F[P, U_{m-1}(P), \sum_Q A(Q)K(P, Q)U_{m-1}(Q)], \qquad P \in D_h,$$

$$U_{m+1}(P) - U_m(P) - \frac{\delta_P}{h_j + \delta_P}[U_{m+1}(P_j{}^*) - U_m(P_j{}^*)] = 0, \quad P \in C_h.$$

Из этого, в силу условий 1°—3°, несложным образом вытекает, что

$$\max_{P\in D_h\cup C_h} |U_{m+1}(P) - U_m(P)| \leqslant q \max_{P\in D_h\cup C_h} |U_m(P) - U_{m-1}(P)|,$$

где $q = \gamma(M + \alpha N)$. Но тогда при $q < 1$ последовательность $U_m(P)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ сходится к решению $U(P)$ системы (3, 4) со скоростью

$$\max_{P\in D_h\cup C_h} |U_m(P) - U(P)| \leqslant \frac{q^m}{1-q} \max_{P\in D_h\cup C_h} |U_1(P) - U_0(P)|.$$

Замечание. Если ввести предположения относительно гладкости решения $u(P)$ задачи (1, 2), то при $q < 1$ можно получить (см., например, [2], гл. IV, п. 2.3) также оценку для погрешности

$$\max_{P\in D_h\cup C_h} |U(P) - u(P)|.$$

Главной трудностью при использовании перечисленных условий сходимости итерационного процесса (5) является нахождение постоянной $\gamma$, фигурирующей в предположении 3°. Для получения простых правил вычисления $\gamma$ сделаем некоторые дополнительные предположения.

Пусть при $P \in D_h$ коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют требованиям

$$c(P) \geqslant 0, \quad \frac{1}{2} h^i |b_i(P)| < a_i(P), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда для системы (6) выполнены предположения леммы Коллатца (см. [2], стр. 128), на основании которой эта система имеет единственное решение $v(P)$ и имеет место оценка

$$|v(P)| \leqslant z(P) \max_{Q\in D_h} |f(Q)|,$$

лишь только $z(P)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left.\begin{aligned} -L_h[z(P)] \geqslant 1, \quad & P \in D_h, \\ z(P) - \frac{\delta_P}{h_j + \delta_P} z(P_j^*) \geqslant 0, \quad & P \in C_h. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Таким образом, предположение 3° выполнено при

$$\gamma = \max_{P \in D_h \cup C_h} z(P).$$

Рассмотрим два случая, когда для $z(P)$ и $\gamma$ получаются простые выражения.

а) Пусть

$$\mu \equiv \min_{P \in D_h} c(P) > 0.$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$z(P) = \frac{1}{\mu}$$

удовлетворяет неравенствам (7) и, следовательно, можем взять

$$\gamma = \frac{1}{\mu}.$$

б) Пусть все точки $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества $D_h \cup C_h$ находятся в эллипсоиде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i0})^2}{p_i^2} \leqslant 1$$

(с центром $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ и полуосями $p_1, p_2, \dots, p_n$) и

$$\varkappa \equiv \min_{P \in D_h} \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(P)}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i(P)|}{p_i} + \frac{C(P)}{2} \right] > 0.$$

Непосредственно проверяется (см. также [2], гл. IV, п. 2.3), что

$$z(P) = \frac{1}{2\varkappa} \left[ 2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i0})^2}{p_i^2} \right]$$

удовлетворяет условиям (7), и, следовательно, можно положить

$$\gamma = \frac{1}{\varkappa}.$$

З а м е ч а н и е. Все приведенные результаты остаются верными, если вместо (4) пользоваться аппроксимацией граничного условия:

$$U(P) = \varphi(P_C), \qquad P \in C_h.$$

Тогда только в формулах (5—7) надо положить $\delta_P = 0$. Если при этом в случае б)

$$\varkappa_0 \equiv \min_{P \in D_h} \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(P)}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i(P)|}{p_i} \right] > 0,$$

то можем взять

$$z(P)=\frac{1}{2\varkappa_0}\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i0})^2}{p_i^2}\right] \quad \text{и} \quad \gamma=\frac{1}{2\varkappa_0}.$$

## Литература

1. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II. Москва, 1962.
2. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва, 1953.
3. Douglas, J., Jones, B. F., Numerical Methods for Integro-Differential Equations of Parabolic and Hyperbolic Types. Numer. Math., 1962, **4**, 96—102.

Поступило
10 XII 1964

## ELLIPTILIST TÜÜPI INTEGRO-DIFERENTSIAALVÕRRANDITE LAHENDAMISEST DIFERENTSMEETODIGA

**E. Tamme**

Resümee

Käesolevas artiklis aproksimeeritakse rajaülesanne (1, 2) algebralise võrrandisüsteemiga (3, 4). Viimase lahendamiseks esitatakse iteratsioonimeetod (5) ning antakse selle jaoks piisavad koonduvustingimused.

## ÜBER DIE LÖSUNG DER ELLIPTISCHEN INTEGRO-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MITTELS EINES DIFFERENZVERFAHRENS

**E. Tamme**

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird die Randwertaufgabe (1, 2) mit dem algebraischen Gleichungssystem (3, 4) approximiert. Für die Lösung des Letzten wird die Iterationsmethode (5) dargeboten und für diese werden die hinreichenden Konvergenzbedingungen gegeben.

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОБРАЩЕНИЯ БАЛАНСОВЫХ МАТРИЦ

**Р. Муллари и Ю. Тапфер**

Вычислительный центр

В балансовых расчетах основную роль играют матрицы полных затрат. Эти матрицы $B$, как известно, выражаются через матрицы прямых затрат $A$:

$$B = (E - A)^{-1}.$$

Так как элементы $a_{ij}$ матриц $A$ получаются непосредственно из практики, то нахождение матриц $B$ сводится к обращению матриц $E - A$. Однако порядок $m$ матриц $A$ часто весьма высок, и поэтому обычные алгоритмы обращения матриц оказываются здесь практически непригодными. По причине большой размерности непригодными оказываются также различные оценки сходимости итерационных процессов, опирающиеся на величины собственных значений матриц.

На возможность преодоления трудностей при обращении матриц $E - A$ указывает своеобразие строения матриц $A$, позволяющее разработать специальные методы обращения. Это своеобразие выражается в том, что матрицы $A$ являются стохастическими, т. е. их элементы удовлетворяют соотношениям

$$a_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_i a_{ij} < 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

В частности, при решении системы

$$(E - A)X = У$$

соотношения (1) обеспечивают сходимость $X_n \to X$ простого итерационного процесса

$$X_{n+1} = X_n + (У - У_n), \tag{2}$$

где

$$У_n = (E - A)X_n.$$

При этом, если $У \geqslant 0$ (по всем координатам) и для некоторого $l$ имеет место условие $У \geqslant У_l$, то для каждого $n > l$ имеем

$$У \geqslant У_n, \quad X \geqslant X_n. \tag{3}$$

Сходимость итерационного процесса (2) тем более существенна, что при обращении больших матриц только итерационные методы свободны от опасности накопления ошибок.

Как в этом нетрудно убедиться, обращение матрицы $E - A$ сводится к решению $m$ систем линейных уравнений

$$(E - A) X_j = E_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

где $E_j$ (с элементами $e_j^i$) — $j$-тый столбец единичной матрицы $E$. Решение $X_j$ системы (4) является $j$-тым столбцом искомой матрицы $B$.

Для решения систем (4) можно использовать итерационный процесс (2). Но так как этот процесс в таком виде сходится сравнительно медленно, то приходится каким-то образом ускорить его сходимость.

В силу (3) существуют такие величины $c_{jn} > 1$, что итерационный процесс

$$X_{j,\,n+1} = X_{jn} + c_{jn}(E_j - Y_{jn}), \tag{5}$$

где

$$Y_{jn} = (E - A) X_{jn},$$

сходится быстрее процесса (2). Величины $c_{jn}$ можно определить, например, из уравнения

$$\sum_i y^i_{j,\,n+1} = 1, \tag{6}$$

где $y^i_{j,\,n+1}$ — координаты вектора $Y_{j,\,n+1}$. Однако практически более хорошие результаты давал выбор величин $c_{jn}$, намного превышающих величины, определяемые из уравнения (6).

При таком выборе величин $c_{jn}$, однако, достижение заданной точности

$$\max_i |e_j^i - y_{jn}^i| < \varepsilon$$

задерживается из-за медленной сходимости процесса при некоторых значениях $i$. Поэтому более эффективным итерационный процесс оказывается в виде

$$X_{j,\,n+1} = X_{jn} + C_{jn}(E_j - Y_{jn}), \tag{7}$$

где $C_{jn}$ — диагональная матрица, вообще говоря, с различными элементами диагонали $c_{jn}^i$.

Элементы $c_{jn}^i$ здесь естественно вычислять на основе данных, получаемых в ходе этого же самого итерационного процесса (принцип обратной связи). Например, можно принять

$$c_{jn}^i = c^i_{j,\,n-1} + \frac{e_j^i - y^i_{j,\,n-1}}{e_j^i - y^i_{j,\,n-2}},$$

или, так как не исключена возможность равенства

$$e_j^i - y^i_{j,\,n-2} = 0,$$

$$c_{jn}^i = c^i_{j,\,n-1} + \operatorname{sgn}\,(e_j^i - y^i_{j,\,n-1}) \cdot$$
$$\cdot \operatorname{sgn}\,(e_j^i - y^i_{j,\,n-2}) \cdot \min\left(\left|\frac{e_j^i - y^i_{j,\,n-1}}{e_j^i - y^i_{j,\,n-2}}\right|,\ \alpha\right), \tag{8}$$

где $\alpha$ некоторый параметр.

При таком выборе величин $c_{jn}^i$ на каждом шагу итерационного процесса учитывается результат предшествующего шага: если последний для некоторых координат оказался слишком «коротким», то следующий шаг для тех же координат выбирается более «длинным» и наоборот.

Объем необходимых вычислений при решении систем (4) посредством итерационного процесса (7) существенно зависит от выбора начальных значений для вектора $X_{j0}$ и матрицы $C_{j0}$. Наиболее простым является выбор $X_{j0} = 0$ и $C_{j0} = E$. При этом

$$Y_{j0} = 0,\ X_{j1} = E \text{ и } X_{j2} = E_j + C_{j1}A_j,$$

где $A_j$ — $j$-тый столбец матрицы $A$. Для нахождения матрицы $C_{j1}$ по формулам (8) необходимо определить еще вектор $Y_{j,\,-1}$. При выборе

$$Y_{j,\,-1} = E_j$$

получается

$$C_{j1} = (1 + \alpha)E,$$

где $(1 + \alpha)E$ — диагональная матрица с элементами диагонали $1 + \alpha$, и $X_{j2}$ принимает вид

$$X_{j2} = E_j + (1 + \alpha)EA_j.$$

Более хорошие результаты может дать начальный выбор

$$X_{j0} = E_j + G_jA_j,$$

где $G_j$ — некоторая диагональная матрица, элементы диагонали $g_j^i$ которой вычисляются по формулам

$$g_j^i = 1 + l(1 - a_{ij})^k,$$

где $l$ и $k$ — параметры. Матрица $C_{j0}$ выбирается в виде $c_{j0} = sE$, где $s$ — также параметр. В качестве вектора $Y_{j,\,-1}$ выбирается вектор

$$Y_{j,\,-1} = (E - A)_j.$$

Если теперь фиксировать значения параметров $l$, $k$, $s$ и $\alpha$, то можно начинать итерационный процесс по формулам (7) и (8).

Такой метод обращения матрицы $E - A$ содержит множество параметров $M = \{\alpha, k, l, s\}$. Обозначим через $z = z_\varepsilon(M_j, A)$ объем вычислений при решении системы (4) с требуемой точностью $\varepsilon$. Весь объем вычислений $Z$ при обращении матрицы $E - A$ равен тогда $Z_\varepsilon(M, A) = \sum_j z_\varepsilon(M_j, A)$. Если при заданной матрице $A$ и выборе параметров $M_j$ требуемая точность $\varepsilon$ не достигается (итерационный процесс не сходится в $\varepsilon$-окрестности), то $z_\varepsilon(M_j, A) = \infty$.

Чтобы оценить пригодность описанного метода, необходимо изучить функцию $z_\varepsilon(M_j, A)$. Область $U(A)$ применимости метода определяется условием существования при заданных матрице $A$ и величине $\varepsilon$ такого набора параметров $M_j^0$, чтобы $z_\varepsilon(M_j^0, A) < \infty$ (здесь не обязательно требовать, чтобы были выполнены соотношения (1)). Особое значение имеет нахождение оптимальной комбинации параметров $M_j^*$, таких, чтобы

$$z_\varepsilon(M_j^*, A) = \min_{M_j} z_\varepsilon(M_j, A).$$

Матрица $A$ определяется $m^2$ величинами, где $m$ предполагается относительно большим. Поэтому функцию $z_\varepsilon(M_j, A)$ естественно предполагать непригодной для практических вычислений (т. е. для определения $U(A)$, значений параметров $M_j^*$ и др.). Отсюда следует необходимость придания функции $z_\varepsilon(M_j, A)$ некоторых упрощающих оценок, зависящих от меньшего числа аргументов. С этой целью выбираем относительно небольшое количество легко вычисляемых показателей $R = R(A)$, в некоторой мере характеризующих строение матрицы $A$. При подходящем выборе показателей $R$ различным встречающимся в практике матрицам $A$ и $A'$, для которых значения показателей $R$ и $R'$ совпадут, как соответствующие объемы вычислительных работ $Z_\varepsilon(M, A)$ и $Z_\varepsilon(M, A')$, так и значения оптимальных параметров $M_j^*$ и $M'_j{}^*$ будут сравнительно мало отличаться друг от друга.

Если учесть множество $V$ всех встречающихся на практике матриц прямых затрат $A$, то при каждом конкретном задании значений показателей $R$ и параметров $M_j$ можно в принципе с достаточной точностью определить средний объем вычислительных работ

$$Z_\varepsilon(M, R) = \sum_j z_\varepsilon(M_j, R).$$

На основе вышесказанного определяются средние значения оптимальных комбинаций параметров $M_j(R)$, такие, что

$$z_\varepsilon(M_j^*, R) = \min_{M_j} z_\varepsilon(M_j, R).$$

Мы не допустим большой ошибки, если для всех $A \in V$ будем предполагать

$$z_\varepsilon(M_j, R) \approx z_\varepsilon(M_j, A),$$
$$M_j^{*R} \approx M_j^{*A}.$$

Фактическое приближенное определение функции $z_\varepsilon(M_j, R)$ может быть проведено методом статистических испытаний. Но для этого пришлось бы при различных значениях параметров $M$ обращать большое количество матриц $E - A$, соответствующих различным значениям показателей $R$, т. е. провести в варьирующихся условиях большое количество опытов. Приближенные выражения для функции $Z_\varepsilon(M, R)$ получаются в результате обработки опытных данных.

Однако, так как в нашем распоряжении не имеется достаточного количества матриц $A$, а непосредственное их получение из практики связано с большой затратой труда и с потерей времени, естественно составить для проведения опытов на ЭВМ «искусственные» матрицы прямых затрат $A$ с помощью случайных чисел. При этом законы распределения упомянутых случайных чисел необходимо выбирать такими, чтобы множество «искусственных» матриц $A$ не являлось в некотором смысле особым по сравнению с множеством матриц $A \in V$. Это достигается статистическим изучением строения матриц $A \in V$. Мы предполагаем, что для такого изучения достаточно намного меньшего количества матриц $A \in V$, чем для приближенного определения функции $z_\varepsilon(M_j, R)$. Если при составлении матриц $A$ выбрать различные законы распределения случайных чисел, то получение функции $z_\varepsilon(M_j, R)$ возможно при обращении не только балансовых матриц.

При определении показателей $R$ необходимо следить за тем, чтобы они достаточно хорошо характеризовали строение матрицы $A$ и в то же время были легко вычисляемыми. Набор показателей $R$ предполагается следующим:

$$r_1 = m, \qquad r_2 = \frac{1}{m} \sum_i \sum_j a_{ij}, \qquad r_3 = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2},$$

$$r_4 = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_j \left(\sum_i a_{ij}\right)^2}, \qquad r_5 = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_i \left(\sum_j a_{ij}\right)^2},$$

$$r_6 = \sum_i a_{ij}, \qquad r_7 = \sqrt{m} \sqrt{\sum_i a_{ij}^2}.$$

Сравнительно грубое представление о пригодности описанного метода дают проведенные до сих пор вычисления. Указанным методом определено несколько матриц полных затрат (порядков 29 и 150) межотраслевого баланса в Прибалтийских республиках. В первом случае требовалось в среднем 4—5 итерационных шагов, во втором случае 6—8 шагов, причем была достигнута точность $\varepsilon = 0{,}001$. Обращение матриц 150-го порядка на ЭВМ «Урал-4» требовало в среднем 12 часов машинного времени.

Необходимо учесть, что выбор параметров $M_j$ был довольно случайным. Поэтому можно утверждать, что при более удачном выборе параметров рассматриваемый метод может дать более точные результаты.

Поступило
22 IV 1965

## ÜHEST BILANSIMAATRIKSITE PÖÖRAMISE MEETODIST

**R. Mullari ja J. Tapfer**

Resümee

Töös esitatakse iteratsioonimeetod kujul (7), kus $X_{j,\,n+1}$ — $j$-nda veeru $(n+1)$-ne lähend, $E_j$ — ühikmaatriksi $j$-s veerg, $Y_{jn} = (E-A)X_{jn}$ ja $C_{jn}$ — diagonaalmaatriks peadiagonaali elementidega $c^i_{jn}$, mis arvutatakse valemi (8) põhjal.

Tuuakse meetodi edasise täiustamise ja uurimise põhimõtteline kirjeldus.

## ON AN INVERSION METHOD OF ECONOMICS MATRICES

**R. Mullari and J. Tapfer**

Summary

The iteration method is presented in the form (7), where $X_{j,\,n+1}$ — the $(n+1)$-th approximation of the $j$-th column of the inversion, $E_j$ — the $j$-th column of the unit matrix, $Y_{jn} = (E-A)X_{jn}$ and $C_{jn}$ — diagonal matrix with elements of the main diagonal $c^i_{jn}$ given by formula (8).

A description in principle of the further accomplishment and investigation of the method are given.

# О ПРЕДСТАВИМОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ $\gamma[\alpha(x)\beta(y)]$

**А. Хвостов**

Ленинградский педагогический институт

Рассмотрим на квадрате $[a, b; a, b]$ множество функций двух переменных вида

$$\gamma[\alpha(x)\beta(y)], \qquad (1)$$

где $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(y)$ и $\gamma=\gamma(z)$ — непрерывные функции.

Пусть

$$E(f) = \inf_{\gamma,\alpha,\beta} \sup_{x,y} |f(x,y) - \gamma[\alpha(x)\beta(y)]|.$$

В этой заметке доказывается, что существуют:

а) непрерывные функции $f(x, y)$ такие, что $E(f) > 0$;

б) непрерывные функции $f(x, y)$ такие, что $E(f) = 0$, но тем не менее не представимые в виде (1).

Эти результаты получены В. И. Арнольдом [1] на более узком множестве функций вида

$$\chi[\varphi(x) + \psi(y)] \qquad (2)$$

с непрерывными $\varphi$, $\psi$ и $\chi$.

При доказательстве использован ряд результатов В. И. Арнольда из работы [1].

**1.** Сначала докажем, что множество функций вида (1) шире, чем множество функций вида (2). Возьмем любую функцию $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$ из множества (2). Имеем

$$\chi[\varphi(x)+\psi(y)] = \chi[\ln e^{\varphi(x)+\psi(y)}] = \chi\{\ln [e^{\varphi(x)} e^{\psi(y)}]\} = \gamma[\alpha(x)\beta(y)],$$

где $\alpha(x) = e^{\varphi(x)}$, $\beta(y) = e^{\psi(y)}$ и $\gamma(z)$ — непрерывные функции, то есть эта функция входит в множество (1). Следовательно, множество (1) не у́же множества (2). С другой стороны, в работе [1] (стр. 120) доказано, что функция $xy$ не представима в виде (2), хотя она входит в множество (1).

Итак, множество (1) шире множества (2).

**2.** Существует такое замкнутое множество $N$ в квадрате $[-2,2;\ -2,2]$, что для любой непрерывной функции $f(x,y)$, равной нулю на $N$ и только на $N$, найдется число $\delta=\delta(f)>0$ такое, что $|f(x,\ y)-\gamma[\alpha(x)\beta(y)]|\geqslant\delta$ в какой-нибудь точке квадрата $[-2,2;\ -2,2]$ при любых непрерывных функциях $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Таким множеством $N$ является, например, эллипс

$$(x+y)^2+\frac{(x-y)^2}{4}=1.$$

Это утверждение сформулировано и доказано в работе [1] для множества (2), однако и для множества (1) доказательство сохраняется с незначительными изменениями.

**3.** Функция $f(x,\ y)=\min(x,\ y)$, где $x,\ y\in[0;\ 1]$ не представима в виде (1), хотя может быть аппроксимирована с произвольной точностью даже функциями множества (2). (Это утверждение более сильное, чем б).

Последнее утверждение имеется в работе [1] (стр. 121). Остается показать, что эта функция не входит в множество (1). Действительно, если бы $\min(x,y)=\gamma[\alpha(x)\beta(y)]$ всюду на квадрате $[0,1;\ 0,1]$, то функция $\alpha(x)\beta(y)$ принимала бы в точках $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$ одно и то же значение. В самом деле, пусть $K$ есть множество, состоящее из точек двух отрезков:

$$x=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1 \quad \text{и} \quad y=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

Точки $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$ можно соединить как ломаной, не имеющей с множеством $K$ других общих точек, кроме концов, так и отрезком, целиком лежащим в множестве $K$. Если бы в этих точках функция $\alpha(x)\beta(y)$ принимала разные значения $a$ и $b$, то промежуточное значение $\frac{a+b}{2}$ принималось бы как на множестве $K$, так и вне его, так что $\gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}$ и одновременно $\gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq\frac{1}{2}$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\alpha(\tfrac{1}{2})\beta(\tfrac{1}{2})=\alpha(\tfrac{1}{2})\beta(\tfrac{3}{4}). \tag{3}$$

Если $\alpha(\frac{1}{2})=0$, то $\alpha(\frac{1}{2})\beta(\frac{1}{2})=\alpha(\frac{1}{2})\beta(0)=0$, а, следовательно, $\frac{1}{2}=\gamma[\alpha(\frac{1}{2})\beta(\frac{1}{2})]=\gamma[\alpha(\frac{1}{2})\beta(0)]=0$, чего не может быть.

Итак, $\alpha(\frac{1}{2})\neq 0$, а тогда из (3) следует, что $\beta(\frac{1}{2})=\beta(\frac{3}{4})$, откуда $\alpha(\frac{3}{4})\beta(\frac{1}{2})=\alpha(\frac{3}{4})\beta(\frac{3}{4})$. Отсюда получаем

$$\tfrac{1}{2}=\gamma[\alpha(\tfrac{3}{4})\beta(\tfrac{1}{2})]=\gamma[\alpha(\tfrac{3}{4})\beta(\tfrac{3}{4})]=\tfrac{3}{4}.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

## Литература

1. Арнольд В. И., О представимости функций двух переменных в виде $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$. Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 119—121.



Поступило
27 V 1965


## KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI ESITAMISEST KUJUL $\gamma[\alpha(x)\beta(y)]$


A. Hvostov



Resümee

Artiklis üldistatakse laiemale funktsioonide hulgale V. I. Arnoldi kaks tulemust kahe muutuja funktsioonide esitamise kohta kujul $\gamma[\alpha(x)\beta(y)]$.


## ON REPRESENTATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES IN THE FORM $\gamma[\alpha(x)\beta(y)]$


A. Hvostov



Summary

In this note two results by V. I. Arnold of the representation of functions of two variables presented as $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$ are transmitted on a wider set of functions.

# ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ГИБКИХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНАХ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

**Ю. Лепик**

Кафедра теоретической механики

Современная теория пластинок охватывает широкий круг частных вопросов. Наряду с «классической» теорией изгиба жестких пластин, довольно часто надо проектировать гибкие пластинки, прогибы которых являются сравнимыми с их толщиной. Потребности новой техники вынуждали учитывать влияние температурных напряжений и возможность возникновения пластических деформаций в пластинке. В последнее время большое внимание уделяется неоднородным пластинкам (сюда относятся и пластинки с переменной толщиной и многослойные пластинки). При решении конкретных задач обычно принимается в расчет только один или два из этих факторов (рассматриваются, например, большие прогибы неравномерно нагретых пластинок, пластические деформации в неоднородных пластинах и т. д.). Насколько нам известно, общей теории пластинок, которая учитывала бы все отмеченные выше факторы (т. е. большие прогибы, влияние температуры, неоднородность, пластичность) пока не существует. Попытка выработать такую теорию и была поводом для данной статьи[1].

В работе исходят из теории малых упруго-пластических деформаций, сжимаемость материала учитывается лишь в зоне упругих деформаций. Допускается, что пластинка настолько тонка, что гипотеза о прямых нормалях применима. Прогибы могут иметь порядок толщины пластинки. Ограничиваемся случаем, где температура изменяется по толщине пластинки по линейному закону. Все механические характеристики (модуль Пуассона, предел текучести, модуль упругости и т. д.), а также коэффициент теплового расширения считаются известными функциями координат пластинки.

---

[1] Результаты работы доложены на втором всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Москве в феврале 1964 г.

Выводятся основные дифференциальные уравнения проблемы, которые являются обобщениями соотношений, полученных автором ранее для однородных упруго-пластических пластинок [1,2]. Анализируются некоторые частные случаи (многослойные пластинки, однородные пластинки переменной толщины, проблема устойчивости). В качестве примера решена задача о больших прогибах биметаллической полосы, имеющей на нижней и верхней поверхностях разные температуры.

## 1. Основные соотношения и метод решения задачи

Обозначим символом $t$ температуру в какой-либо точке пластинки, отсчитывая ее от некоторой известной равномерно распределенной начальной температуры. Компоненты деформаций $e_{\alpha\beta}$ вычислим по формулам

$$e_{\alpha\beta} = e^0_{\alpha\beta} + \alpha t \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

где $\alpha$ — коэффициент теплового расширения, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронеккера, а величины $e^0_{\alpha\beta}$ определяются из уравнений Генки—Ильюшина [2]

$$\sigma'_{\alpha\beta} = 2G(1-\omega) e^{0\prime}_{\alpha\beta}. \tag{1.2}$$

Здесь $G$ — модуль сдвига, $\omega$ — модуль пластичности, штрихами обозначены девиаторы соответствующих величин.

Возьмем некоторую плоскость в недеформированной пластинке за «исходную», оси $x_1$, $x_2$ направим по касательным к этой плоскости, а ось $x_3$ — по нормали.

Для достаточно тонкой пластинки имеем $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. Если учитывать влияние сжимаемости материала лишь в упругой зоне, то на основании (1.1) и (1.2) можно составить формулу

$$\sigma_{ij} = \frac{E'}{1+\nu}\left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} e_{kk}\delta_{ij} - \alpha t \frac{1+\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\right), \tag{1.3}$$

где $E' = E(1-\omega)$, $\nu$ — значение модуля Пуассона в упругой зоне; индексы $i$, $j$, $k$ здесь и в дальнейшем принимают значения 1,2. Отметим, что формула (1.3) применима как при упругих, так и при упруго-пластических деформациях, причем в упругой области следует брать $\omega = 0$, а при пластических деформациях — $\nu = {}^1/_2$.

Будем считать, что температура изменяется по толщине пластинки по линейному закону:

[2] Как известно, условия (1.2) можно считать выполненными, если процесс нагружения (включая и тепловое нагружение) является близким к простому.

$$t(x_1, x_2, x_3) = t_0(x_1, x_2) + x_3 t_1(x_1, x_2). \tag{1.4}$$

На основании гипотезы о прямых нормалях находим ($\varepsilon_{ij}, \varkappa_{ij}$ — деформации и кривизны исходной поверхности)

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + x_3 \varkappa_{ij}. \tag{1.5}$$

Имея в виду пластинки переменной толщины, вычисляем усилия и моменты по формулам

$$T_{ij} = \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{ij} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \tag{1.6}$$

где $x_3 = -h_1(x_1, x_2)$ и $x_3 = h_2(x_1, x_2)$ являются уравнениями ограничивающих поверхностей пластинки.

Учитывая формулы (1.3)—(1.5), можем написать интегралы (1.6) в виде

$$\begin{aligned} T_{ij} &= a_{11}\varepsilon_{ij} + a_{21}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + a_{31}t_0\delta_{ij} + \\ &+ a_{12}\varkappa_{ij} + a_{22}\varkappa_{kk}\delta_{ij} + a_{32}t_1\delta_{ij}, \\ M_{ij} &= a_{12}\varepsilon_{ij} + a_{22}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + a_{32}t_0\delta_{ij} + \\ &+ a_{13}\varkappa_{ij} + a_{23}\varkappa_{ij}\delta_{ij} + a_{33}t_1\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где ($m = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} a_{1m} &= \int_{(1)} \frac{E}{1+\nu} x_3^{m-1} dx_3 + \frac{2}{3} \int_{(2)} E' x_3^{m-1} dx_3, \\ a_{2m} &= \int_{(1)} \frac{E\nu}{1-\nu^2} x_3^{m-1} dx_3 + \frac{2}{3} \int_{(2)} E' x_3^{m-1} dx_3, \\ a_{3m} &= -\int_{(1)} \frac{E\alpha}{1-\nu} x_3^{m-1} dx_3 - 2 \int_{(2)} E'\alpha x_3^{m-1} dx_3. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Индексы (1) и (2) у знаков интеграла обозначают, что эти интегралы распространяются соответсвенно на упругие или пластические зоны в данном сечении по нормали.

Область пластических деформаций определим неравенством

$$e_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{e^0_{ij} e^0_{ij} + e^0_{ii} e^0_{jj}} \geqslant \frac{\sigma_s}{E}, \tag{1.9}$$

где предел текучести $\sigma_s$ считается заданной функцией координат пластинки.

Введя еще обозначения

$$\varepsilon^0_{ij} = \varepsilon_{ij} - \alpha t_0 \delta_{ij}, \quad \varkappa^0_{ij} = \varkappa_{ij} - \alpha t_1 \delta_{ij} \tag{1.10}$$

и учитывая, что $e^0_{ij} = \varepsilon^0_{ij} + x_3 \varkappa^0_{ij}$, можем формулу для определения интенсивности деформаций $e_i$ написать в виде

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P(\varepsilon^0_{ij}, \varepsilon^0_{ij}) + 2P(\varepsilon^0_{ij}, \varkappa^0_{ij}) x_3 + P(\varkappa^0_{ij}, \varkappa^0_{ij}) x^2_3}, \tag{1.11}$$

где

$$P(s_{ij}, t_{ij}) = \frac{1}{2}(s_{ij}t_{ij} + s_{ii}t_{jj}), \quad s_{ij} = s_{ji}, \quad t_{ij} = t_{ji}.$$

Допустим, что зависимость $\sigma_i = \Phi(e_i)$ для данного материала известна, тогда модуль пластичности $\omega$ можно определить из формулы $\omega = 1 - \sigma_i / E e_i$.

Переходим к составлению основных уравнений проблемы. Два первых уравнения равновесия $T_{ij,j} = 0$ удовлетворим путем введения функции напряжения $F$ формулой

$$T_{ij} = F_{,kk}\delta_{ij} - F_{,ij}. \tag{1.12}$$

Остаются еще уравнение неразрывности деформации

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = \varkappa^2_{12} - \varkappa_{11}\varkappa_{22} \tag{1.13}$$

и третье уравнение равновесия

$$M_{ij,ij} + T_{ij}w_{,ij} + q = 0. \tag{1.14}$$

Вычислим из первых трех уравнений системы (1.7) величины $\varepsilon_{ij}$ и подставим их в последние три уравнения этой системы: в результате получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= b_{11}T_{ij} + b_{21}T_{kk}\delta_{ij} + b_{31}t_0\delta_{ij} + b_{12}\varkappa_{ij} + b_{22}\varkappa_{kk}\delta_{ij} + b_{32}t_1\delta_{ij},\\
M_{ij} &= -b_{12}T_{ij} - b_{22}T_{kk}\delta_{ij} + b^*_{32}t_0\delta_{ij} + b_{13}\varkappa_{ij} + b_{23}\varkappa_{kk}\delta_{ij} + b_{33}t_1\delta_{ij},
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad b_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})}, \quad b_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11} + 2a_{21}},$$

$$b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad b_{22} = \frac{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}{a_{11}(a_{11} + 2a_{21})}, \quad b_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{11} + 2a_{21}},$$

$$b_{13} = a_{12}b_{12} + a_{13}, \quad b_{23} = a_{12}b_{22} + a_{22}(b_{12} + 2b_{22}) + a_{23},$$

$$b_{33} = (a_{12} + 2a_{22})b_{32} + a_{33}, \quad b^*_{32} = (a_{12} + 2a_{22})b_{31} + a_{32}.$$

Если подставить найденные соотношения (1.12) и (1.15) в уравнения (1.13) и (1.14) и учесть, что $\varkappa_{ij} = -w_{,ij}$, то получим систему двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными $w$ и $F$. Эти уравнения, которые мы для краткости здесь выписывать не будем, можно рассматривать как обобщения известных из теории упругих пластин уравнений Кармана.

Обобщенные уравнения Кармана можно удовлетворить методом упругих решений А. А. Ильюшина по следующей схеме.

1) Будем считать, что механические характеристики $E$, $\nu$, $\sigma_s$, $\alpha$ и распределение температуры даны в каждой точке пластинки. Кроме того, считаем известными величину нагрузки $q$ и форму диаграммы $\sigma_i - e_i$. Решая упругую задачу, найдем первые приближения для прогиба и функции напряжений $w^{(1)}, F^{(1)}$, а также величины $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ и $\varkappa_{ij}^{(1)}$.

2) Вычисляя по формулам (1.10) величины $\varepsilon_{ij}^{0(1)}$ и $\varkappa_{ij}^{0(1)}$, из соотношений (1.9), (1.11) найдем распространение областей пластических деформаций в первом приближении, а также величину $\omega^{(1)}$.

3) На основании формул (1.8) вычисляем величины $a_{1i}^{(1)}$, $a_{2i}^{(1)}$, $a_{3i}^{(1)}$.

4) Из обобщенных уравнений Кармана находим вторые приближения величин $w^{(2)}$, $F^{(2)}$.

## 2. Большие прогибы многослойных пластинок

Рассмотрим пластинку, собранную из $n$ однородных слоев переменной толщины. Будем предполагать, что все слои работают совместно без скольжения и гипотеза о прямых нормалях применима для всего пакета слоев в целом. Обозначим толщину пластинки в некоторой характерной точке исходной поверхности символом $h_0$ и перейдем к безразмерной координате $z=2/h_0x_3$. Граничные поверхности $r$-го слоя определим уравнениями $z=\eta_r(x_1,x_2)$ и $z=\eta_{r+1}(x_1,x_2)$. При деформировании пластинки в каждом слое могут возникнуть две зоны пластических деформаций: $\eta_r\leqslant z\leqslant z_{1r}$ и $z_{2r}\leqslant z\leqslant\eta_{r+1}$, причем $z_{1r}\leqslant z_{2r}$. Дадим формулы для определения величин $z_{1r}$, $z_{2r}$.

Введя вспомогательные величины

$$z_{0r}=-\frac{2P(\varepsilon^0{}_{ij},\varkappa^0{}_{ij})}{h_0P(\varkappa^0{}_{ij},\varkappa^0{}_{ij})},\quad z^2{}_{\varepsilon r}=\frac{4P(\varepsilon^0{}_{ij},\varepsilon^0{}_{ij})}{h^2{}_0P(\varkappa^0{}_{ij},\varkappa^0{}_{ij})},\quad z^2{}_{rs}=\frac{3e^2{}_{sr}}{h^2{}_0P(\varkappa^0{}_{ij},\varkappa^0{}_{ij})}\tag{2.1}$$

и учитывая формулу (1.11), для интенсивности деформаций $r$-го слоя получаем выражение

$$e_{ir}=\frac{e_{sr}}{z_{sr}}\sqrt{z^2-2z_{0r}z+z^2{}_{\varepsilon r}}.\tag{2.2}$$

Так как на границе упругих и упруго-пластических деформаций $e_{ir}=e_{sr}$, то на основании (2.2) получаем

$$z_{1r,\,2r}=z_{0r}\pm\sqrt{z^2{}_{0r}+z^2{}_{sr}-z^2{}_{\varepsilon r}}.\tag{2.3}$$

Если величины $z_{1r}$, $z_{2r}$, определенные из уравнений (2.3), не содержатся в промежутке $(\eta_r,\ \eta_{r+1})$, то следует выбрать соответственно $z_{1r}=\eta_r$ или $z_{2r}=\eta_{r+1}$; тогда в рассматриваемом слое или возникает одна зона пластических деформаций, или все сечение слоя по нормали деформируется упруго. Формула (2.3) не применима в случае $z^2{}_{0r}+z^2{}_{sr}-z^2{}_{\varepsilon r}<0$ — тогда все сечение слоя деформируется пластически и для величин $z_{1r}$, $z_{2r}$ приходится выбрать следующие значения: а) $z_{1r}=z_{2r}=z_{0r}$, если $\eta_r\leqslant z_{0r}\leqslant\eta_{r+1}$; б) $z_{1r}=z_{2r}=\eta_r$, если $z_{0r}<\eta_r$; в) $z_{1r}=z_{2r}=\eta_{r+1}$, если $z_{0r}>\eta_{r+1}$. Отметим, что если коэффициент теплового расширения $\alpha$ является одинаковым для всех слоев, то величины $z_{0r}$, $z_{\varepsilon r}$ не зависят от номера слоя $r$.

Ограничимся случаем линейного упрочнения материала; тогда $\omega_r=\lambda_r\left(1-\frac{e_{sr}}{e_{ir}}\right)$, где $\lambda_r$ — модуль упрочнения материала $r$-го слоя. Вычисляя интегралы в формулах (1.8) и учитывая соотношение (2.2), находим

$$a_{1i}=\frac{2}{3i}\left(\frac{h_0}{2}\right)^i\sum_{r=1}^{n}E_rA_{1ir},\quad a_{2i}=\frac{2}{3i}\left(\frac{h_0}{2}\right)^i\sum_{r=1}^{n}E_rA_{2ir},$$
$$a_{3i}=-\frac{2}{i}\left(\frac{h_0}{2}\right)^i\sum_{r=1}^{n}E_r\alpha_rA_{3ir}.\tag{2.4}$$

Здесь введены следующие соотношения

$$\Lambda_{jir} = (N_{jr} - 1 + \lambda_r)(z^i{}_{2r} - z^i{}_{1r}) + (1 - \lambda_r)(\eta^i{}_{r+1} - \eta^i{}_r) + \\ + i\lambda_r z_{sr}\varphi_{ir} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$N_{1r} = \frac{3}{2(1+\nu_r)}, \quad N_{2r} = \frac{3\nu_r}{2(1-\nu^2{}_r)}, \quad N_{3r} = \frac{1}{2(1-\nu_r)},$$

$$\varphi_{1r} = \Phi_r = \ln[g_r(z_{1r})g_r(\eta_{r+1})] - \ln[g_r(z_{2r})g_r(\eta_r)], \tag{2.5}$$

$$\varphi_{2r} = f_r(z_{1r}) + f_r(\eta_{r+1}) - f_r(z_{2r}) - f_r(\eta_r) + z_{0r}\Phi_r,$$

$$\varphi_{3r} = -\frac{1}{2}(\eta_r + 3z_{0r})f_r(\eta_r) + \frac{1}{2}(z_{1r} + 3z_{0r})f_r(z_{1r}) - \\ - \frac{1}{2}(z_{2r} + 3z_{0r})f_r(z_{2r}) + \frac{1}{2}(\eta_{r+1} + 3z_{0r})f_r(\eta_{r+1}) + \\ + \frac{1}{2}(3z^2{}_{0r} - z^2{}_{\varepsilon r})\Phi_r,$$

$$f_r(z) = \sqrt{z^2 - 2z_{0r}z + z^2{}_{\varepsilon r}}, \quad g_r(z) = f_r(z) + z - z_{0r}.$$

Формулы (2.1)—(2.5) применимы и для однородной пластинки переменной толщины, если только взять $n = 1$. В случае однородной пластинки постоянной толщины имеем $\eta_1 = -1$, $\eta_r = +1$; пренебрегая также температурными напряжениями и принимая $\nu_1 = 1/2$, приходим к формулам работы [2].

### 3. Цилиндрический изгиб прямоугольной полосы

В качестве примера применения выше указанных соотношений решим следующую задачу.

Неоднородная прямоугольная полоса ширины единицы нагружена равномерным давлением интенсивности $q$ и находится в неравномерном поле температуры. Ось $x_1$ направим вдоль полосы. Допустим, что края полосы $x_1 = 0$ и $x_1 = l$ свободно оперты и являются неподвижными. Будем считать, что полоса работает в условиях плоской деформации и изгиб ее можно считать цилиндрическим. Предположим еще, что температуры $t_0$, $t_1$, а также механические и термические характеристики материала зависят лишь от координаты $x_1$. Толщину пластинки считаем для простоты постоянной.

Учитывая, что по условию плоской деформации $\varepsilon_{22} = \varkappa_{22} = 0$, из уравнений равновесия (1.12), (1.14) находим, что

$$T_{11} = \mathrm{const}, \quad M_{11} + T_{11}w = \frac{1}{2}qx(l-x). \tag{3.1}$$

Величину $T_{11}$ определим из граничного условия

$$u(l) = \int_0^l \varepsilon_{11}dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^l (w_{,1})^2 dx_1 = 0. \tag{3.2}$$

В дальнейшем целесообразно перейти к безразмерным величинам (символами $E_0$, $\alpha_0$ обозначены модуль упругости и коэффициент теплового расширения в некоторой выбранной нами точке пластинки):

$$\begin{gathered} x=\frac{2}{l}x_1, \quad \delta=\frac{f}{h}, \quad \mu(x, z)=\frac{e_s l^2}{h^2}, \quad T=\frac{T_{11}l^2}{E_0h^3}, \\ \tau_0(x, z)=\frac{\alpha_0 t_0 l^2}{h^2}, \quad \tau_1(x, z)=\frac{\alpha_0 t_1 l^2}{2h}, \quad q^*=\frac{ql^4}{E_0h^4}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Второе уравнение системы (3.1) удовлетворяем методом Бубнова—Галеркина, выбирая $w/h=\delta\sin\pi x/2$. Вычисляя величины $\varepsilon_{11}$, $M_{11}$ на основании формул (1.15), приходим к основным уравнениям проблемы:

$$\begin{gathered} \frac{l^2\varepsilon_{11}}{h^2}=2\beta_1 T-\frac{\pi^2}{2}\beta_2\delta\sin\frac{\pi}{2}\xi+\beta_3\tau_0+\beta_4\tau_1, \\ T=\frac{\pi^2}{8}\frac{\delta^2}{I_1}-\frac{I_3}{2I_1}+\frac{\pi^2}{4}\delta\frac{I_2}{I_1}, \\ \delta^3+3I_2\delta^2+2(I_2{}^2-I_1I_4-2/\pi^2 I_3)\delta+ \\ +4/\pi^2(I_1I_5-I_2I_3)-32/\pi^5 I_1 q^*=0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

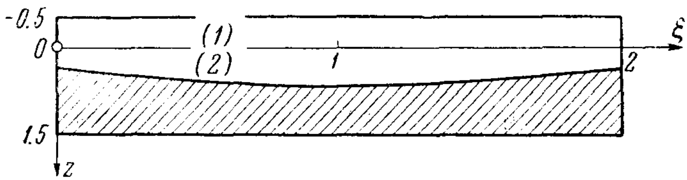
Здесь обозначено

$$\begin{gathered} \beta_1=\frac{hE_0}{2(a_{11}+a_{21})}, \quad \beta_2=\frac{4}{E_0h^2}(a_{12}+a_{22})\beta_1, \quad \beta_3=-\frac{2a_{31}\beta_1}{E_0h\alpha_0}, \\ \beta_4=-\frac{4a_{32}\beta_1}{E_0h^2\alpha_0}, \quad \beta_5=\frac{8}{E_0h^3}\left[(a_{12}+a_{22})\frac{h}{2}\beta_2-a_{13}-a_{23}\right], \\ \beta_6=\frac{4}{E_0h^2\alpha_0}\left(-\frac{h}{2}a_{31}\beta_2+a_{32}\right), \quad \beta_7=\frac{8}{E_0h^3\alpha_0}\left(-\frac{h}{2}a_{32}\beta_2+a_{33}\right), \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} I_1=\int_0^1\beta_1 dx, \qquad I_2=\int_0^1\beta_2\sin\frac{\pi}{2}x dx, \\ I_3=\int_0^1(\tau_0\beta_3+\tau_1\beta_4)dx, \quad I_4=\int_0^1\beta_5\sin^2\frac{\pi}{2}x dx, \\ I_5=\int_0^1(\tau_0\beta_6+\tau_1\beta_7)dx. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Если параметр нагрузки $q^*$ задан, то из уравнений (3.4) можно определить величины $\varepsilon_{11}$, $T$ и $\delta$.

Приведем еще следующий численный пример: биметаллическая полоса (фиг. 1) изготовлена из стали (слой 1) и из дураля (слой 2). Толщины слоев постоянны, причем 2-ой слой в 3 раза толще, чем первый. Механические и термические характеристики этих материалов имеют следующие значения: а) для стали $E=2.1\cdot10^6$ *кг/см*², $\sigma_s=4000$ *кг/см*², $\lambda=0.95$, $\nu=0.3$, $\alpha=1.2\cdot10^{-5}$ $1/^\circ$ С; б) для дураля $E=0.8\cdot10^6$ *кг/см*², $\sigma_s=1600$ *кг/см*², $\lambda=0.98$, $\gamma=0.3$, $\alpha=2.5\cdot10^{-5}$ $1/^\circ$ С. Для отношения длины пластинки к ее толщине выберем значение




Фиг. 1

$l/h = 80$. Допустим, что температура вблизи поверхности первого слоя увеличивается на 50° С; около поверхности второго слоя — на 100° С. Начало координат поместим в плоскости спая обоих слоев. Безразмерные коэффициенты (4.3) имеют теперь значения: $\tau_0 = 4.80$, $\tau_1 = 1.92$, $\mu_{\text{сталь}} = 256/21$, $\mu_{\text{дураль}} = 12.8$. Решая задачу методом упругих решений, находим в качестве третьего приближения значения[3] $T = 0.45$, $\delta = 2.17$; в случае чисто-упругого решения мы имели бы $T = 0.76$, $\delta = 2.06$. Распределение зоны пластических деформаций указано на фиг. 1 штриховкой.

## 4. Проблема устойчивости

Задача об устойчивости имеет смысл лишь в случае, когда в пластинке существует нетривиальное напряженное состояние, для которого $w \equiv 0$. Выясним прежде всего, при каких условиях такое состояние возможно.

Учитывая, что $w = \varkappa_{ij} \equiv 0$, на основании уравнений (1.12)—(1.15) приходим к системе

$$\begin{gathered}(b_{11} + b_{21})F_{,iijj} + 2(b_{11} + b_{21})_{,i}F_{,ijj} + \\ + b_{11,ij}F_{,ij} + b_{21,ii}F_{,jj} + (b_{31}t_0 + b_{32}t_1)_{,ii} = 0,\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}b_{22}F_{,iijj} + 2b_{22,i}F_{,ijj} + (b_{12} + b_{22})_{,ii}F_{,jj} - b_{12,ij}F_{,ij} - \\ - (b^*_{32}t_0 + b_{33}t_1)_{,ii} - q = 0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Формула (1.11) приобретает теперь вид

$$\frac{3}{4}e_i^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon^0_{ij}\varepsilon^0_{ij} + \varepsilon^0_{ii}\varepsilon^0_{jj}) - 3at_1\varepsilon^0_{ii}x_3 + 3a^2t_1^2x_3^2. \tag{4.3}$$

Система уравнений (4.1)—(4.2) содержит лишь одну неизвестную функцию $F$. Нетривиальное напряженное состояние $w = 0$ возможно, если эти уравнения являются совместными. Нетрудно проверить, что это требование выполнено, например, в следующих двух случаях:

[3] Эти вычисления провела Э. Митт, за что автор выражает ей искреннюю благодарность.

а) Пластинка имеет одинаковую толщину. Неоднородность зависит лишь от координаты $x_3$. Деформационное состояние однородное (т. е. $\varepsilon_{ij}$ постоянное). Температурные коэффициенты $t_0$, $t_1$ постоянны; $q \equiv 0$.

б) Пластинка переменной толщины имеет срединную плоскость, которая взята за плоскости $(x_1, x_2)$. Неоднородность зависит от координат $x_1$, $x_2$; кроме того, имеем $t_1 = q \equiv 0$.

В действительности, в случае а) величины $e_i$, $\omega$ не зависят от координат $x_1$, $x_2$. Из формул (1.8), (1.16) и (1.7) вытекает, что величины $a_{ij}$, $b_{ij}$, $T_{ij}$ постоянны; следовательно, уравнение (4.2) удовлетворено тождественно. В случае б) величины $e_i$, $\omega$ не зависят от координаты $x_3$, так как $t_1 = 0$. Любое сечение пластинки по нормали деформируется или чисто пластически, или чисто упруго. Из-за симметрии имеем $a_{12} = a_{22} = a_{32} = b_{12} = b_{22} = b_{32} = b^*_{32} = 0$; уравнение (4.2) опять удовлетворено, и, следовательно, система (4.1)—(4.2) совместна.

При определении начального состояния $w \equiv 0$ надо проверить, можно ли в данном случае выполнить граничные условия для функции напряжений, изгибающего момента и перерезывающей силы. В качестве примера исследуем устойчивость прямоугольной пластинки при $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0$ (условия плоской деформации). Будем считать, что требования случая а) выполнены. Из соотношений (1.7) вытекает, что $\varepsilon_{11} = \mathrm{const}$, $T_{11} = \mathrm{const}$ и $M_{11} = \mathrm{const}$, причем, вообще говоря, $M_{11} \neq 0$. Последнее условие можно удовлетворить лишь в случае, когда края $x_1 = 0$ и $x_1 = l$ защемлены. В случае свободно опертых краев критического состояния не существует, несмотря на то, что система уравнений (4.1)—(4.2) совместна. (Здесь изгибание пластинки начинается при каких угодно малых нагрузках).

Перейдем теперь к составлению уравнения устойчивости Для определения критических параметров нагрузки наряду с основным состоянием рассмотрим бесконечно близкие состояния равновесия, т. е. вместо напряжения $\sigma_{ij}$ и деформаций $e_{ij}$ введем скорости соответствующих величин $\dot\sigma_{ij}$, $\dot e_{ij}$ (точками обозначены производные по времени). Допустим, что потеря устойчивости происходит при возрастающих нагрузках, обеспечивающих догружение во всех точках пластинки (концепция продолжающегося нагружения).

Дифференцируя формулу (1.3) по времени, находим

$$\dot\sigma_{ij}\ \frac{E(1-\omega)}{1+\nu}\left(\dot e^0_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\dot e^0_{kk}\delta_{ij}\right) - \\ -\frac{2}{3}E(\lambda-\omega)\frac{\dot e_i}{e_i}\left(e^0_{ij} + e^0_{kk}\delta_{ij}\right), \qquad (4.4)$$

где

$$\dot e^0_{ij} = \dot\varepsilon^0_{ij} + x_3\dot\varkappa^0_{ij} = \dot\varepsilon_{ij} - \alpha\dot t_0\delta_{ij} + x_3(\dot\varkappa_{ij} - \alpha\dot t_1\delta_{ij}),$$
$$\dot\varkappa_{ij} = -\dot w_{ij}\lambda = 1 - (1/E)(d\sigma_i/de_i).$$

Для скорости интенсивности деформации получаем [3]

$$e^{\cdot}_i = \frac{2}{3}\frac{1}{e_i}(e^0_{ij} + e^0_{kk}\delta_{ij})\, e^{\cdot 0}_{ij}. \tag{4.5}$$

Скорости усилий $T^{\cdot}_{ij}$ и моментов $M^{\cdot}_{ij}$ определим из соотношений

$$\begin{aligned}
T^{\cdot}_{ij} &= a_{11}\varepsilon^{\cdot}_{ij} + a_{21}\varepsilon^{\cdot}_{kk}\delta_{ij} + f^{(1)}{}_{ijmn}\varepsilon^{\cdot}_{mn} + a_{31}\delta_{ij} + g^{(1)}{}_{ij})\, t^{\cdot}_0 + \\
&+ a_{12}\varkappa^{\cdot}_{ij} + a_{22}\varkappa^{\cdot}_{kk}\delta_{ij} + f^{(2)}{}_{ijmn}\varkappa^{\cdot}_{mn} + (a_{32}\delta_{ij} + g^{(2)}{}_{ij})\, t^{\cdot}_1 \\
M^{\cdot}_{ij} &= a_{12}\varepsilon^{\cdot}_{ij} + a_{22}\varepsilon^{\cdot}_{kk}\delta_{ij} + f^{(2)}{}_{ijmn}\varepsilon^{\cdot}_{mn} + (a_{32}\delta_{ij} + g^{(2)}{}_{ij})\, t_0 + \\
&+ a_{13}\varkappa^{\cdot}_{ij} + a_{23}\varkappa^{\cdot}_{kk}\delta_{ij} + f^{(3)}{}_{ijmn}\varkappa^{\cdot}_{mn} + (a_{33}\delta_{ij} + g^{(3)}{}_{ij})\, t^{\cdot}_1,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$f^{(r)}{}_{ijmn} = -\frac{4}{9}\int\limits_{(2)} E\frac{\lambda-\omega}{e_i^2}(e^0_{ij} + e^0_{kk}\delta_{ij})(e^0_{mn} + e^0_{kk}\delta_{mn})\, x_3^{r-1}dx_3,$$

$$g^{(r)}{}_{ij} = \frac{4}{3}\int\limits_{(2)} E\alpha\frac{\lambda-\omega}{e_i^2}(e^0_{ij} + e^0_{kk}\delta_{ij})\, e^0_{kk}x_3^{r-1}dx_3 \quad (r = 1,\ 2,\ 3). \tag{4.7}$$

Вместо уравнений (1.13)—(1.14) получаем теперь систему

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\cdot}_{11,\,22} + \varepsilon^{\cdot}_{22,\,11} - 2\varepsilon^{\cdot}_{12,\,12} = 0, \qquad T^{\cdot}_{ij,\,j} = 0, \\
&M^{\cdot}_{ij,\,ij} + T_{ij}w^{\cdot}_{,\,ij} + q^{\cdot} = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

На основании формул (4.6)—(4.8) можно составить два дифференциальных уравнения для определения скорости прогиба $w^{\cdot}$ и функции напряжений $F^{\cdot}$. В эти уравнения могут войти еще скорости поперечного нагружения $q^{\cdot}$ и термического нагружения $t^{\cdot}_0$, $t^{\cdot}_1$. Эти величины можно определить на основании граничных условий и режима нагружения, т. е. из зависимости типа $f(F,\ q,\ t_0,\ t_1) = 0$. Так как найденные уравнения линейны и однородны относительно величин $F^{\cdot}$, $w^{\cdot}$, $t^{\cdot}_0$, $t^{\cdot}_1$, $q^{\cdot}$, то одна из них остается неопределенной. Последнее обстоятельство можно использовать для определения наклона касательной к диаграмме «нагрузка—прогиб» в точке бифуркации [4].

Система уравнений для определения $F^{\cdot}$ и $w^{\cdot}$ имеет в общем случае весьма сложный вид. Поэтому ограничимся в дальнейшем лишь случаем б). Решение задачи здесь упрощается, так как уравнение устойчивости не содержит величины $F^{\cdot}$. Этому уравнению можно придать вид ($h$ — толщина пластинки):

$$\begin{aligned}
&(a_{13} + a_{23})\, w^{\cdot}_{,iijj} + f^{(3)}{}_{ijmn}w^{\cdot}_{,\,ijmn} + 2(a_{13} + a_{23})_{,\,i}w^{\cdot}_{,\,ijj} + \\
&\quad + 2f^{(3)}{}_{ijmn,\,i}w^{\cdot}_{,\,jmn} + (a_{13,\,ij} - T_{ij})\, w^{\cdot}_{,\,ij} + \\
&\quad + a_{23,\,ii}w^{\cdot}_{,\,jj} + f^{(3)}{}_{ijmn,\,ij}w^{\cdot}_{,\,mn} - q^{\cdot} = 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$a_{13}=\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}(1-\omega),\quad a_{23}=\frac{Eh^3\nu}{12(1-\nu^2)}(1-\omega).$$

$$f^{(3)}{}_{ijmn}=-\frac{1}{12}\frac{Eh}{\sigma_i^2}(\lambda-\omega)T_{ij}T_{mn}.$$

В качестве примера составим систему основных уравнений для однородной круглой пластинки, находящейся в осесимметричном поле температуры $t_0=t_0(r)$. Допустим, что толщина пластинки является известной функцией текущего радиуса: $h=h(r)$. Упрочнение материала будем считать линейным (т. е. $\lambda=\text{const}$). Для этой задачи выполнены условия случая б). Уравнение (4.2) удовлетворено тождественно, а уравнение (4.1) получает вид

$$\psi''+\frac{\psi'}{\varrho}-\frac{\psi}{\varrho^2}+H\left(\frac{1}{H}\right)'\left(\psi'-\nu\frac{\psi}{\varrho}\right)+H\tau'=0. \qquad (4.10)$$

Здесь $R$ — радиус пластинки, $\varrho=r/R$, штрихами обозначены производные по $\varrho$. Значения остальных символов следующие:

$$\psi=\frac{T_{11}\varrho R^2}{Eh_0^3},\quad h_0=h(0),\quad h^*=\frac{h}{h_0},\quad \mu=\frac{\sigma_s R^2}{Eh_0^2},$$

$$\tau=\frac{at_0R^2}{h_0^2},\quad H=\frac{(1-\lambda)h^*\Psi}{\Psi-\lambda\mu h^*},\quad \Psi=\sqrt{\psi'^2-\frac{\psi}{\varrho}\psi'+\frac{\psi^2}{\varrho^2}}.$$

Уравнение устойчивости (4.9) приобретает вид

$$\alpha\varphi''+\beta\varphi'+\gamma\varphi=0, \qquad (4.11)$$

где

$$\varphi={}^1/_R\,w', \quad a=Hh^{*2},\quad b=-{}^3/_4\lambda\mu h^*a\psi\varrho^{-1}\Psi^{-3},$$

$$\alpha=(a\varrho+b\psi)\varrho,\quad \beta=\varrho^2a'+\quad \varrho a+\varrho b'\psi+b(2\varrho\psi'-\psi),$$

$$\gamma={}^1/_2\,\varrho a'-a+\varrho b'\psi'+b(\varrho\psi''-\psi')-9\varrho\psi.$$

Если при заданном $\varrho$ выполнено неравенство $\Psi<\mu h^*$ (область упругих деформаций), то в формулах (4.10)—(4.11) следует взять $\lambda=0$, а если $\Psi>\mu h^*$ (пластические деформации), то $\nu={}^1/_2$.

## Литература


1. Лепик Ю. Р., Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах. Инженерный сб., 1956, **24**, 37—51.
2. Лепик Ю. Р., Равновесие гибких пластинок за пределом упругости. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, 833—842.
3. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва—Ленинград, 1948.
4. Лепик Ю. Р., К исследованию послекритической стадии пластинок, потерявших устойчивость за пределом упругости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 181—192.


Поступило
3 II 1964

# TEMPERATUURIPINGED NÕTKETES PLASTILISTES MITTEHOMOGEENSETES PLAATIDES

Ü. Lepik

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse elastilis-plastiliste plaatide suuri läbipaindeid juhul, kui materjali mehhaanilised karakteristikud osutuvad plaadi punkti koordinaatide teadaolevateks funktsioonideks. Lähtudes Duhamel-Neumanni printsiibist, võetakse arvesse temperatuuripingete mõju. Saadud võrrandisüsteem integreeritakse elastsete lahendite meetodil. Analüüsitakse mõningaid erijuhte (mitmekihilised plaadid, homogeensed plaadid muutuva paksusega). Näitena on lahendatud ülesanne bimetalse riba silindrilise painde kohta juhul, kus riba välispindadel mõjuvad erinevad temperatuurid.

Üksikasjalikumalt on käsitletud plaatide stabiilsuse probleemi. Analüüsitakse tingimusi, mille puhul eksisteerib kriitiline seisund. On koostatud diferentsiaalvõrrandid plaadi eelkriitilise seisundi ning kriitilise koormuse määramiseks.

# THERMAL STRESSES IN FLEXIBLE NONHOMOGENEOUS PLASTIC PLATES

Ü. Lepik

Summary

Large deflections of elastic-plastic plates in the case where mechanical characteristics are given functions of the coordinates of the plate, are studied. Employing the principle of Duhamel and Neuman, the effect of thermal stresses is included. Received equations are integrated by the method of elastic approximations. Some special cases (multilayered plates, homogeneous plates with variable thickness) are analysed. As an example, the problem of cylindrical bending of a bimetallic strip with different temperatures on the external surfaces, is resolved.

A more detailed analysis for the buckling stability problem is given. Conditions by which a critical state exists are discussed. Differential equations, from which the forecritical state and the critical load parameter can be found, are derived.

# О РАВНОВЕСИИ ГИБКИХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ ПАНЕЛЕЙ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

**К. Соонетс**

Кафедра теоретической механики

1. Настоящая работа ставит себе целью составить дифференциальные уравнения равновесия пологой панели, прямоугольной в плане при больших прогибах в упруго-пластической стадии. Исходными уравнениями являются обобщенные Ю. Р. Лепиком [4] уравнения Кармана за пределом упругости. Указывается и один возможный путь решения полученных уравнений методом конечных разностей. Работа не содержит численных результатов. Они будут опубликованы в дальнейшем.

2. В диссертации В. М. Проскуриной [6] рассматривается изгиб прямоугольных пластинок за пределом упругости при малых и больших прогибах, аппроксимируя зависимость между напряжениями и деформациями степенным законом вида $\sigma = A\varepsilon^k$. Задача при больших прогибах решается энергетическим методом для шарнирно опертых пластинок. Даются и результаты экспериментального исследования пластинок. П. А. Лукаш в работе [5] учитывает физическую и геометрическую нелинейности при расчете пологих оболочек и плит. Он намечает путь решения прямой задачи теории пологих оболочек энергетическим методом и иллюстрирует это примерами. Для упрощения решения задачи названные авторы заменяют точное выражение интенсивности деформаций приближенным. П. А. Лукаш указывает также класс задач, для которых такое упрощение допустимо. Н. Ф. Ершов в работе [2], исходя из уравнений Ю. Р. Лепика, рассматривает изгиб сжатой прямоугольной пластинки с начальным искривлением. В расчетах он делает ряд упрощений, из которых принятые законы изменения величин $\Omega_i$, видимо, требуют еще дополнительной проверки (в настоящей работе эти величины обозначены через $R_i$). Полученные уравнения решаются методом Бубнова—Галеркина.

3. Рассмотрим прямоугольную в плане пологую панель под влиянием распределенной нагрузки.

Введем следующие обозначения:

$a$, $b$ — ширина и длина панели;

$h$ — толщина;

$u$, $v$, $w$ — перемещения точек срединной поверхности;

$w_H$ — начальный прогиб;

$\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ — компоненты деформации и искривления элементов срединной поверхности;

$e_{xx}$, $e_{yy}$, $e_{xy}$ — компоненты деформации панели;

$k_x$, $k_y$ — главные кривизны срединной поверхности;

$X_x$, $Y_y$, $X_y$ — компоненты напряжения;

$E$, $\nu$ — модуль упругости и модуль Пуассона;

$\sigma_i$, $e_i$ — интенсивности напряжений и деформаций;

$e_s$ — интенсивность деформаций на пределе пропорциональности;

$\lambda$ — параметр упрочнения;

$\omega$ — параметр, характеризующий величину пластических деформаций;

$l=\frac{a}{b}$;

$\xi=\frac{x}{a}$, $\eta=\frac{y}{b}$, $t=\frac{2}{h}z$ — безразмерные координаты;

$k_1=\frac{a^2}{h}k_x$, $k_2=\frac{b^2}{h}k_y$ — безразмерные главные кривизны;

$q$ — интенсивность нагрузки;

$p=\frac{a^2b^2}{Eh^4}q$ — параметр нагрузки;

$w^*=\frac{w}{h}$, $\mu=\frac{l_s ab}{h^2}$, $w_H{}^*=\frac{w_H}{h}$.

4. Деформационное состояние пологой панели описывается уравнениями

$$e_{xx}=\varepsilon_1+z\varkappa_1,\ e_{yy}=\varepsilon_2+z\varkappa_2,\ e_{xy}=2(\varepsilon_3+z\varkappa_3), \tag{1}$$

где

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}-k_x w+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(w+w_H)}{\partial x}\right]^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_H}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial y}-k_y w+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(w+w_H)}{\partial y}\right]^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_H}{\partial y}\right)^2, \tag{2}$$

$$2\varepsilon_3=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial(w+w_H)}{\partial x}\cdot\frac{\partial(w+w_H)}{\partial y}-\frac{\partial w_H}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_H}{\partial y},$$

$$\varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varkappa_2=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \varkappa_3=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \tag{3}$$

В пластинке различаем упругую и пластическую зоны. Пластические деформации возникают в точках, в которых $e_i \geqslant e_s$; условие $e_i = e_s$ является уравнением граничных поверхностей между упругими и пластическими зонами деформаций. Уравнения этих поверхностей представим в виде

$$z = z_1(x, y), \qquad z = z_2(x, y).$$

Переходим к безразмерной координате по толщине $t = \frac{2}{h} z$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Значения величины $t$, соответствующие значениям $z_1$ и $z_2$, обозначим через $t_1$ и $t_2$.

Интенсивность деформаций $e_i$ можно представить в виде

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + 2zP_{\varepsilon\varkappa} + z^2 P_\varkappa},$$

где $P_\varepsilon$, $P_\varkappa$, $P_{\varepsilon\varkappa}$ — введенные А. А. Ильюшиным квадратичные формы

$$\begin{gathered} P_\varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2, \\ P_\varkappa = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 + \varkappa_1\varkappa_2, \\ P_{\varepsilon\varkappa} = \varepsilon_1\varkappa_1 + \varepsilon_2\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\varkappa_1 + \varepsilon_3\varkappa_3. \end{gathered} \tag{4}$$

Если ввести следующие обозначения

$$t_0 = \frac{2}{h} \frac{P_{\varepsilon\varkappa}}{P_\varkappa}, \quad t_\varepsilon = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{P_\varepsilon}{P_\varkappa}}, \quad t_s = \sqrt{3} \frac{e_s}{h\sqrt{P_\varkappa}}, \tag{5}$$

то интенсивность деформаций преобразуется к виду

$$e_i = \frac{e_s}{t_s} \sqrt{t^2 - 2t_0 t + t_\varepsilon^2}. \tag{6}$$

Из уравнения $e_i = e_s$ и формулы (6) определяются уравнения граничных поверхностей пластических деформаций

$$t_{1,2} = t_0 \pm \sqrt{t_s^2 + t_0^2 - t_\varepsilon^2}. \tag{7}$$

Если $|t_1| < 1$, $|t_2| < 1$, то области пластических деформаций возникают на обоих краях панели;

если вычисления дадут $t_1 < -1$, $t_2 > 1$, то следует взять $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, и все сечение деформируется упруго;

если только $t_1 < -1$ или $t_2 > 1$, то соответственно следует взять $t_1 = -1$ или $t_2 = 1$, и пластические деформации возникают у одного края панели;

если $t_s^2 + t_0^2 - t_\varepsilon^2 \leqslant 0$, то все сечение в пластической области и величины $t_{1,2}$ определяются следующим образом:

$t_1 = t_2 = t_0$, если $|t_0| < 1$,
$t_1 = t_2 = -1$, если $t_0 < -1$,
$t_1 = t_2 = 1$, если $t_0 > 1$.

В дальнейшем рассмотрим линейно упрочняющиеся материалы, для которых

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{при } e_i \leqslant e_s, \\ \lambda\left(1 - \dfrac{e_s}{e_i}\right) & \text{при } e_i \geqslant e_s. \end{cases}$$

В упругой зоне обозначим модуль Пуассона через $\nu$, в пластической зоне считаем материал несжимаемым и $\nu = 0{,}5$.

**5.** Напряженное состояние описываем уравнениями теории малых упруго-пластических деформаций

$$X_x - \nu Y_y = E(1-\omega)e_{xx}, \quad Y_y - \nu X_x = E(1-\omega)e_{yy},$$
$$2(1+\nu)X_y = E(1-\omega)e_{xy}. \tag{8}$$

Здесь $\omega = 1 - \frac{\sigma_i}{e_i}$. В пластинке пренебрегаем зоной разгрузки и переходим от компонентов напряжения к усилиям и моментам, действующим на единицу длины элемента срединного слоя, т. е.

$$T_1 = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} X_x dt, \quad T_2 = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} Y_y dt, \quad S = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} X_y dt,$$
$$M_1 = \frac{h^2}{4}\int_{-1}^{1} X_x t dt, \quad M_2 = \frac{h^2}{4}\int_{-1}^{1} Y_y t dt, \quad H = \frac{h^2}{4}\int_{-1}^{1} X_x t dt.$$

На основании формул (1) и (8) после интегрирования получаем

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{6}\left(A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + \frac{h}{4}A_3\varkappa_1 + \frac{h}{4}A_4\varkappa_2\right), \\ T_2 &= \frac{Eh}{6}\left(A_2\varepsilon_1 + A_1\varepsilon_2 + \frac{h}{4}A_4\varkappa_1 + \frac{h}{4}A_3\varkappa_2\right), \\ S &= \frac{Eh}{6}\left(A_7\varepsilon_3 + \frac{h}{4}A_8\varkappa_3\right), \\ M_1 &= \frac{Eh^2}{24}\left(A_3\varepsilon_1 + A_4\varepsilon_2 + \frac{h}{3}A_5\varkappa_1 + \frac{h}{3}A_6\varkappa_2\right), \\ M_2 &= \frac{Eh^2}{24}\left(A_4\varepsilon_1 + A_3\varepsilon_2 + \frac{h}{3}A_6\varkappa_1 + \frac{h}{3}A_5\varkappa_2\right), \\ H &= \frac{Eh^2}{24}\left(A_8\varepsilon_3 + \frac{h}{4}A_9\varkappa_3\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$A_1 = \frac{1-4\nu^2}{1-\nu^2}(t_1 - t_2) + 8 - 4R_0,$$
$$A_2 = \frac{2-3\nu-2\nu^2}{1-\nu^2}(t_1 - t_2) + 4 - 2R_0,$$

$$A_3 = \frac{1-4\nu^2}{1-\nu^2}(t_1^2 - t_2^2) - 8R_1,$$

$$A_4 = \frac{2-3\nu-2\nu^2}{1-\nu^2}(t_1^2 - t_2^2) - 4R_1, \tag{10}$$

$$A_5 = \frac{1-4\nu^2}{1-\nu^2}(t_1^3 - t_2^3) + 8 - 12R_2,$$

$$A_6 = \frac{2-3\nu-2\nu^2}{1-\nu^2}(t_1^3 - t_2^3) + 4 - 6R_2,$$

$$A_7 = A_1 - A_2, \quad A_8 = A_3 - A_4, \quad A_9 = A_5 - A_6$$

и

$$R_i = \int_{-1}^{t_1} \omega t^i dt + \int_{t_2}^{1} \omega t^i dt \qquad (i = 0,\ 1,\ 2). \tag{11}$$

**6.** Введем функцию напряжений $F$ формулами

$$T_1 = Eh^3 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_2 = Eh^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S = -Eh^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \tag{12}$$

два уравнения равновесия панели удовлетворяются тождественно. Остаются одно уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + T_1\left[k_x + \frac{\partial^2(w + w_H)}{\partial x^2}\right] + T_2\left[k_y + \frac{\partial^2(w + w_H)}{\partial y^2}\right] + 2S\frac{\partial^2(w + w_H)}{\partial x \partial y} + q = 0$$

и уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = \left[\frac{\partial^2(w + w_H)}{\partial x \partial y}\right]^2 - \left(\frac{\partial^2 w_H}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2(w + w_H)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2(w + w_H)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_H}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w_H}{\partial y^2} - k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{14}$$

С помощью формул (9) и (12) исключаем из уравнений (13) и (14) компоненты деформаций $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ и $\varepsilon_3$. Получаем два дифференциальных уравнения относительно двух искомых функций $F$ и $w$. Для сокращения записи вводим следующие обозначения

$$B_1 = \frac{A_1A_4 - A_2A_3}{A_1^2 - A_2^2}, \quad B_2 = \frac{A_1A_3 - A_2A_4}{A_1^2 - A_2^2}, \quad B_3 = \frac{A_8}{A_7},$$

$$K_1 = 3(A_3B_2 + A_4B_1) - 4A_5, \quad K_2 = 3(A_3B_1 + A_4B_2), \tag{15}$$

$$K_3 = 4A_9 - \frac{3A^2_8}{A_7}, \quad K_4 = \frac{A_2}{A_1^2 - A_2^2}, \quad K_5 = \frac{A_1}{A_1^2 - A_2^2}.$$

Оператор Мэнсфилда $\diamond^4(\alpha,\ \beta)$ определяется следующим образом:

$$\Diamond^4(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}.$$

Для решения системы методом конечных разностей представим уравнения в безразмерных величинах, т. е. в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{B_1}{l^2}\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2} + B_2\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(B_2\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2} + l^2B_1\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right) -$$
$$- 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(B_3\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\right) + \frac{1}{72}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{K_1}{l^2}\frac{\partial^2w^*}{\partial\xi^2} + K_2\frac{\partial^2w^*}{\partial\eta^2}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(K_2\frac{\partial^2w^*}{\partial\xi^2} + l^2K_1\frac{\partial^2w^*}{\partial\eta^2}\right) - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(K_3\frac{\partial^2w^*}{\partial\xi\partial\eta}\right)\right] +$$
$$+ 4\Diamond^4(F,\ w^* + w_H^*) + 4\left(\kappa_1\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2} + k_2\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}\right) + 4p = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{K_4}{l^2}\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2} + K_5\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(K_5\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2} + l^2K_4\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right) +$$
$$+ 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\right) + \frac{1}{24}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{B_1}{l^2}\frac{\partial^2w^*}{\partial\xi^2} + B_2\frac{\partial^2w^*}{\partial\eta^2}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(B_2\frac{\partial^2w^*}{\partial\xi^2} + l^2B_1\frac{\partial\xi\partial\eta}{\partial\eta^2}\right) - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(B_3\frac{\partial^2w^*}{\partial^2w^*}\right)\right] =$$
$$= -\frac{1}{12}\Diamond^4(w^* + 2w_H^*,\ w^*) - \frac{1}{6}\left(k_1\frac{\partial^2w^*}{\partial\eta^2} + k_2\frac{\partial^2w^*}{\partial\xi^2}\right).$$

К системе (16) принадлежат еще граничные условия, которые рассмотрим подробнее ниже.

**7.** Заменим производные через центральные разности точностью порядка квадрата шага сетки $\Delta$. Шаг сетки принимаем равным по обоим направлениям, так что $\Delta = \frac{1}{n}$, где $n$ число интервалов на отрезке [0, 1]. Система (16) заменяется нелинейной алгебраической системой, которую можно представить в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=i-2}^{i+2}\sum\limits_{l=j-2}^{j+2} c_{ml}F_{ml} + \sum\limits_{m=i-2}^{i+2}\sum\limits_{l=j-2}^{j+2} d_{ml}w_{ml}^* = -288\Delta^4p_{ij} + f_1(F, w^*, w_H^*), \\ \sum\limits_{m=i-2}^{i+2}\sum\limits_{l=j-2}^{j+2} c'_{ml}F_{ml} + \sum\limits_{m=i-2}^{i+2}\sum\limits_{l=j-2}^{j+2} d'_{ml}w_{ml}^* = f_2(w^*, w_H^*), \end{cases} \tag{17}$$
$$(m, l = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Коэффициенты $c_{ml}$, $c'_{ml}$, $d_{ml}$, $d'_{ml}$ как функции величин $A_r (r = 1, 2, \ldots, 9)$ определяются формулами (10), и их значения приходится также вычислять в узлах сетки. Их выписывать не будем из-за сложного вида в общем случае.

Члены $f_1(F, w^*, w_H^*)$ и $f_2(w^*, w_H^*)$ — нелинейные части относительно искомых функций $F$ и $w^*$ в определенных точках сетки. Так, $f_1$ содержит произведения значений $F$ и $w^*$, а $f_2$ — произведения значений $w^*$ и $w_H^*$.

Считая коэффициенты $c$, $c'$, $d'$, $d$ и вид нагрузки известными, можно решить систему (17).

8. Остановимся на определении величин $A_r$. В случае линейного упрочнения можно провести интегрирование по формулам (11) в элементарных функциях. Приходим к результатам

$$\frac{1}{\lambda}R_0 = 2 + t_1 - t_2 - t_s\Phi,$$

$$\frac{1}{\lambda}R_1 = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2) - t_s[f(t_1) - f(t_2) + f(1) - f(-1) + t_0\Phi], \quad (18)$$

$$\frac{1}{\lambda}R_2 = \frac{1}{3}(2 + t_1^3 - t_2^3) - \frac{1}{2}t_s[(t_1 + 3t_0)f(t_1) - (t_2 + 3t_0)f(t_2) + $$
$$+ (1 + 3t_0)f(1) + (1 - 3t_0)f(-1) + (3t_0^2 - t_\varepsilon^2)\Phi],$$

где

$$f(t) = \sqrt{t^2 - 2t_0t + t_\varepsilon^2}, \quad \Phi = \ln\frac{[f(1) + 1 - t_0][f(t_2) + t_1 - t_0]}{[f(-1) - 1 - t_0][f(t_2) + t_2 - t_0]}. \quad (19)$$

Эти результаты в случае $\nu = 0{,}5$ известны и из работы Ю. Р. Лепика [3]. Там же доказывается, что выражение под логарифмом имеет всегда положительное значение. Если $|t_0| = |t_\varepsilon|$, то в пределе

$$\Phi = \ln\frac{1 - t_0^2}{(t_2 - t_0)(t_0 - t_1)}.$$

Подставив $R_i$ в формулы (10) получим все $A_r$ и с помощью их можно вычислить и коэффициенты (15).

Конечно, величины $t_1$, $t_2$, $t_0$, $t_\varepsilon$ первоначально неизвестны, и их приходится вычислять методом последовательных приближений, как показано в работе [4].

8. Дадим одну возможную схему решения задачи о равновесии упругопластических пологих панелей с большими прогибами.

1) Допустим, что панель деформируется чисто упруго. Тогда $R_0 = R_1 = R_2 = 0$, и коэффициенты (10) и (15) можем считать известными. Из системы (16) с соответствующими граничными условиями найдем первые приближения для функции напряжений $F$ и прогиба $w^*$. Систему (17) можно решить методом, предложенным А. С. Вольмиром в монографии [1]. Задаемся в узлах сетки начальным приближением $F_0$ и $w_0^*$. Подставляем $w_0^*$ во второе уравнение системы (17) и находим новые приближения $F_1$. Из первого уравнения находим новые приближения $w_1^*$. Так можно продолжать до достижения необходимой точности. Обозначим последние найденные приближения $F^0$ и $w^{*0}$.

2) С помощью приближений $F^0$ и $w^{*0}$ находим по формулам (4), (5) и (7) величины $t$.

3) Вычисляем величины $A_1 - A_9$ по формулам (18) и (10), коэффициенты — по (15).

4) Решаем опять систему (17). Начальными приближениями, которыми задаемся в узлах сетки, являются $F^0$ и $w^{*0}$. Решение системы дает новые приближения $F^1$ и $w^{1*}$, являющиеся начальными для следующего этапа.

Этот метод приближения можно повторять нужное число раз.

**9.** Некоторого рода трудности возникают и при удовлетворении краевых условий. Рассмотрим для примера несколько видов закрепления пластинки.

а) Края шарнирно закреплены, кромки могут сближаться.

Если $\xi=0$ и $\xi=1$, то $w^*=0$, $M_1=0$, $T_1=0$, $S=0$;
если $\eta=0$ и $\eta=1$, то $w^*=0$, $M_2=0$, $T_2=0$, $S=0$.

Эти условия приводят к уравнениям

$$72B_1\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}+K_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}+l^2K_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}=0 \text{ при } \xi=0 \text{ и } \xi=1;$$

$$72B_1\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}+K_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}+K_2\cdot\frac{1}{e^2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}=0 \text{ при } \eta=0 \text{ и } \eta=1;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}=0 \text{ при } \eta=0 \text{ и } \eta=1;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}=0 \text{ при } \xi=0 \text{ и } \xi=1;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta}=0 \text{ при } \xi=0,\ \xi=1 \text{ и } \eta=0,\ \eta=1.$$

В конечных разностях получаем следующие уравнения (индексы у $B$ и $K$ поставлены снизу вверх):

для края $\xi=0$:

$72B^1_{0,j}(F_{1,j}-2F_{0,j}+F_{-1,j})+K^1_{0,j}(w^*_{1,j}+w^*_{-1,j})=0;$
$F_{0,j+1}-2F_{0,j}+w^*_{0,j-1}=0;$
$F_{1,j+1}-F_{-1,j+1}+F_{-1,j-1}-F_{1,j-1}=0;$
$w^*_{0,j}=0 \qquad (j=0,1,2,\ \dots,\ n);$

для края $\eta=0$:

$72B^1_{i,0}(F_{i,-1}-2F_{i,0}+F_{i,1})+K^1_{i,0}(w^*_{i,-1}+w^*_{i,1})=0;$
$F_{i+1,0}-2F_{i,0}+F_{i-1,0}=0;$
$F_{i+1,1}-F_{i-1,1}+F_{i-1,-1}-F_{i+1,-1}=0;$
$w^*_{i,0}=0 \qquad (i=0,1,2,\ \dots,\ n).$

Аналогичны условия и для краев $\xi=1$ или $\eta=1$.

б) Края шарнирно закреплены, кромки не могут сближаться. Условия для прогиба $w^*$ и моментов рассмотрены в пункте а). К ним прибавляются условия:

$u=0$ при $\xi=0$ и $\xi=1$,
$v=0$ при $\eta=0$ и $\eta=1$.

Эти условия выражаются в интегральной форме Например, условие для $u$ имеет вид:

$$\int\limits_0^1\left[24\left(l^2K_4\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}+K_5\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}\right)+l^2B_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}+B_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}+\right.$$

$$\left.+4k_1w^*+2(w^*+w_H^*)\frac{\partial^2(w^*+w_H^*)}{\partial\xi^2}-2w_H^*\frac{\partial^2 w_H^*}{\partial\xi^2}\right]d\xi=0.$$

Интегрирование можно провести с помощью формулы Симпсона, ибо в узлах сетки известны значения $w^*$, $F$ и их вторых производных.

## Литература


1. Вольмир А. С., Устойчивость упругих систем. Москва, 1963.
2. Ершов Н. Ф., Упруго-пластический изгиб сжатых гибких пластин. Тр. Горьковск. инж.-строит. ин-та, 1961, **39**, 76—93.
3. Лепик Ю. Р., О равновесии гибких пластинок за пределом упругости. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, 833—842.
4. Лепик Ю. Р., Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах. Инженерный сб., 1965, **24**, 37—51.
5. Лукаш П. А., Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности. Акад. строительства и архитектуры СССР. Центр. научно-исслед. институт строительных конструкций. Тр. института, вып. 7., Москва, 1961, **7**, 268—320.
6. Проскурина В. М., Расчет прямоугольных пластинок из нелинейно-упругих материалов при конечных перемещениях. Диссертация, Москва, 1959.



Поступило
17 X 1964


## RISTKÜLIKUKUJULISE HORISONTAALPROJEKTSIOONIGA ELASTILIS-PLASTILISTE NÕTKETE PANEELIDE TASAKAALUST SUURTE LÄBIPAINETE PUHUL


K. Soonets



Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse elastsete ristkülikukujulise horisontaalprojektsiooniga paneelide tasakaalu diferentsiaalvõrrandid elastilis-plastiliste deformatsioonide juhuks. Lähtutakse väikeste elastilis-plastiliste deformatsioonide teooria põhivõrrandeist. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid on tuletatud lineaarselt kalestuva materjali jaoks eeldusel, et paneelis tekivad ainult aktiivsed deformatsioonid. Saadakse kahest mittekonstantsete kordajatega neljandat järku osatuletistega võrrandist koosnev süsteem. Kirjeldatakse saadud süsteemi lahendamise võimalust lõplike vahede meetodil. Võrrandisüsteemi kordajad arvutatakse järkjärgulise lähendamise teel.

Antakse meetod plastiliste deformatsioonide piirkondade leidmiseks.

Vaadeldakse rajatingimusi šarniirselt kinnitatud servadega paneeli jaoks.

# ÜBER DAS GLEICHGEWICHT DER ELASTISCH-PLASTISCHEN BIEGSAMEN PANEELE MIT RECHTECKIGER HORIZONTALPROJEKTION IM FALLE GROßER DURCHBIEGUNGEN

Zusammenfassung


K. Soonets



Die Differentialgleichungen elastischer Paneele werden für elastisch-plastische Paneele verallgemeinert.

Als Grundlagen werden die Hauptgleichungen der kleinen elastisch-plastischen Deformationen genommen. Das Differentialgleichungs-system wird für das Material mit linearer Verfestigung herangezogen. Die Deformationen werden nur aktiv gelesen. Die Koeffizienten der Gleichungen werden durch die Iterationsmethode gefunden.

Es wird eine Lösungsmethode des Gleichungssystems durch die endlichen Differenzen beschrieben. Es wird auch ein Weg zur Bestimmung der plastischen Gebiete im Paneel gezeigt.

## СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
V

На русском языке

Резюме на немецком и английском языках
Ответственный редактор С. Барон
Корректры А. Правдин, Э. Выханду, О. Мутть,
Ф. Киббермани и Ю. Сарв

Сдано в печать 30/IV 1965 г. Подписано к печати 28/I 1966 г. Бумага фаб. Кохила, типографская № 1, 60 × 90, 1/16. Печатных листов 12 + 1 вклейка.
Учетно-издат. листов 13,5. Тираж 500 экз.
Заказ № 3730. МВ-06449.
Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР,
г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19, II

Цена 1 руб.

2—2